КОРОТКІ ПОВІДОМЛЕННЯ

Д.А. ГОЛОЛОБОВ

УДК 519.21

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ЭМПИРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Аннотация. Рассмотрена задача стохастичного программирования, в которой оценочная функция аппроксимируется ее эмпирической оценкой на основании наблюдений неоднородного случайного поля с непрерывным временем и сильным перемешиванием. Исследована сильная состоятельность указанной оценки и найдено ее асимптотическое распределение при условии ограничения на неизвестный параметр в виде систем неравенств.

Ключевые слова: метод эмпирических средних, случайное поле, вероятность, функция, минимизация, нестационарное поле, непрерывное время.

Одним из методов, используемых для решения задач стохастического программирования, является метод эмпирических средних. Он основан на замене функции математического ожидания ее эмпирической оценкой и на последующем исследовании полученной таким образом приближенной детерминированной оптимизационной задачи. В настоящей статье исследуются задачи стохастической оптимизации на основании наблюдений случайных полей с непрерывным временем при условии сильного перемешивания и ограничений в виде систем неравенств.

Сформулируем следующую задачу.

Пусть $\xi(\vec{t}\,)=\xi(\vec{t},\omega)=\xi(t_1,t_2,\ldots,t_m,\omega)$, $\vec{t}=(t_1,t_2,\ldots,t_m)\in T\subset\mathcal{R}^m$, — случайное поле:

$$\xi(\vec{t}\,):(\Omega,\mathcal{G},P)\to(Y,\mathcal{B}(Y)),$$

где $(\Omega,\mathcal{G},P)$ — вероятностное пространство, $(Y,\mathcal{B}(Y))$ — метрическое пространство. Пусть также I — замкнутое подмножество $\mathcal{R}^l$, $l\ge 1$, в некоторых случаях $I=\mathcal{R}^l$; $f:\mathcal{T}\times X\times Y\to\mathcal{R}$ (где X, Y — некоторые множества) — неотрицательная действительная функция, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) функция $f(\vec{t},\vec{u},z)$, $\vec{u}\in I$, непрерывна для всех $z\in Y$;

2) для всех $\vec{u}\in I$ отображение $f(\vec{t},\vec{u},z)$, $z\in Y$, является $\mathcal{B}(Y)$-измеримым.

Проанализируем

$$\{\xi(\vec{t}\,),\ t_1\in[0,T_1],\ t_2\in[0,T_2],\ldots,t_m\in[0,T_m];\ T_1,T_2,\ldots,T_m>0\}.$$

Задача состоит в следующем:

$$\min_{\vec{u}\in I}\mathrm{E}\{f(\vec{t},\vec{u},\xi(\vec{0}))\}=\min_{\vec{u}\in I}F(\vec{u}). \tag{1}$$

Сформулируем некоторые вспомогательные результаты, используемые в дальнейшем.

Определение 1 [1]. Допустим, что для однородного в узком смысле случайного поля $\xi(\vec{t})$, $\vec{t} \in R^m$, $m \ge 1$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ со значениями в метрическом пространстве $(X, \mathcal{U})$, существует такая функция $\Psi(d)$, $d \ge 0$, равномерно сходящаяся к нулю, $d \to \infty$, что для любых множеств $S_1, S_2 \subset \mathcal{R}^m$ выполняется

$$\sup_{\substack{A_1 \in F(S_1) \\ A_2 \in F(S_2)}} |\, \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) - \mathrm{P}(A_1)\,\mathrm{P}(A_2)\,| \le \Psi(d(S_1, S_2)).$$

Здесь

$$F(S) = \sigma\{\xi(\vec{t}), \vec{t} \in S\}, \; d(S_1, S_2) = \inf\,\{||\vec{t}_1 - \vec{t}_2||, \vec{t}_1 \in S_1, \vec{t}_2 \in S_2\},$$

где $||\cdot||$ — евклидова норма в $\mathcal{R}^m$. Тогда говорят, что случайное поле $\xi(\vec{t})$ удовлетворяет условию сильного перемешивания с коэффициентом $\Psi(d)$.

Рассмотрим задачу (1), которую можно аппроксимировать следующей задачей минимизации:

$$\min_{\vec{u} \in I} \frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_m} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \ldots \int_0^{T_m} f(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m))\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m =$$

$$= \min_{\vec{u} \in I} F_{T_1, T_2, \ldots, T_m}(\vec{u}).$$

Сформулируем утверждение о сильной состоятельности данной эмпирической оценки.

