



## МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С ДВУМЯ ТИПАМИ ЗАЯВОК И РАЗЛИЧНЫМИ ПОЛИТИКАМИ ПОПОЛНЕНИЯ ЗАПАСОВ

**Аннотация.** Предложены марковские модели систем обслуживания–запасания с двумя типами заявок, в которых используются две политики пополнения запасов: в одной политике объем поставляемых запасов является постоянной величиной, а в другой политике — переменной. Для доступа заявок высокого приоритета нет ограничений, заявки низкого приоритета принимаются лишь тогда, когда суммарное число заявок в системе меньше заданного порогового значения. Разработаны методы расчета характеристик изучаемых систем и решены задачи их оптимизации. Приведены результаты численных экспериментов.

**Ключевые слова:** система обслуживания–запасания, политика пополнения запасов, разнотипные заявки, метод расчета, оптимизация.

### ВВЕДЕНИЕ

Системы запасания с сервером, в которых заявки для приобретения запасов поступают в случайные моменты времени, называются системами обслуживания–запасания (Queuing-Inventory Systems, QIS). Впервые термин QIS использован в работе [1], хотя основы исследований подобных систем заложены ранее в работах [2–4]. Обзор публикаций, посвященных различным аспектам изучения таких систем, приведен в [5].

В последние годы эти системы интенсивно исследуются. В большинстве работ авторы считают, что заявки идентичны по всем показателям: размеру (т.е. объему требуемых ими запасов), времени обслуживания, важности и т.д. Однако на практике поставщики товаров различают своих клиентов. Так, например, клиенты могут иметь различные размеры, быть постоянными и эпизодическими, некоторые из них могут платить за один и тот же товар больше, чем другие клиенты, и т.д. В таких случаях поставщики товаров для поощрения выгодных клиентов используют различные схемы для их приоритетного обслуживания.

Несмотря на то, что QIS с разнотипными заявками часто используются, они мало изучены. Так, в работах [6–11] исследованы модели QIS с мгновенным обслуживанием и двумя типами заявок при использовании  $(S-1, S)$ -политики пополнения запасов (ППЗ). Подобные модели при использовании  $(s, S)$ -политики изучены в [12, 13]. В работе [14] исследована модель QIS с двумя типами заявок и  $(s, S)$ -политикой, в которой заявки низкого приоритета уходят в орбиту бесконечного размера, если в моменты их поступления уровень запасов системы меньше  $s$ ; заявки высокого приоритета принимаются, если уровень запасов системы больше нуля. (Ссылки на публикации этого направления имеются в списках литературы указанных работ). Модель QIS с разнотипными заявками и положительным временем обслуживания исследована в [15]. В системе обслуживается  $K \geq 2$  типов пуассоновских потоков заявок, и заявка  $i$ -го типа с вероятностью  $\theta_i$  потре-

бует запас размера  $b_i$ ,  $1 \leq b_i \leq S$ , где  $S$  — максимальный размер склада системы, при этом  $\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_K = 1$ . В [15] рассмотрена рандомизированная ППЗ и задача нахождения оптимальных размеров заказов сформулирована как задача марковского программирования. Критерием задачи является минимизация суммарных убытков, связанных с ожиданием заявок в очереди, их потерями, доставкой и хранением запасов. Предложены методы решения поставленной задачи.

Анализ упомянутых работ показал, что в них дифференциация заявок осуществляется либо с помощью введения критического уровня запасов [6–14], либо по их размеру [15]. В настоящей статье предложена другая схема дифференциации: заявки высокого приоритета принимаются при наличии хотя бы одного свободного места в буфере, а заявки низкого приоритета — лишь тогда, когда общая длина очереди заявок меньше заданного порогового значения. Разработаны методы расчета и оптимизации характеристик этих систем при использовании предложенной схемы дифференциации заявок. Исследованы модели двух типов: в одной из них использована политика постоянного объема запасов (Fixed Order Size, FOS), а в другой — политика переменного объема запасов (Variable Order Size, VOS) [16, 17].

#### ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Склад изучаемой системы имеет ограниченный размер  $S$ ,  $S < \infty$ , и она обслуживает пуассоновские потоки заявок двух типов: интенсивность потока заявок первого типа (обычных) равна  $\lambda_1$ , а второго типа (приоритетных) —  $\lambda_2$ . После обслуживания заявки любого типа она с вероятностью  $\sigma_1 > 0$  не получает запаса и с дополнительной вероятностью  $\sigma_2 = 1 - \sigma_1$  получает его. Если заявка любого типа получает запас, то уровень запасов системы уменьшается на единицу, т.е. размеры заявок идентичны.

Время обслуживания заявок обоих типов зависит от того, получила ли она запас; в обоих случаях эта величина имеет показательную функцию распределения (ф.р.), при этом если заявка не получила запаса, то среднее значение времени обслуживания равно  $\mu_1^{-1}$ , в противном случае оно равно  $\mu_2^{-1}$  (в реальных системах имеет место соотношение  $\mu_1 > \mu_2$ , так как в случае приобретения запаса выполняются определенные процедуры его оформления).

Рассматриваются модели QIS с конечной и бесконечной общей очередью разнотипных заявок. В случае конечной очереди заявки обоих типов ожидают в очереди максимальной длины  $N$ ,  $N < \infty$ . В обоих случаях предполагается, что если в момент поступления заявки уровень запасов положительный, то заявка первого типа принимается лишь тогда, когда в момент ее поступления суммарная длина очереди меньше заданного порогового значения  $r$ ,  $1 \leq r \leq N - 1$ . В модели с бесконечной очередью заявки второго типа не теряются, а в модели с конечной очередью они теряются лишь тогда, когда очередь полностью заполнена.

Если в момент поступления заявки любого типа уровень запасов равен нулю, то она с вероятностью  $\varphi_1$  присоединяется к очереди, а с дополнительной вероятностью  $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$  она уходит из системы необслуженной. Заявки обоих типов являются нетерпеливыми, если во время их ожидания в очереди уровень запасов системы опускается до нулевого значения, т.е. в этом случае заявка каждого типа уходит из системы после случайного времени, которое имеет показательную ф.р. с параметром  $\tau > 0$ .

В качестве FOS используется известная  $(s, S)$ -политика, а в качестве VOS — политика пополнения запасов до  $S$  (up to  $S$ ). При  $(s, S)$ -политике заказ для поставки запасов делается тогда, когда их уровень опускается до величины  $s$ ,  $s < S/2$ , при этом объем заказа равен  $S - s$ . Другая политика определяется так: когда уровень запасов опускается до величины  $m$ ,  $m \leq s$ , делается заказ такого объема, чтобы полностью заполнить склад системы, т.е. величина заказываемого запаса равна  $S - m$ . Эту политику обозначим  $(m, S - m)$ .

В обеих политиках заказы выполняются с некоторыми случайными задержками, которые имеют показательную ф.р. с параметром  $\nu > 0$ .

Задача состоит в нахождении совместного распределения уровня запасов системы и числа заявок в ней, требуется также найти усредненные характеристики системы:  $S_{av}$  — средний уровень запасов,  $RR$  — среднюю интенсивность заказов,  $V_{av}$  — средний объем заказов при использовании  $(m, S - m)$ -политики и  $PB_1, PB_2$  — вероятности потери заявок каждого типа. Кроме того, требуется решить задачу максимизации прибыли системы.

#### ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ИЗУЧАЕМЫХ СИСТЕМ

При использовании обеих ППЗ работа системы с конечной очередью описывается двумерной цепью Маркова (Two Dimensional Markov Chain, 2D MC) с состояниями вида  $(m, n)$ , где  $m$  — уровень запасов системы,  $n$  — общее число заявок в системе. Пространство состояний (ПС) определяется так:

$$E = \{(m, n): m = \overline{0, S}; n = \overline{0, N}\}. \quad (1)$$

Интенсивность перехода от состояния  $(m, n)$  в состояние  $(m', n')$  обозначается  $q((m, n), (m', n'))$ . Совокупность этих величин составляет производящую матрицу (ПМ) данной цепи. Рассмотрим задачу построения ПМ при использовании каждой политики.

Анализируя механизмы принятия заявок, а также схему их обслуживания и поведения в очереди при отсутствии запасов, получаем, что при использовании  $(s, S)$ -политики положительные элементы ПМ данной 2D MC определяются из следующих соотношений (рис. 1):

$$q((m, n), (m', n')) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m > 0, n < r, m' = m, n' = n + 1, \\ \lambda_2, & \text{если } m > 0, n \geq r, m' = m, n' = n + 1, \\ \lambda\varphi_1, & \text{если } m = m' = 0, n' = n + 1, \\ \mu_1\sigma_1, & \text{если } m > 0, m' = m, n' = n - 1, \\ \mu_2\sigma_2, & \text{если } m > 0, m' = m - 1, n' = n - 1, \\ n\tau, & \text{если } m' = m = 0, n' = n - 1, \\ \nu, & \text{если } m \leq s, m' = m + S - s, n' = n. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь и далее  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ .

Из соотношений (2) получаем, что рассматриваемая 2D MC представляет собой квазипроцесс размножения–гибели с зависящими от уровня запасов интенсивностями переходов (Level Dependent Quasi Birth Death, LDQBD) [18, 19].

При использовании  $(m, S - m)$ -политики работа системы также описывается 2D MC в пространстве состояний (1) и элементы ее ПМ определяются аналогично (2). Однако в правой части формулы (2) в последней строке необходимо учитывать, что при  $m < s$  с интенсивностью  $\nu$  осуществляется переход из состояния  $(m, n)$  в состояние  $(S, n)$ .

Из соотношений (2) получаем, что состояния изучаемой конечномерной цепи сообщаются один с другим, т.е. в ней существует стационарный режим. Стационарная вероятность состояния  $(m, n) \in E$  обозначается  $p(m, n)$ . Эти вероятности удовлетворяют систему уравнений равновесия (СУР) размерности  $(S + 1)(N + 1)$ , которая составляется на основе (2) (ввиду очевидности составления явный вид этой СУР не приведен).

Нахождение вероятностей состояний позволяет вычислить усредненные характеристики системы. На основе анализа работы системы легко показать, что при использовании обеих ППЗ имеют место следующие соотношения:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \sum_{n=0}^N p(m, n); \quad (3)$$

$$RR = \mu_2\sigma_2 \sum_{n=1}^N p(s+1, n); \quad (4)$$

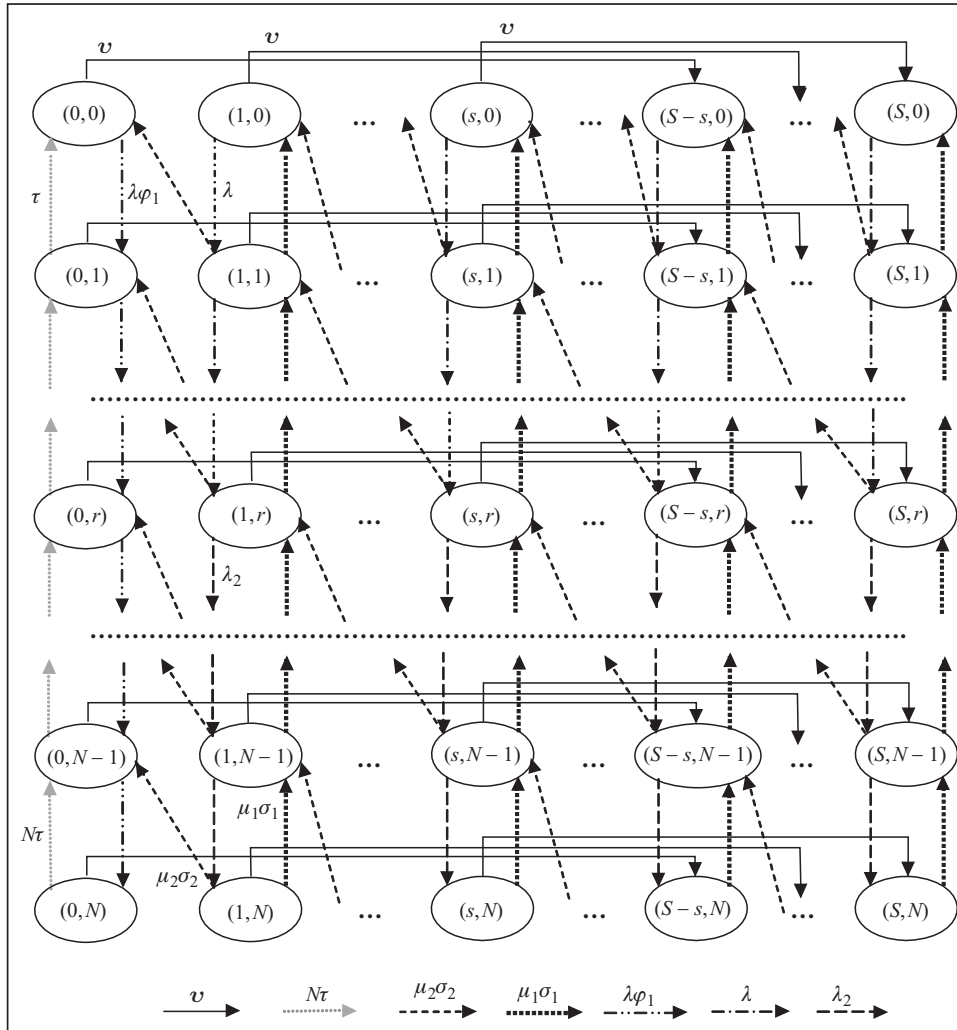


Рис. 1. Граф переходов между состояниями в модели с конечной очередью

$$PB_1 = \sum_{m=1}^S \sum_{n=r}^N p(m, n) + \theta_1 \sum_{n=1}^N p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda\varphi_1 + n\tau}; \quad (5)$$

$$PB_2 = \sum_{m=0}^S p(m, N) + \theta_2 \sum_{n=1}^N p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda\varphi_1 + n\tau}. \quad (6)$$

В формулах (5), (6) и далее параметры  $\theta_1 = \eta_1 / (\eta_1 + \eta_2)$  и  $\theta_2 = 1 - \theta_1$  оценивают вероятность того, что в состояниях типа  $(m, n)$ ,  $n > 0$ , случайно выбранная заявка является заявкой первого и второго типа соответственно,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  обозначают интенсивности принятых в систему заявок первого и второго типа соответственно. В частности, величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  оценивают вероятность того, что заявка, покидающая очередь вследствие нетерпеливости, является заявкой первого и второго типа соответственно. Очевидно, что интенсивность заявок второго типа  $\eta_2 = \lambda_2$ , а поскольку имеется ограничение для заявок первого типа, то величина  $\eta_1$  вычисляется следующим образом:

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^r k \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} + r \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=1}^r \frac{\lambda_1^k}{(k-1)!} + r \left( 1 - e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^r \frac{\lambda_1^k}{k!} \right).$$

Как уже отмечалось, при использовании  $(m, S - m)$ -политики имеется дополнительная характеристика — средний объем заказа  $V_{av}$ . Она определяется так:

$$V_{av} = \sum_{m=S-s}^S m \sum_{n=0}^N p(S - m, n). \quad (7)$$

Для моделей умеренной размерности вычисление вероятностей состояний из соответствующей СУР можно осуществить с помощью численных методов линейной алгебры. Однако эти методы оказываются малоэффективными, иногда даже неприемлемыми для моделей большой размерности. Задача еще больше усложняется для моделей QIS с бесконечной очередью, т.е. когда  $N = \infty$ . Исходя из этого, далее для решения указанной проблемы для моделей большой и бесконечной размерности используются методы фазового укрупнения состояний (Space Merging Method, SMM) [16] и спектрального расширения (Spectral Expansion Method, SEM) [18, 19].

#### МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Вначале рассмотрим SMM для решения данной задачи. Его можно корректно использовать для изучения систем, в которых интенсивность поступления заявок намного превосходит интенсивность пополнения запасов, т.е.  $\lambda \gg \nu$ . Важно отметить, что это условие выполняется в реальных QIS.

Поскольку SMM подробно изложен в [16], вкратце опишем применение этого метода к рассматриваемой системе. Так, имеется следующее расщепление ПС (1):

$$E = \bigcup_{m=0}^S E_m, \quad E_{m_1} \cap E_{m_2} = \emptyset, \quad (8)$$

где  $E_m = \{(m, n) \in E : n = 0, N\}$ ,  $m = 0, S$ .

Далее на основе расщепления (8) в исходном ПС (1) определяется функция укрупнения  $U((m, n)) = \langle m \rangle$ , где  $\langle m \rangle$  — укрупненное состояние, которое объединяет в себе класс состояний  $E_m$ ,  $m = 0, S$ . Обозначим  $\Omega = \{\langle m \rangle : m = 0, S\}$ .

Приближенные значения вероятностей состояний  $\tilde{p}(m, n)$ ,  $(m, n) \in E$ , исходной модели определяются следующим образом:

$$\tilde{p}(m, n) = \rho_m(n) \pi(\langle m \rangle), \quad (9)$$

где  $\rho_m(n)$  — вероятность состояния  $(m, n)$  внутри расщепленной модели с пространством состояний  $E_m$ , а  $\pi(\langle m \rangle)$  — вероятность укрупненного состояния  $\langle m \rangle \in \Omega$ .

Из соотношений (2) получаем, что вероятности состояний внутри расщепленных моделей с ПС  $E_m$ ,  $m = 1, \dots, S$ , совпадают с вероятностями состояний модели  $M / M / 1 / N$  с зависящей от состояния интенсивностью поступления, т.е. последняя равна  $\lambda$ , если число заявок меньше  $r$ , иначе она равна  $\lambda_2$ . Отсюда находим, что искомые величины

$$\rho_m(n) = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu_1 \sigma_1}\right)^n \rho_m(0), & \text{если } 0 \leq n \leq r, \\ \left(\frac{\lambda}{\lambda_2}\right)^r \left(\frac{\lambda_2}{\mu_1 \sigma_1}\right)^n \rho_m(0), & \text{если } r+1 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (10)$$

где  $\rho_m(0)$  находится из условия нормировки, т.е.  $\sum_{n=0}^N \rho_m(n) = 1$ .

**Замечание 1.** Поскольку величины  $\rho_m(n)$  не зависят от индекса  $m$ ,  $m = \overline{1, S}$ , далее он не используется.

Вероятности состояний внутри расщепленной модели с ПС  $E_0$  совпадают с вероятностями состояний классической модели Эрланга  $M / M / N / N$  с нагрузкой  $a = \lambda \varphi_1 / \tau \operatorname{erl}$  (см. (2)), т.е.

$$\rho_0(n) = \frac{a^n}{n!} / \sum_{i=0}^N \frac{a^i}{i!}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

С учетом (2), (10) и (11) после определенных преобразований находим, что интенсивности переходов между укрупненными состояниями вычисляются так:

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \nu, & \text{если } 0 \leq m_1 \leq s, m_2 = m_1 + S - s, \\ \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0)), & \text{если } 1 \leq m_1 \leq S, m_2 = m_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (12)$$

Тогда используя результаты работы [16], из соотношений (12) удается выразить все вероятности укрупненных состояний через вероятность  $\pi(\langle s+1 \rangle)$  следующим образом:

$$\pi(\langle m \rangle) = \begin{cases} \alpha_m \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } 0 \leq m \leq s, \\ \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } s+1 \leq m \leq S-s, \\ \beta_m \pi(\langle s+1 \rangle), & \text{если } S-s+1 \leq m \leq S, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } \alpha_m = \left( \frac{\mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0))}{\nu + \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0))} \right)^{s-m+1}; \quad \beta_m = \frac{\nu}{\mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0))} \sum_{i=m-S+s}^s \alpha_i.$$

Вероятность  $\pi(\langle s+1 \rangle)$  находится из условия нормировки  $\sum_{m=0}^S \pi(\langle m \rangle) = 1$ ,

$$\text{т.е. } \pi(\langle s+1 \rangle) = \left( S - 2s + \sum_{m=0}^s \alpha_m + \sum_{m=S-s+1}^S \beta_m \right)^{-1}.$$

С учетом соотношений (10)–(13) из (9) находятся приближенные значения вероятностей состояний  $\tilde{p}(m, n)$ ,  $(m, n) \in E$ . Далее после определенных преобразований из (3)–(6) получаем формулы для приближенного расчета характеристик изучаемой системы:

$$S_{av} \approx \sum_{m=1}^S m \pi(\langle m \rangle); \quad (14)$$

$$RR \approx \mu_2 \sigma_2 \pi(\langle s+1 \rangle) (1 - \rho(0)); \quad (15)$$

$$PB_1 \approx (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \sum_{n=r}^N \rho(n) + \pi(\langle 0 \rangle) \left( \rho_0(N) + \theta_1 \sum_{n=1}^N \rho_0(n) \frac{n\tau}{\lambda\varphi_1 + n\tau} \right); \quad (16)$$

$$PB_2 \approx (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \rho(N) + \pi(\langle 0 \rangle) \left( \rho_0(N) + \theta_2 \sum_{n=1}^N \rho_0(n) \frac{n\tau}{\lambda\varphi_1 + n\tau} \right). \quad (17)$$