Теорема 1. Пусть случайная функция $f(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Для всех $\vec{u} \in I$ существует функция $F(\vec{u})$ такая, что

$$F(\vec{u}) = \lim_{T_1, T_2, \ldots, T_m \to \infty} \mathrm{E} F_{T_1, T_2, \ldots, T_m}(\vec{u}),$$

и точка $\vec{u}^* \in I$ такая, что $F(\vec{u}^*) < F(\vec{u})$, если $\vec{u}^* \ne \vec{u}$.

2. Если I ограничена, то $f(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m)) \to \infty$ при $||\vec{u}||_p \to \infty$ для всех фиксированных $t_1, t_2, \ldots, t_m$ и $\xi(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

3. Для всех δ существуют $\gamma_0 > 0$ и функция $c(\gamma) > 0$, $\gamma > 0$; $c(\gamma) \to 0$, $\gamma \to 0$, такие, что для всех $s' \in K$ и γ : $0 < \gamma < \gamma_0$, выполняются

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{\vec{T} \to \infty} \frac{1}{\vec{T}} \int_{[\vec{0}, \vec{T}]} \sup_{||\vec{u} - \vec{u}'|| < \gamma,\, ||\vec{u} - \vec{u}^*||_p > \delta} |\, f(\vec{t}, \vec{u}, \xi(\vec{t})) - f(\vec{t}, \vec{u}', \xi(\vec{t}))\,| < c(\gamma) \right\} = 1.$$

4. Выполняется условие сильного перемешивания для случайного поля $\xi(\vec{t})$:

$$\sup_{\substack{A_1 \in F(S_1) \\ A_2 \in F(S_2)}} \left| \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) - \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2) \right| \le \Psi(d) = O(d^{-m-\varepsilon}) \le \frac{c}{1 + d^{m+\varepsilon}},$$

где $c > 0$, $d \to \infty$, $\varepsilon > 0$ (в соответствии с определением 1).

5. Пусть $\mathrm{E}\{||\,\xi(\vec{t})\,||^{2+\delta}\} < \infty$ для всех $\varepsilon\delta > 2m$; $||\vec{u}||_p < \infty$.

Обозначим $\vec{u}_{T_1, T_2, \ldots, T_m} = \operatorname*{argmin}_{\vec{u} \in I} F_{T_1, T_2, \ldots, T_m}(\vec{u})$. Тогда

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{T_1, T_2, \ldots, T_m \to \infty} ||\, \vec{u}_{T_1, T_2, \ldots, T_m} - \vec{u}^*\,||_p = 0 \right\} = 1.$$

При доказательстве используются методы, описанные в [1–3] для случайных процессов с дискретным временем.

Рассмотрим асимптотическое распределение исследуемых оценок.

Пусть $\xi(\vec{t}\,) = \xi(\vec{t}, \omega) = \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m, \omega)$, $\vec{t} \in \mathcal{T} \subset \mathcal{R}^m$, $t_i \in \mathcal{R}$, — случайное поле с непрерывным временем, которое имеет размерность m:

$$\xi : (\Omega, \mathcal{G}, P) \to (Y, \mathcal{B}(Y)).$$

Определим множество

$$J = \{\vec{u} \in \mathcal{R}^l : \vec{g}(\vec{u}) = (g_1(\vec{u}), \ldots, g_n(\vec{u})) \le \vec{0}\}, \quad l, n \ge 1.$$

Зададим эмпирическую функцию

$$F_{\vec{T}}(\vec{u}) = \frac{1}{T_1 T_2 \ldots T_m} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \ldots \int_0^{T_m} f(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m))\, dt_1 dt_2 \ldots dt_m,$$

где $f : \mathcal{T} \times X \times Y \to \mathcal{R}$ — неотрицательная функция.

Траектории поля $\xi(\vec{t}\,)$ предполагаются непрерывными.

Пусть выполняются следующие условия.

Условие 1. Функции $g_i(\vec{u})$ дважды непрерывно дифференцируемы и для некоторых c, γ_0 при $\|\vec{u} - \vec{u}_0\| \le \gamma$, $\gamma < \gamma_0$, выполняется

$$\left| \frac{\partial g_i(\vec{u})}{\partial u_k} \right| \le c, \quad \left| \frac{\partial^2 g_i(\vec{u})}{\partial u_j \partial u_k} \right| \le c.$$

Обозначим N_1 множество индексов, для которых $g_i(\vec{u}_0) = 0$, и N_2 — множество индексов, для которых $g_i(\vec{u}_0) < 0$.

Условие 2. Векторы $\vec{\nabla} g_i(\vec{u}_0) < 0$, $i \in N_1$, линейно независимы.

Условие 3. Функции $g_i(\vec{u})$ выпуклые.

Условие 4. Существует точка $\vec{u}^*$ такая, что $\vec{g}(\vec{u}^*) < \vec{0}$.

Условие 5. Функция $f(\vec{t}, \vec{u}, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по второй переменной и

$$\mathrm{E}\left\{ \max_{\|\vec{u}\|_p \le c} f(\vec{t}, \vec{u}, \xi(\vec{t}\,)) \right\} < \infty.$$

Условие 6. Точка $\vec{u}^*$ — единственный минимум на J функции $F(\vec{u})$, т.е. $F(\vec{u}^*) < F(\vec{u})$, $\vec{u} \ne \vec{u}^*$, и

$$\mathrm{P}\left\{ \lim_{\vec{T} \to \infty} \|\vec{u}(\vec{T}) - \vec{u}^*\|_p = 0 \right\} = 1.$$

Условие 7. Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\|\vec{u}(\vec{T}) - \vec{u}^*\|_p < \gamma$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 f(\vec{t}, \vec{u}, y)}{\partial u_k \partial u_l} \right| \le c.$$

Сформулируем основное утверждение об асимптотическом распределении данной эмпирической оценки.

Теорема 2. Пусть вектор $f'(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m))$ удовлетворяет условию п. 4 теоремы 1, условиям 1–7 и следующим условиям:

1) $\mathrm{E}\, \| f'(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m)) \|_p^{2+\delta} < \infty$, $\varepsilon\delta > 2m$;

2) $$\lim_{T_1 T_2 \ldots T_m \to \infty} \mathrm{E}\left[\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 \ldots T_m}} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \ldots \int_0^{T_m} f'(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m)) dt_1 dt_2 \ldots dt_m \right] \times$$
$$\times \left[\frac{1}{\sqrt{T_1 T_2 \ldots T_m}} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \ldots \int_0^{T_m} f'(t_1, t_2, \ldots, t_m, \vec{u}, \xi(t_1, t_2, \ldots, t_m)) dt_1 dt_2 \ldots dt_m \right] = \sigma^2,$$

где σ^2 — положительно-определенная матрица. Тогда вектор $\zeta_{\vec{T}} = \sqrt{T_1 T_2 \ldots T_m}\,(\vec{u}_{T_1, T_2, \ldots, T_m} - \vec{u}^{\,*})$ слабо сходится к случайному вектору, который является решением задачи квадратичного программирования:

$$\frac{1}{2}(\vec{u})^T \Phi(\vec{u}^{\,*})\vec{u} + \vec{\xi}\vec{u} \to \min, \quad (\vec{\nabla} g(\vec{u}^{\,*}))^T \vec{u} \le 0, \; i \in N_1,$$

где $\vec{\xi}$ — гауссов вектор с параметрами $(0, \sigma^2)$.

Доказательство проводится по схеме, приведенной в [4, гл. 3].

В настоящей статье исследовано асимптотическое поведение оценок метода эмпирических средних для нестационарного случайного поля в условиях сильного перемешивания. Доказана сильная состоятельность полученной оценки и найдено ее асимптотическое распределение, которое сходится к решению задачи квадратичного программирования. Полученные результаты могут быть использованы при численном нахождении и исследовании скорости сходимости метода эмпирических средних.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Empirical estimates in stochastic optimization and identification. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2005. 250 p.
2. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of *M*-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. N 4. P. 468–481.
3. Ермольев Ю.М. Метод эмпирических средних в задачах стохастического программирования. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 6. С. 3–18.
4. Knopov P.S., Korkhin A.S. Regression analysis under a priori parameter restrictions. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer Science+Business Media, 2012. 234 p.

Надійшла до редакції 16.02.2018

Д.О. Гололобов

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МЕТОДУ ЕМПІРИЧНИХ СЕРЕДНІХ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Анотація. Розглянуто задачу стохастичного програмування, в якій оціночна функція апроксимується її емпіричною оцінкою на основі спостережень неоднорідного випадкового поля з неперервним часом та сильним перемішуванням. Досліджено сильну консистентність вказаної оцінки та знайдено її асимптотичний розподіл за умови обмежень на невідомий параметр у вигляді системи нерівностей.

Ключові слова: метод емпіричних середніх, випадкове поле, ймовірність, функція, мінімізація, нестаціонарне поле, неперервний час.

D.A. Gololobov

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF THE METHOD OF EMPIRICAL ESTIMATE FOR NON-STATIONARY RANDOM FIELDS

Abstract. The author considers a stochastic programming problem where the estimation function is approximated by its empirical estimate for observations of a non-homogeneous random field with continuous time and strong mixing. The strong consistency of this estimate is investigated and its asymptotic distribution is found under the constraint imposed on the unknown parameter in the form of systems of inequalities.

Keywords: method of empirical estimate, random field, probability, function, minimization, non-stationary field, continuous time.

Гололобов Дмитрий Александрович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры Государственного университета телекоммуникаций, Киев, e-mail: dut.gololobov.dma@meta.ua.