Описанный метод можно использовать и для изучения модели, в которой применяется политика пополнения запасов VOS. В этой модели вероятности состояний внутри всех расщепленных моделей с ПС  $E_m$ ,  $m = 1, S$ , и  $E_0$  также вычисляются по формулам (10) и (11) соответственно. Отличие состоит в определении интенсивностей переходов между укрупненными состояниями. Эти величины вычисляются так:

$$q(\langle m_1 \rangle, \langle m_2 \rangle) = \begin{cases} \nu, & \text{если } 0 \leq m_1 \leq s, m_2 = S, \\ \mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0)), & \text{если } 1 \leq m_1 \leq S, m_2 = m_1 - 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда имеем, что вероятности укрупненных состояний

$$\pi(\langle m \rangle) = \begin{cases} \gamma_m \pi(\langle 0 \rangle), & \text{если } 0 \leq m \leq s+1, \\ \eta \pi(\langle 0 \rangle), & \text{если } s+1 < m \leq S, \end{cases} \quad (18)$$

$$\text{где } \gamma_m = \left( \frac{\nu}{\mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0))} \right)^m; \quad \eta = \left( \frac{\nu}{\mu_2 \sigma_2 (1 - \rho(0))} \right)^{s+1}; \quad \pi(\langle 0 \rangle) = \left( \sum_{m=0}^{s+1} \gamma_m + (S - s - 1) \eta \right)^{-1}.$$



Далее с учетом (10), (11) и (18) из (14)–(17) вычисляются приближенные значения характеристик (3)–(6), а для вычисления приближенного значения характеристики (7) получим следующую формулу:

$$V_{av} \approx \sum_{m=0}^s (S-m)\pi(\langle m \rangle). \quad (19)$$

Рассмотрим модель с бесконечной общей очередью разнотипных заявок, т.е. предположим, что  $N = \infty$ . Для обеих ППЗ вероятности состояний внутри расщепленных моделей с ПС  $E_m$ ,  $m = \overline{1, S}$ , вычисляются аналогично (10), но в правой части указанной формулы во второй строке условие  $r+1 \leq n \leq N$  заменяется условием  $n > r$ . Тогда искомая вероятность  $\rho(0)$  определяется так:

$$\rho(0) = \left( \sum_{n=0}^r \left( \frac{\lambda}{\mu_1 \sigma_1} \right)^n + \left( \frac{\lambda}{\mu_1 \sigma_1} \right)^r \frac{\lambda_2}{\mu_1 \sigma_1 - \lambda_2} \right)^{-1}. \quad (20)$$

Здесь предполагается, что выполняется условие эргодичности модели, т.е.  $\lambda_2 < \mu_1 \sigma_1$ .

Вероятности состояний внутри расщепленной модели с ПС  $E_0$  совпадают с вероятностями состояний модели Эрланга  $M / M / \infty$  с нагрузкой  $a = \lambda \varphi_1 / \tau \text{erl}$ , т.е.

$$\rho_0(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (21)$$

Далее с учетом формул (20) и (21) вероятности укрупненных состояний  $\pi(\langle m \rangle)$ ,  $m = 0, S$ , для  $(s, S)$ -политики вычисляются из соотношений (13), а для  $(m, S-m)$ -политики — из соотношений (18).

Средний уровень запасов и средняя интенсивность заказов при использовании  $(s, S)$ -политики, а также средний объем заказов при использовании  $(m, S-m)$ -политики вычисляются с помощью соотношений (14), (15) и (19) соответственно. Вероятности потери разнотипных заявок для данной модели вычисляются следующим образом:

$$PB_1 \approx (1 - \pi(\langle 0 \rangle)) \left( 1 - \sum_{n=0}^{r-1} \rho(n) \right) + \theta_1 \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(n) \frac{n\tau}{\lambda \varphi_1 + n\tau}; \quad (22)$$

$$PB_2 \approx \theta_2 \pi(\langle 0 \rangle) \sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(n) \frac{n\tau}{\lambda \varphi_1 + n\tau}. \quad (23)$$

**Замечание 2.** В формулы (22) и (23) входит бесконечный ряд, для которого не удастся найти явную формулу для вычисления его суммы. Этот ряд сходится, так как соответствующий мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_0(n)$  сходится. Поэтому при примене-

нии этих формул используется следующий подход: верхняя граница суммы заменяется большой величиной, далее она постепенно увеличивается, и эта процедура продолжается до тех пор, пока значение суммы практически перестает изменяться.

Теперь рассмотрим применение метода спектрального расширения (SEM) [18, 19]. Его можно использовать для расчета моделей QIS, в которых интенсивность потери заявок из очереди вследствие их нетерпеливости не зависит от состояния системы. Примем следующее допущение: интенсивность потери заявок в состояниях типа  $(0, n)$  равна  $n\tau$ , если  $n \leq M$ , а при  $n > M$  эта величина равна  $M\tau$ , где  $M$  — достаточно большая (постоянная) величина. Предполагается, что  $M \gg r$ . Отметим, что это допущение необходимо для получения квазипроцесса размножения–гибели с независимыми от уровня интенсивностями переходов (Level Independent Quasi Birth Death, LIQBD), так как этот метод можно применять именно для изучения этого класса QBD.

**Замечание 3.** В SMM при использовании данного допущения все формулы не изменяются, лишь вероятности состояний внутри расщепленной модели с ПС

$E_0$  определяются так:

$$\rho_0(n) = \begin{cases} \frac{a^n}{n!} \rho_0(0), & \text{если } 0 \leq n \leq M, \\ \frac{M^M}{M!} \left(\frac{a}{M}\right)^n \rho_0(0), & \text{если } n \geq M+1, \end{cases}$$

где  $\rho_0(0) = \left( \sum_{n=0}^M \frac{a^n}{n!} + \frac{a^{M+1}}{M!} \frac{1}{M-a} \right)^{-1}$ . Здесь предполагается, что выполняется

условие эргодичности модели, т.е.  $a < M$ .

Для краткости изложения применение SEM опишем лишь для модели с бесконечной очередью при использовании  $(s, S)$ -политики пополнения запасов.

Для каждого  $n = 0, 1, 2, \dots$  определяются следующие матрицы размера  $(S+1) \times (S+1)$ :

— матрицы боковых (или горизонтальных) переходов (lateral or horizontal transitions)  $A_n$ , элементы которых определяют интенсивности переходов типа  $(m, n) \rightarrow (m', n)$  (см. рис. 1)

$$A_n(m, m') = \begin{cases} \nu, & \text{если } m \leq s, m' = m + S - s, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

— матрицы восходящих переходов (upward transitions)  $B_n$ , элементы которых определяют интенсивности переходов типа  $(m, n) \rightarrow (m', n+1)$  (см. рис. 1)

$$B_n(m, m') = \begin{cases} \lambda, & \text{если } m > 0, n < r, m' = m, \\ \lambda_2, & \text{если } m > 0, n \geq r, m' = m, \\ \lambda \varphi_q, & \text{если } m = m' = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

— матрицы нисходящих переходов (downward transitions)  $C_n$ , элементы которых определяют интенсивности переходов типа  $(m, n) \rightarrow (m', n-1)$  (см. рис. 1)

$$C_n(m, m') = \begin{cases} \mu_1 \sigma_1, & \text{если } m > 0, m' = m, \\ \mu_2 \sigma_2, & \text{если } m > 0, m' = m - 1, \\ n\tau, & \text{если } m = m' = 0, n < M, \\ M\tau, & \text{если } m = m' = 0, n \geq M, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что  $A_n(m, m') = A$  для любого  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $B_n(m, m') = B$  при  $n \geq M-1$  и  $C_n(m, m') = C$  при  $n \geq M$ .

Определяются также диагональные матрицы  $D_n^A$ ,  $D_n^B$  и  $D_n^C$  размера  $(S+1) \times (S+1)$ , в которых элементы главной диагонали  $(m, m)$ ,  $m = 0, 1, \dots, S$ , определяются так:

$$D_n^A(m, m) = \sum_{k=0}^S A_n(m, k); \quad D_n^B(m, m) = \sum_{k=0}^S B_n(m, k); \quad D_n^C(m, m) = \sum_{k=0}^S C_n(m, k).$$

Аналогично строятся матрицы  $D^A$ ,  $D^B$  и  $D^C$  размера  $(S+1) \times (S+1)$ .

Вводятся векторы-строки  $\mathbf{v}_n = (p(0, n), p(1, n), \dots, p(S, n))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Тогда с учетом определенных ранее матриц получаем, что СУР для вероятностей состояний можно представить в матричном виде для случая  $0 \leq n < M$

$$\mathbf{v}_n (D_n^A + D_n^B + D_n^C) = \mathbf{v}_{n-1} B_{n-1} + \mathbf{v}_n A_n + \mathbf{v}_{n+1} C_{n+1} \quad (24)$$

и для случая  $n \geq M$

$$\mathbf{v}_n (D^A + D^B + D^C) = \mathbf{v}_{n-1} B + \mathbf{v}_n A + \mathbf{v}_{n+1} C'. \quad (25)$$



В уравнениях (24) считается, что  $v_{-1} = \mathbf{0}$ . К уравнениям (24) и (25) добавляется условие нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n e = 1, \quad (26)$$

где  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$  является вектором-столбцом размерности  $S + 1$ .

Из (25) получаем векторно-разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (матрицами)

$$v_n Q_0 + v_{n+1} Q_1 + v_{n+2} Q_2 = 0, \quad n \geq M - 1, \quad (27)$$

где  $Q_0 = B$ ,  $Q_1 = A - D^A - D^B - D^C$ ,  $Q_2 = C$ . Здесь учитывается, что матрицы  $Q_0$  и  $Q_2$  имеют полный ранг и существуют их обратные матрицы.

На основе (27) составляется характеристическая матрица-полином второго порядка

$$Q(\eta) = Q_0 + Q_1 \eta + Q_2 \eta^2. \quad (28)$$

Согласно SEM [18, 19] полагаем, что вектор-строку  $v_n$ ,  $n = M - 1, M, \dots$ , можно представить:

$$v_n = \sum_{k=0}^S a_k \psi_k \eta_k^{n-M+1} \quad (29)$$

или в скалярной форме для вероятностей состояний

$$p(m, n) = \sum_{k=0}^S a_k \psi_k(m) \eta_k^{n-M+1}, \quad (30)$$

где  $\eta_k$  и  $\psi_k$  — соответственно собственные значения и собственные векторы матрицы  $Q(\eta)$ . Предполагается, что  $|\eta_k| < 1$  и  $a_k$  — неизвестные величины.

С помощью (29), (30) неизвестные  $v_n$ ,  $n < M - 1$ , с использованием (24) рекурсивно выражаются в терминах  $a_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, S$ , и решается система  $S + 1$  линейных уравнений (24), (26). Нахождением неизвестных  $a_k$  завершается процесс вычисления всех вероятностей состояний изучаемой системы.

После выполнения определенных преобразований находим следующие формулы для вычисления характеристик системы:

$$S_{av} = \sum_{m=1}^S m \left( \sum_{n=0}^{M-2} p(m, n) + \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(m)}{1 - \eta_k} \right); \quad (31)$$

$$RR = \mu_2 \sigma_2 \left( \sum_{n=0}^{M-2} p(s+1, n) + \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(s+1)}{1 - \eta_k} \right); \quad (32)$$

$$PB_1 = \sum_{m=1}^S \left( \sum_{n=r}^{M-2} p(m, n) + \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(m)}{1 - \eta_k} \right) + \Theta \theta_1; \quad (33)$$

$$PB_2 = \sum_{m=0}^S p(m, N) + \Theta \theta_2. \quad (34)$$

В формулах (33) и (34) используется обозначение

$$\Theta = \sum_{n=0}^{M-1} p(0, n) \frac{n\tau}{\lambda\varphi_1 + n\tau} + \frac{M\tau}{\lambda\varphi_1 + M\tau} \sum_{k=0}^S \frac{a_k \psi_k(0)}{1 - \eta_k} - p(0, M - 1) \frac{M\tau}{\lambda\varphi_1 + M\tau}.$$

#### ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разработанные алгоритмы позволяют вычислить точные и приближенные значения вероятностей состояний и характеристик системы при использовании обеих ППЗ. Проведенные вычислительные эксперименты показали, что точность разработанных приближенных алгоритмов расчета вероятностей состоя-

**Таблица 1.** Оценка точности вычисления вероятностей состояний относительно различных норм подобия для  $(s, S)$ - и  $(m, S - m)$ -политик пополнения запасов в модели с ограниченной очередью

$(s, S)$ -политика					$(m, S - m)$ -политика				
$\mu_1 = 50, \mu_2 = 5, \sigma_1 = 0.3, \varphi_1 = 0.4, \nu = 3, \tau = 1$					$\mu_1 = 55, \mu_2 = 4, \sigma_1 = 0.3, \varphi_1 = 0.4, \nu = 3, \tau = 2$				
$(S, N)$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, r)$	Значения норм подобия		$(S, N)$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, r)$	Значения норм подобия	
			(36)	(35)				(36)	(35)
(30, 50)	(45, 4)	(1, 20)	0.993869	0.002948	(30, 50)	(50, 4)	(1, 20)	0.986247	0.007842
	(50, 5)	(6, 30)	0.995162	0.001437		(55, 5)	(5, 30)	0.969910	0.008854
	(55, 6)	(12, 45)	0.994368	0.001926		(60, 6)	(10, 45)	0.944990	0.011450
(30, 60)	(45, 4)	(1, 35)	0.992940	0.003950	(30, 60)	(50, 4)	(1, 35)	0.982799	0.009373
	(50, 5)	(6, 45)	0.995158	0.001464		(55, 5)	(5, 45)	0.965743	0.010987
	(55, 6)	(12, 55)	0.994368	0.001926		(60, 6)	(10, 55)	0.941539	0.012747
(30, 70)	(45, 4)	(1, 40)	0.992788	0.004465	(30, 70)	(50, 4)	(1, 40)	0.981439	0.010279
	(50, 5)	(6, 50)	0.995158	0.001470		(55, 5)	(5, 50)	0.964206	0.011676
	(55, 6)	(12, 65)	0.994368	0.001926		(60, 6)	(10, 65)	0.937918	0.013774
(40, 50)	(45, 4)	(5, 20)	0.995300	0.000943	(35, 50)	(50, 4)	(2, 20)	0.984786	0.006992
	(50, 5)	(10, 30)	0.995171	0.001129		(55, 5)	(7, 30)	0.966998	0.008127
	(55, 6)	(19, 45)	0.994358	0.001651		(60, 6)	(12, 45)	0.943591	0.009947
(40, 60)	(45, 4)	(5, 35)	0.995286	0.000984	(35, 60)	(50, 4)	(2, 35)	0.981718	0.008195
	(50, 5)	(10, 45)	0.995171	0.001131		(55, 5)	(7, 45)	0.963242	0.009713
	(55, 6)	(19, 55)	0.994358	0.001651		(60, 6)	(12, 55)	0.940596	0.011063
(40, 70)	(45, 4)	(5, 40)	0.995284	0.000994	(35, 70)	(50, 4)	(2, 40)	0.980507	0.008975
	(50, 5)	(10, 50)	0.995171	0.001131		(55, 5)	(7, 50)	0.961859	0.010306
	(55, 6)	(19, 65)	0.994358	0.001651		(60, 6)	(12, 65)	0.937455	0.011948
(50, 50)	(45, 4)	(5, 20)	0.995301	0.000733	(40, 50)	(50, 4)	(3, 20)	0.983665	0.006366
	(50, 5)	(15, 30)	0.995167	0.000966		(55, 5)	(8, 30)	0.967591	0.007414
	(55, 6)	(20, 45)	0.994339	0.001156		(60, 6)	(15, 45)	0.936781	0.009111
(50, 60)	(45, 4)	(5, 35)	0.995290	0.000765	(40, 60)	(50, 4)	(3, 35)	0.980912	0.007279
	(50, 5)	(15, 45)	0.995167	0.000966		(55, 5)	(8, 45)	0.964324	0.008489
	(55, 6)	(20, 55)	0.994339	0.001156		(60, 6)	(15, 55)	0.934013	0.010091
(50, 70)	(45, 4)	(5, 40)	0.995288	0.000772	(40, 70)	(50, 4)	(3, 40)	0.979823	0.007965
	(50, 5)	(15, 50)	0.995167	0.000966		(55, 5)	(8, 50)	0.963120	0.009009
	(55, 6)	(20, 65)	0.994339	0.001156		(60, 6)	(15, 65)	0.931114	0.010867

ний и характеристик системы оказывается достаточно высокой, при этом по времени выполнения приближенные алгоритмы существенно превосходят их точные аналоги. Точность приближенных алгоритмов оценивается с помощью двух норм близости: максимума разностей

$$\|N\|_1 = \max_{n \in E} |p(n) - \tilde{p}(n)| \quad (35)$$

и подобия косинуса [20]

$$\|N\|_2 = \frac{\sum_{n \in E} p(n)\tilde{p}(n)}{\left(\sum_{n \in E} (p(n))^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n \in E} (\tilde{p}(n))^2\right)^{1/2}}. \quad (36)$$

Результаты небольшой части численных экспериментов, в которых оценивалась точность вычисления вероятностей состояний для  $(s, S)$ - и  $(m, S - m)$ -политик, показаны в табл. 1. Здесь точные значения вероятностей состояний вычислены с использованием соответствующей СУР, так как размерность системы позволяет решить эти уравнения. Из табл. 1 видно, что значения нормы (36) почти равны едини-

**Таблица 2.** Оценка точности вычисления характеристик для  $(s, S)$ -политики пополнения запасов в модели с ограниченной очередью ( $\mu_1 = 50, \mu_2 = 5, \sigma_1 = 0.3, \varphi_1 = 0.4, \nu = 3, \tau = 1$ )

$(S, N)$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, r)$	$S_{av}$		$RR$		$PB_1$		$PB_2$	
			EV	AV	EV	AV	EV	AV	EV	AV
(30, 50)	(45, 4)	(1, 20)	15.13371	15.30848	3.53375	3.53414	0.67161	0.75213	0.00956	0.00405
	(50, 5)	(6, 30)	17.34122	17.35228	3.54162	3.54164	0.72953	0.79979	0.00061	0.00023
	(55, 6)	(12, 45)	20.33324	20.33367	3.55555	3.55555	0.77250	0.83579	0.00190	0.00516
(30, 60)	(45, 4)	(1, 35)	15.13371	15.30848	3.53375	3.53414	0.66926	0.75244	0.01251	0.00436
	(50, 5)	(6, 45)	17.34122	17.35228	3.54162	3.54164	0.72938	0.79980	0.00073	0.00024
	(55, 6)	(12, 55)	20.33324	20.33367	3.55555	3.55555	0.77250	0.83579	0.00190	0.00516
(30, 70)	(45, 4)	(1, 40)	15.13371	15.30848	3.53375	3.53414	0.66814	0.75249	0.01316	0.00441
	(50, 5)	(6, 50)	17.34122	17.35228	3.54162	3.54164	0.72932	0.79981	0.00076	0.00024
	(55, 6)	(12, 65)	20.33324	20.33367	3.55555	3.55555	0.77249	0.83579	0.00190	0.00516
(40, 50)	(45, 4)	(5, 20)	21.85317	21.87091	3.52853	3.52855	0.67734	0.75531	0.00068	0.00029
	(50, 5)	(10, 30)	24.33378	24.33483	3.53333	3.53333	0.72997	0.79999	0.00004	0.00002
	(55, 6)	(19, 45)	28.83333	28.83334	3.54762	3.54762	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516
(40, 60)	(45, 4)	(5, 35)	21.85317	21.87091	3.52853	3.52855	0.67717	0.75534	0.00089	0.00031
	(50, 5)	(10, 45)	24.33378	24.33483	3.53333	3.53333	0.72996	0.79999	0.00005	0.00002
	(55, 6)	(19, 55)	28.83333	28.83334	3.54762	3.54762	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516
(40, 70)	(45, 4)	(5, 40)	21.85317	21.87091	3.52853	3.52855	0.67709	0.75534	0.00093	0.00031
	(50, 5)	(10, 50)	24.33378	24.33483	3.53333	3.53333	0.72995	0.79999	0.00005	0.00002
	(55, 6)	(19, 65)	28.83333	28.83334	3.54762	3.54762	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516
(50, 50)	(45, 4)	(5, 20)	26.85463	26.87159	3.52220	3.52221	0.67744	0.75537	0.00053	0.00022
	(50, 5)	(15, 30)	31.83334	31.83340	3.52857	3.52857	0.73000	0.80000	0.00000	0.00000
	(55, 6)	(20, 45)	34.33333	34.33334	3.53333	3.53333	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516
(50, 60)	(45, 4)	(5, 35)	26.85463	26.87159	3.52220	3.52221	0.67731	0.75539	0.00069	0.00024
	(50, 5)	(15, 45)	31.83334	31.83340	3.52857	3.52857	0.73000	0.80000	0.00000	0.00000
	(55, 6)	(20, 55)	34.33333	34.33334	3.53333	3.53333	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516
(50, 70)	(45, 4)	(5, 40)	26.85463	26.87159	3.52220	3.52221	0.67725	0.75539	0.00073	0.00024
	(50, 5)	(15, 50)	31.83334	31.83340	3.52857	3.52857	0.73000	0.80000	0.00000	0.00000
	(55, 6)	(20, 65)	34.33333	34.33334	3.53333	3.53333	0.77252	0.83580	0.00188	0.00516

це и значения нормы (35) также являются вполне приемлемыми для практических приложений. Численные эксперименты выполнялись на персональном компьютере с четырёхъядерным процессором Core i7 2.40 ГГц с оперативной памятью 8 Гб, при этом процессорное время выполнения приближенных алгоритмов почти равно нулю, в то время как соответствующий показатель для точных алгоритмов составляет несколько часов для моделей большой и сверхбольшой размерности.

Наряду с вычислением вероятностей состояний проведен также анализ точности вычисления характеристик системы. Соответствующие значения для различных политик пополнения запасов приведены в табл. 2 и 3, в которых EV — точные значения, а AV — приближенные значения соответствующих характеристик. Из этих таблиц видно, что при вычислении характеристик системы высока точность разработанных приближенных алгоритмов. Отметим, что идеальное сходство наблюдается для характеристик  $S_{av}$  и  $RR$ , т.е. характеристик, оценивающих работу части «управление запасами», небольшие отклонения имеют место для характеристик  $PB_1$  и  $PB_2$ , оценивающих работу части «система обслуживания».

Характеристики системы зависят от многих нагрузочных и структурных параметров системы, а также от параметров используемых схем дифференциации заявок и политик пополнения запасов. Поэтому изучение их зависимости от всех параметров в рамках одного численного эксперимента невозможно. Вместе с тем разработанные алгоритмы приближенного расчета искомых характеристик позво-

**Таблица 3.** Оценка точности вычисления характеристик для  $(m, S - m)$ -политики пополнения запасов в модели с ограниченной очередью ( $\mu_1 = 55$ ,  $\mu_2 = 4$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = 0.4$ ,  $\nu = 3$ ,  $\tau = 2$ )

$(S, N)$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, r)$	$S_{av}$		$RR$		$PB_1$		$PB_2$	
			EV	AV	EV	AV	EV	AV	EV	AV
(30, 50)	(50, 4)	(1, 20)	15.032	15.687	2.832	2.819	0.681	0.744	0.016	0.007
	(55, 5)	(5, 30)	15.032	16.512	2.832	2.823	0.722	0.785	0.018	0.006
	(60, 6)	(10, 45)	15.032	17.463	2.832	2.829	0.754	0.819	0.021	0.009
(30, 60)	(50, 4)	(1, 35)	15.032	15.687	2.832	2.819	0.674	0.745	0.020	0.007
	(55, 5)	(5, 45)	15.032	16.512	2.832	2.823	0.715	0.786	0.020	0.007
	(60, 6)	(10, 55)	15.032	17.463	2.832	2.829	0.749	0.820	0.022	0.009
(30, 70)	(50, 4)	(1, 40)	15.032	15.687	2.832	2.819	0.671	0.745	0.020	0.007
	(55, 5)	(5, 50)	15.032	16.512	2.832	2.823	0.712	0.786	0.021	0.007
	(60, 6)	(10, 65)	15.032	17.463	2.832	2.829	0.744	0.820	0.023	0.009
(35, 50)	(50, 4)	(2, 20)	17.532	18.411	2.828	2.817	0.683	0.745	0.014	0.006
	(55, 5)	(7, 30)	17.532	19.447	2.828	2.821	0.725	0.786	0.015	0.005
	(60, 6)	(12, 45)	17.532	20.454	2.828	2.826	0.757	0.821	0.018	0.008
(35, 60)	(50, 4)	(2, 35)	17.532	18.411	2.828	2.817	0.677	0.746	0.017	0.006
	(55, 5)	(7, 45)	17.532	19.447	2.828	2.821	0.719	0.787	0.018	0.005
	(60, 6)	(12, 55)	17.532	20.454	2.828	2.826	0.753	0.821	0.019	0.008
(35, 70)	(50, 4)	(2, 40)	17.532	18.411	2.828	2.817	0.675	0.746	0.018	0.006
	(55, 5)	(7, 50)	17.532	19.447	2.828	2.821	0.716	0.787	0.018	0.005
	(60, 6)	(12, 65)	17.532	20.454	2.828	2.826	0.748	0.821	0.020	0.008
(40, 50)	(50, 4)	(3, 20)	20.033	21.135	2.824	2.815	0.684	0.746	0.012	0.005
	(55, 5)	(8, 30)	20.033	22.192	2.824	2.819	0.727	0.787	0.013	0.004
	(60, 6)	(15, 45)	20.033	23.697	2.824	2.825	0.760	0.821	0.016	0.007
(40, 60)	(50, 4)	(3, 35)	20.033	21.135	2.824	2.815	0.679	0.746	0.015	0.005
	(55, 5)	(8, 45)	20.033	22.192	2.824	2.819	0.721	0.787	0.015	0.004
	(60, 6)	(15, 55)	20.033	23.697	2.824	2.825	0.756	0.822	0.017	0.007
(40, 70)	(50, 4)	(3, 40)	20.033	21.135	2.824	2.815	0.677	0.746	0.015	0.005
	(55, 5)	(8, 50)	20.033	22.192	2.824	2.819	0.719	0.787	0.016	0.004
	(60, 6)	(15, 65)	20.033	23.697	2.824	2.825	0.752	0.822	0.018	0.007

ляют осуществить анализ всех желаемых зависимостей. Ввиду ограниченного объема статьи приводятся лишь графики, показывающие поведение характеристик системы относительно изменения параметров  $s$  и  $r$ .

Результаты численных экспериментов для модели с ограниченной очередью показаны на рис. 2 и 3.

На рис. 2 показаны зависимости характеристик системы от значения точки заказа  $s$  при использовании  $(s, S)$ -политики пополнения запасов. Увеличение значения параметра  $r$  приводит к уменьшению вероятности потери заявок низкого приоритета (см. рис. 2, *a*), при этом увеличивается вероятность потери заявок высокого приоритета (см. рис. 2, *b*). Этого следовало ожидать, так как с ростом значения параметра  $r$  уменьшаются шансы быть принятыми в очередь для заявок низкого приоритета, и следовательно, эти шансы увеличиваются для заявок высокого приоритета. Увеличение вероятности потери заявок низкого приоритета и уменьшение вероятности потери заявок высокого приоритета относительно роста параметра  $s$  (см. рис. 2, *a, б*) объясняются тем, что для выбранных исходных данных средний уровень запасов (см. рис. 2, *г*) — возрастающая функция (его минимальное значение не меньше 14), т.е. вероятности состояний типа  $(0, n) \in E$  являются очень малыми величинами, и поэтому указанные характеристики главным образом определяются первыми слагаемыми в формулах (5) и (6) соответственно. Поскольку нагрузка потока заявок низкого приоритета достаточно вы-

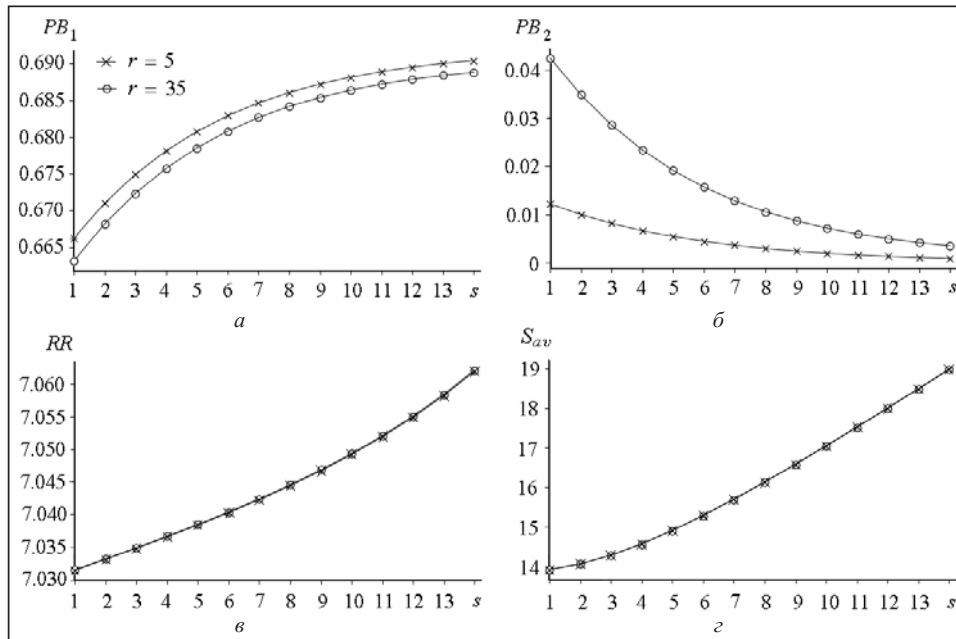


Рис. 2. Зависимости характеристик  $PB_1$  (а),  $PB_2$  (б),  $RR$  (в) и  $S_{av}$  (г) от параметра  $s$  в модели с ограниченной очередью при использовании  $(s, S)$ -политики пополнения запасов ( $S = 30$ ,  $N = 40$ ,  $\lambda_1 = 55$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_1 = 50$ ,  $\mu_2 = 10$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = 0.4$ ,  $\nu = 2$ ,  $\tau = 1$ )

сока, вероятности состояний типа  $(m, n) \in E$ ,  $n > r$ , также растут, и поэтому график функции  $PB_1$  имеет вид, показанный на рис. 2, а; по тем же причинам график функции  $PB_2$  имеет вид, показанный на рис. 2, б. Отметим, что, несмотря на то, что интенсивность заказов и средний уровень запасов зависят от параметра  $r$  (см. формулы (10), (13)–(15)), для выбранных исходных данных этот параметр мало влияет на значения этих характеристик, в результате чего их графики почти совпадают при различных значениях указанного параметра (см. рис. 2, в, г).

Зависимости характеристик системы от значения точки заказа  $s$  при использовании  $(m, S - m)$ -политики пополнения запасов показаны на рис. 3. Отметим, что в отличие от  $(s, S)$ -политики для  $(m, S - m)$ -политики все характеристики (3)–(6) постоянные относительно изменения параметра  $s$  (см. рис. 3, а–г); только характеристика (7) является возрастающей относительно изменения указанного параметра (см. рис. 3, д). При этом величина параметра  $r$  не влияет на вероятность потери заявок низкого приоритета, т.е. ее значение приблизительно равно 0.665, что соответствует минимальному значению этой характеристики при использовании  $(s, S)$ -политики (значения исходных данных почти одинаковые); здесь вероятности потери заявок высокого приоритета очень мало отличаются от их соответствующих значений при использовании  $(s, S)$ -политики, при этом на значения этой величины существенно влияет параметр  $r$  (см. рис. 3, а, б). Для  $(m, S - m)$ -политики значение интенсивности заказов почти в два раза меньше, чем при использовании  $(s, S)$ -политики (см. рис. 3, в), а средний уровень запасов равен минимальному значению этой характеристики при использовании  $(s, S)$ -политики (см. рис. 3, г). Средний объем заказа для  $(m, S - m)$ -политики растет почти линейно относительно параметра  $s$ , при этом его значение почти не зависит от параметра  $r$ .

Теперь рассмотрим результаты численных экспериментов для модели с неограниченной очередью, при этом для нахождения точных значений вероятностей состояний используется SEM, т.е. характеристики системы вычисляются из (31)–(34). Соответствующие результаты, подтверждающие высокую точность разработанных приближенных формул расчета характеристик системы для  $(s, S)$ -политики, показаны в табл. 4 (аналогичные результаты получены и для  $(m, S - m)$ -политики, однако ввиду ограниченного объема статьи они не приводятся). Как и для модели с ограниченной очередью (см. табл. 2 и 3), идеальное сходство также наблюдается для характеристик, оценивающих работу части

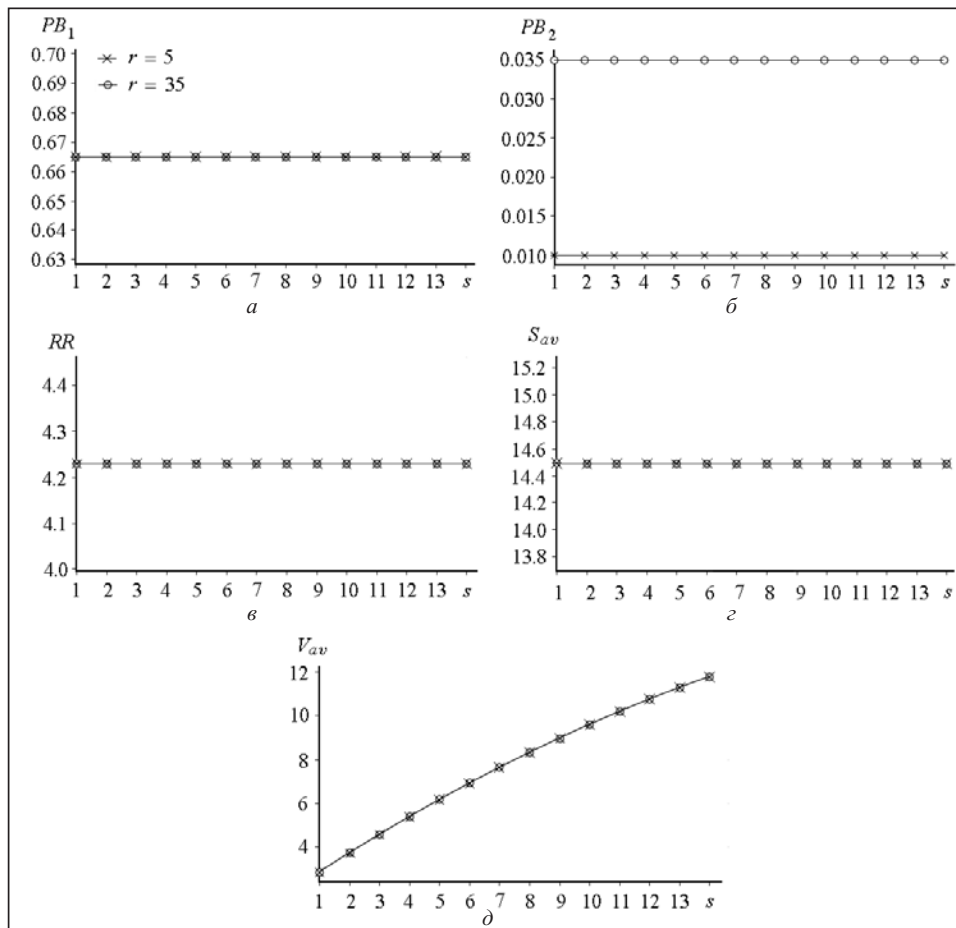


Рис. 3. Зависимости характеристик  $PB_1$  (а),  $PB_2$  (б),  $RR$  (в),  $S_{av}$  (г) и  $V_{av}$  (д) от параметра  $s$  в модели с ограниченной очередью при использовании  $(m, S - m)$ -политики пополнения запасов ( $S = 30$ ,  $N = 40$ ,  $\lambda_1 = 55$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_1 = 60$ ,  $\mu_2 = 6$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = 0.4$ ,  $\nu = 2$ ,  $\tau = 1$ )

«управление запасами», и небольшие отклонения имеют место для характеристик  $PB_1$  и  $PB_2$ , оценивающие работу части «системы обслуживания».

Вид зависимостей характеристик системы с неограниченной очередью относительно изменения параметров  $s$  и  $r$  при  $(s, S)$ - и  $(m, S - m)$ -политиках показаны на рис. 4 и 5 соответственно. Прежде всего отметим, что снятие ограничения на длину очереди заявок существенно влияет на характер изменения изучаемых величин. Так, из рис. 4, а видно, что в отличие от модели с ограниченной очередью (см. рис. 2, а) вид зависимостей функции  $PB_1$  при различных значениях параметра  $r$  отличается, т.е. при  $r = 5$  она убывает, а при  $r = 25$  наоборот возрастает; при этом, как и следовало ожидать, значения этой функции при  $r = 25$  оказываются меньше, чем ее соответствующие значения при  $r = 5$ . Виды кривых для функции  $PB_2$  полностью соответствуют модели с ограниченной очередью (см. рис. 2, б), хотя абсолютные значения в различных моделях отличаются почти на порядок (см. рис. 4, б). Несколько неожиданным является расположение кривых для функции  $PB_2$  при различных значениях параметра  $r$ , т.е. значения этой функции при  $r = 25$  оказываются меньше, чем ее соответствующие значения при  $r = 5$ . Вместе с тем с ростом параметра  $s$  влияние значения параметра  $r$  на значения функции  $PB_2$  исчезает (см. рис. 4, б). Полное соответствие имеет место для графиков функций  $RR$  и  $S_{av}$  в моделях с ограниченной и неограниченной очередями, при этом почти совпадают абсолютные значения функции  $S_{av}$  в различных моделях (см. рис. 2, г и рис. 4, г). Но абсолютные значения функции  $RR$  в модели с неограниченной очередью почти в 20 раз меньше, чем ее соответствующие значения в модели с ограниченной очередью (см. рис. 2, в и рис. 4, в).



**Таблица 4.** Оценка точности вычисления характеристик для  $(s, S)$ -политики пополнения запасов в модели с неограниченной очередью ( $\mu_1 = 60, \mu_2 = 5, \sigma_1 = 0.3, \varphi_1 = 0.3, \nu = 4, \tau = 3$ )

$S$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, r)$	$S_{av}$		$RR$		$PB_1$		$PB_2$	
			EV	AV	EV	AV	EV	AV	EV	AV
30	(55, 5)	(1, 15)	15.317698	15.417554	0.11901	0.11979	0.69437	0.76062	0.00214	0.00089
	(60, 7)	(12, 15)	20.624986	20.625036	0.19444	0.19444	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(14, 15)	21.624993	21.625006	0.21875	0.21875	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
30	(55, 5)	(1, 20)	15.317679	15.417554	0.11901	0.11979	0.69277	0.76080	0.00186	0.00071
	(60, 7)	(12, 20)	20.624986	20.625036	0.19444	0.19444	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(14, 20)	21.624993	21.625006	0.21875	0.21875	0.82310	0.87692	0.00001	0.00000
30	(55, 5)	(1, 25)	15.317670	15.417554	0.11901	0.11979	0.69122	0.76092	0.00164	0.00059
	(60, 7)	(12, 25)	20.624985	20.625036	0.19444	0.19444	0.75863	0.81667	0.00009	0.00000
	(65, 10)	(14, 25)	21.624993	21.625006	0.21875	0.21875	0.82445	0.87692	0.00055	0.00000
40	(55, 5)	(1, 15)	20.320621	20.419311	0.08881	0.08925	0.69580	0.76139	0.00160	0.00066
	(60, 7)	(15, 15)	27.124999	27.125004	0.14000	0.14000	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(19, 15)	29.125000	29.125000	0.16667	0.16667	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
40	(55, 5)	(1, 20)	20.320601	20.419311	0.08881	0.08925	0.69460	0.76152	0.00139	0.00053
	(60, 7)	(15, 20)	27.124983	27.125004	0.14000	0.14000	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(19, 20)	29.125000	29.125000	0.16667	0.16667	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
40	(55, 5)	(1, 25)	20.320593	20.419311	0.08881	0.08925	0.69341	0.76161	0.00122	0.00044
	(60, 7)	(15, 25)	27.139440	27.125004	0.13989	0.14000	0.75857	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(19, 25)	29.125000	29.125000	0.16667	0.16667	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
45	(55, 5)	(1, 15)	22.821588	22.919891	0.07881	0.07915	0.69627	0.76164	0.00142	0.00059
	(60, 7)	(19, 15)	31.625000	31.625000	0.13462	0.13462	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(22, 15)	33.125000	33.125000	0.15217	0.15217	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
45	(55, 5)	(1, 20)	22.821569	22.919891	0.07881	0.07915	0.69521	0.76176	0.00123	0.00047
	(60, 7)	(19, 20)	31.625000	31.625000	0.13462	0.13462	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(22, 20)	33.125000	33.125000	0.15217	0.15217	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000
45	(55, 5)	(1, 25)	22.821564	22.919891	0.07881	0.07915	0.69415	0.76184	0.00108	0.00039
	(60, 7)	(19, 25)	31.624314	31.625000	0.13464	0.13462	0.75833	0.81667	0.00000	0.00000
	(65, 10)	(22, 25)	33.125001	33.125000	0.15217	0.15217	0.82308	0.87692	0.00000	0.00000

Проанализируем зависимости характеристик системы с неограниченной очередью относительно изменения параметров  $s$  и  $r$  при  $(m, S - m)$ -политике (см. рис. 5). Здесь поведение функции  $PB_1$  очень похоже на ее поведение при использовании  $(s, S)$ -политики (см. рис. 4, а и рис. 5, а), но в отличие от последней в  $(m, S - m)$ -политике при  $s > 5$  значения этой функции при  $r = 30$  оказываются большими, чем ее соответствующие значения при  $r = 5$ . На первый взгляд этот результат кажется неожиданным, но детальное изучение составляющих этой функции (см. (5)) показывает, что ее значения существенно зависят от соотношения многих параметров, иными словами, до проведения соответствующих численных экспериментов невозможно с уверенностью определить вид графиков этой функции. Аналогичные комментарии справедливы для вида функции  $PB_2$ , так как при  $s < 3$  значения этой функции при  $r = 30$  также оказываются меньшими, чем ее соответствующие значения при  $r = 5$  (см. рис. 5, б). При этом поведение функции  $PB_2$  также очень похоже на ее поведение при использовании  $(s, S)$ -политики (см. рис. 4, б и рис. 5, б). Полное соответствие имеет место для графиков функций  $RR$  и  $S_{av}$  при использовании различных политик, при этом даже почти совпадают их абсолютные значения (см. рис. 4, в, г и рис. 5, в, г). Отметим, что значения параметра  $r$  почти не влияют на средний объем заказов при  $(m, S - m)$ -политике (см. рис. 5, д), при этом эта величина с очень малой скоростью растет относительно параметра  $s$ , что также является неожиданным результатом.

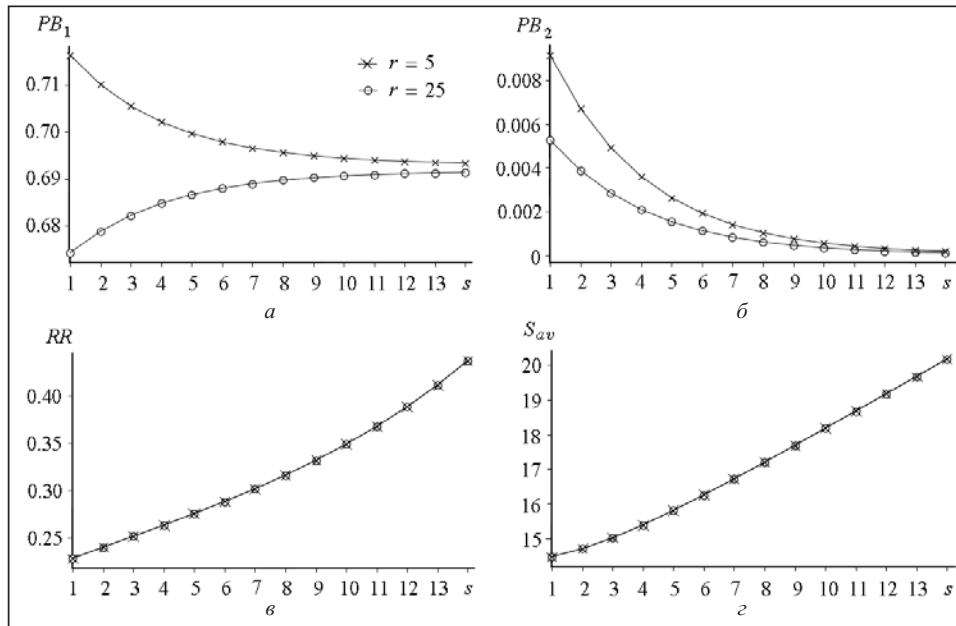


Рис. 4. Зависимости характеристик  $PB_1$  (а),  $PB_2$  (б),  $RR$  (в) и  $S_{av}$  (г) от параметра  $s$  в модели с неограниченной очередью при использовании  $(s, S)$ -политики пополнения запасов ( $S = 30$ ,  $\lambda_1 = 60$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_1 = 55$ ,  $\mu_2 = 10$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = 0.4$ ,  $\nu = 3$ ,  $\tau = 2$ )

Актуальны задачи оптимизации характеристик системы, при этом возможны их различные постановки. Далее ввиду ограниченного объема статьи рассматривается лишь задача максимизации прибыли системы с конечной очередью за счет выбора надлежащих значений параметров  $s$  и  $r$ .

Доходы  $RV$  системы определяются так:

$$RV(s, r) = (\lambda_1(1 - PB_1(s, r))C_{rev}^1 + \lambda_2(1 - PB_2(s, r))C_{rev}^2)PS(s, r), \quad (37)$$

где  $PS(s, r) = \frac{\mu_2\sigma_2}{\lambda + \mu_1\sigma_1 + \mu_2\sigma_2} (1 - \rho(0))(1 - \pi(\langle 0 \rangle))$  оценивает вероятность того,

что обслуженная заявка покупает запас;  $C_{rev}^k$  — доходы системы вследствие продажи единицы запаса по заявкам  $k$ -го типа,  $k = 1, 2$ . Следует ожидать, что доходы от обслуживания приоритетных заявок намного больше, чем от обслуживания обычных, т.е.  $C_{rev}^2 \gg C_{rev}^1$ .

**Замечание 4.** Здесь и далее в обозначениях характеристик системы и функционалов в скобках указаны оптимизируемые параметры  $s$  и  $r$ .

Суммарные штрафы  $TC$  в системе определяются следующим образом:

$$TC(s, r) = (K + c_r V_{av}(s, r))RR(s, r) + c_h S_{av}(s, r) + c_l^1 \lambda_1 PB_1(s, r) + c_l^2 \lambda_2 PB_2(s, r), \quad (38)$$

где  $K$  — фиксированная цена одного заказа;  $c_r$  — цена единицы объема заказа;  $c_h$  — цена хранения единицы объема запасов за единицу времени;  $c_l^k$  — штраф за потерю одной заявки  $k$ -го типа,  $k = 1, 2$ . Считается, что штрафы за потери приоритетных заявок намного больше, чем обычных, т.е.  $c_l^2 \gg c_l^1$ .

**Замечание 5.** При использовании  $(s, S)$ -политики суммарные штрафы в системе определяются согласно (38), где  $V_{av}$  заменяется  $S - s$ .

Задача оптимизации ставится следующим образом: требуется максимизировать прибыль  $PT$  системы за счет выбора надлежащих значений критического уровня запасов  $s$  и порогового параметра  $r$ , регулирующего доступ заявок низкого приоритета, т.е. требуется решить следующую задачу:

$$(s^*, r^*) = \arg \max_{(s, r)} PT(s, r), \quad (39)$$

где  $PT(s, r) = RV(s, r) - TC(s, r)$ .

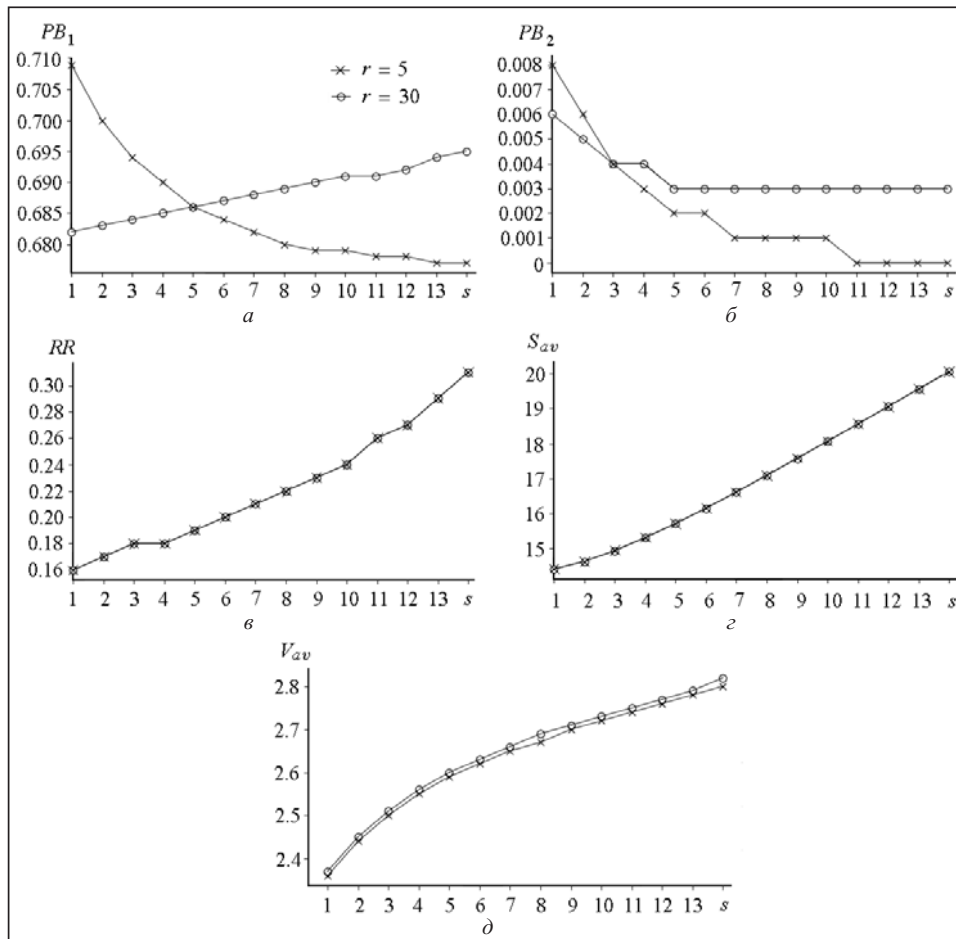


Рис. 5. Зависимости характеристик  $PB_1$  (а),  $PB_2$  (б),  $RR$  (в),  $S_{av}$  (г) и  $V_{av}$  (д) от параметра  $s$  в модели с неограниченной очередью при использовании  $(m, S - m)$ -политики пополнения запасов ( $S = 30$ ,  $\lambda_1 = 55$ ,  $\lambda_2 = 5$ ,  $\mu_1 = 60$ ,  $\mu_2 = 7$ ,  $\sigma_1 = 0.3$ ,  $\varphi_1 = 0.4$ ,  $\nu = 2$ ,  $\tau = 1$ )

**Таблица 5.** Результаты решения задачи (39) ( $\mu_1 = 55$ ,  $\mu_2 = 15$ ,  $\sigma_1 = 0.2$ ,  $\varphi_1 = 0.3$ ,  $\nu = 3$ ,  $\tau = 2$ )

$(S, N)$	$(\lambda_1, \lambda_2)$	$(s, S)$ -политика		$(m, S - m)$ -политика	
		$(s^*, r^*)$	$PT^*$	$(s^*, r^*)$	$PT^*$
(30, 45)	(45, 8)	(14, 39)	10.45	(1, 41)	9.59
	(55, 12)	(14, 35)	6.52	(1, 39)	5.97
	(60, 15)	(14, 7)	4.87	(1, 4)	4.49
(30, 50)	(45, 8)	(14, 44)	10.50	(1, 46)	10.00
	(55, 12)	(14, 41)	6.55	(1, 44)	6.24
	(60, 15)	(14, 36)	4.88	(1, 41)	4.63
(40, 45)	(45, 8)	(19, 38)	8.34	(1, 41)	8.52
	(55, 12)	(19, 33)	4.40	(1, 38)	4.87
	(60, 15)	(19, 8)	2.74	(1, 4)	3.36
(40, 50)	(45, 8)	(19, 43)	8.35	(1, 46)	8.84
	(55, 12)	(19, 38)	4.41	(1, 43)	5.08
	(60, 15)	(19, 32)	2.74	(1, 40)	3.46

Задача (39) всегда имеет решение, так как множество допустимых решений  $\{0 \leq s < S/2\} \times \{1 \leq r \leq N-1\}$  является конечным и дискретным.

В табл. 5 приводятся результаты решения задачи (39) для модели с  $(s, S)$ - и  $(m, S - m)$ -политиками пополнения запасов, здесь  $PT^*$  — максимальное значение функционала  $PT(s, r)$ . Коэффициенты в функционалах (37) и (38) определяются следующим образом:  $C_{rev}^1 = 5$ ,  $C_{rev}^2 = 10$ ,  $K = 0.2$ ,  $c_r = 0.01$ ,  $c_h = 0.2$ ,  $c_l^1 = 0.2$ ,  $c_l^2 = 0.6$ .

Из табл. 5 видно, что, несмотря на то, что при одинаковых исходных данных оптимальные решения задачи (39) существенно отличаются в различных политиках пополнения

запасов, максимальные значения функционала  $PT(s, r)$  очень близки, т.е. их разность лежит в пределах вычислительной погрешности. Отметим, что в обеих политиках пополнения запасов оптимальные значения параметров  $s$  и  $r$  изменяются очень плавно, а при использовании  $(m, S - m)$ -политики оптимальное значение параметра  $s^* = 1$  при всех значениях используемых исходных данных системы. Эти свойства оптимальных решений облегчают их реализацию в реальных системах.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены марковские модели системы обслуживания–запасания с двумя типами заявок, где часть заявок после завершения обслуживания не получает запасов. Разнотипные заявки образуют общую очередь конечной длины, и время их обслуживания является положительной случайной величиной. Если общее число заявок выше порогового значения, то лишь заявки высокого приоритета принимаются в систему. В случаях отсутствия запасов заявки обоих типов принимаются в систему без ограничений, при этом они в очереди являются нетерпеливыми. Изучаются модели двух типов: в одной из них в системе используется  $(s, S)$ -политика, а в другой — политика переменного объема запасов VOS. В обоих случаях время выполнения заказов имеет показательные ф.р. с конечными средними значениями. Построена двумерная цепь Маркова, которая описывает работу изучаемых систем, и разработаны методы расчета вероятностей состояний этой цепи. Получены формулы для вычисления характеристик исследуемых систем и решена задача максимизации их прибыли.

Предложенные модели можно обобщить для случая произвольного количества разнотипных заявок, а разработанные методы использовать для анализа систем с портящимися запасами, а также систем с неидентичными по размерам заявками и т.д. Подобные задачи являются предметом дальнейших исследований.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schwarz M., Sauer C., Daduna H., Kulik R., Szekli R. *M / M / 1 queuing systems with inventory. Queuing Systems*. 2006. Vol. 54, Iss. 1. P. 55–78.
2. Кербалиев А.И., Меликов А.З., Владимирский А.И. Математическая модель процесса отпуска нефтепродуктов на автозаправочных станциях. *Изв. вузов СССР. Нефть и газ*. 1988. № 11. С. 70–74.
3. Sigman K., Simchi-Levi D. Light traffic heuristic for an *M / G / 1* queue with limited inventory. *Annals of Operations Research*. 1992. Vol. 40. P. 371–380.
4. Melikov A.Z., Molchanov A.A. Stock optimization in transport/storage systems. *Cybernetics*. 1992. Vol. 27, N 3. P. 484–487.
5. Krishnamoorthy A., Lakshmy B., Manikandan R. A survey on inventory models with positive service time. *OPSEARCH*. 2011. Vol. 48. P. 153–169.
6. Ha A.Y. Stock rationing policy for a make-to-stock production system with two priority classes and backordering. *Naval Research Logistics*. 1997. Vol. 44, Iss. 5. P. 457–472.
7. Ha A.Y. Inventory rationing in a make-to-stock production system with two priority classes and backordering. *Management Science*. 1997. Vol. 43, Iss. 8. P. 1093–1103.
8. Ha A.Y. Stock rationing in an *M / E<sub>k</sub> / 1* make-to-stock queue. *Management Science*. 2000. Vol. 46, Iss. 1. P. 77–87.
9. Dekker R., Hill R.M., Kleijn M.J. On the  $(S - 1, S)$  lost sales inventory model with priority demand classes. *Naval Research Logistics*. 2002. Vol. 49, Iss. 6. P. 593–610.
10. Kranenburg A.A., van Houtum G.J. Cost optimization in the  $(S - 1, S)$  lost sales inventory model with multiple demand classes. *Operations Research Letters*. 2007. Vol. 35, Iss. 4. P. 493–502.
11. Isotupa K.P.S. Cost analysis of an  $(S - 1, S)$  inventory system with two demand classes and rationing. *Annals of Operations Research*. 2015. Vol. 233. P. 411–421.
12. Isotupa K.P.S. An  $(S, Q)$  inventory system with two demand classes of customers. *International Journal of Operational Research*. 2011. Vol. 12, Iss. 1. P. 12–19.
13. Isotupa K.P.S. An  $(S, Q)$  Markovian inventory system with lost sales and two demand classes. *Mathematical and Computer Modeling*. 2006. Vol. 43. P. 687–694.

14. Karthick T., Sivakumar B., Arivarignan G. An inventory system with two types of customers and retrieval demands. *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*. 2015. Vol. 2, Iss. 2. P. 90–112.
15. Melikov A.Z., Fatalieva M.R. Situational inventory in counter-stream serving systems. *Engineering Simulation*. 1998. Vol. 15. P. 839–848.
16. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Bagirova S.A. Markov models of queuing-inventory systems with variable order size. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 373–386.
17. Krishnamoorthy A., Manikandan R., Lakshmy B. Revisit to queuing-inventory system with positive service time. *Annals of Operations Research*. 2015. Vol. 233. P. 221–236.
18. Chakka R. Spectral expansion solution for some finite capacity queues. *Annals of Operations Research*. 1998. Vol. 79. P. 27–44.
19. Mitrani I., Chakka R. Spectral expansion solution for a class of Markov models: Application and comparison with the matrix-geometric method. *Performance Evaluation*. 1995. Vol. 23, Iss. 3. P. 241–260.
20. Melikov A.Z., Ponomarenko L.A., Shahmaliyev M.O. Analysis of perishable queuing-inventory systems with different types of requests. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49, Iss. 9. P. 42–60.

Надійшла до редакції 05.02.2018

**А.З. Меліков, Л.А. Пономаренко, І.А. Алієв**  
**МАРКОВСЬКІ МОДЕЛІ СИСТЕМ З ДВОМА ТИПАМИ ВИМОГ І РІЗНИМИ ПОЛІТИКАМИ**  
**ПОПОВНЕННЯ ЗАПАСІВ**

**Анотація.** Запропоновано марковські моделі систем обслуговування–запасання з двома типами вимог, в яких використовуються дві політики поповнення запасів: в одній політиці обсяг отримуваних запасів є постійною величиною, а в іншій політиці — змінною. Для доступу вимог високого пріоритету немає обмежень, вимоги нижчого пріоритету виконуються лише тоді, коли сумарна кількість вимог у системі є меншою від заданого порогового значення. Розроблено методи обчислення характеристик досліджуваних систем і розв'язано задачі їхньої оптимізації. Наведено результати числових експериментів.

**Ключові слова:** система обслуговування–запасання, політика поповнення запасів, різнотипні вимоги, метод розрахунку, оптимізація.

**A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, I.A. Aliyev**  
**MARKOV MODELS OF SYSTEMS WITH TWO TYPES OF CUSTOMERS AND DIFFERENT**  
**REPLENISHMENT POLICIES**

**Abstract.** Markov models of queuing-inventory systems with two types of customers are proposed. In these systems, two kinds of replenishment policies are used: policies with fixed and variable size of order. High-priority customers have no access constraints while low-priority customers are accepted if the total number of customers in the system is less than a given threshold. Methods are developed to calculate performance measures of the systems under study and problems of their optimization are solved. Results of the numerical experiments are shown.

**Keywords:** conveyor, queuing-inventory system, replenishment policy, customers of different types, calculation method, optimization.

**Меліков Агаси Зарбали оглы,**  
 чл.-кор. НАН Азербайджана, доктор техн. наук, професор, заведуючий лабораторією Інститута систем управління НАН Азербайджана, Баку, e-mail: agassi.melikov@rambler.ru.

**Пономаренко Леонид Анатольевич,**  
 доктор техн. наук, професор, головний научний співробітник Міжнародного научно-учебного центру інформаційних технологій і систем НАН України і МОН України, Київ, e-mail: laponomarenko@ukr.net.

**Алієв Исмаиль Алакпер оглы,**  
 докторант Бакинського державного університету (Азербайджан), e-mail: isiko94@gmail.com.