УДК 519.6

В.Л. МАКАРОВ, Н.В. МАЙКО

КРАЙОВИЙ ЕФЕКТ В ОЦІНЦІ ТОЧНОСТІ СІТКОВОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

Анотація. Побудовано і досліджено сіткові методи розв'язання першої крайової задачі для диференціального рівняння з похідною Рімана–Ліувілля дробового порядку. За допомогою функції Гріна крайову задачу зведено до інтегрального рівняння Фредгольма, для дискретизації якого застосовано інтерполяційні поліноми Лагранжа. Доведено вагові оцінки точності сіткових задач, які враховують вплив крайової умови Діріхле. Отримані результати свідчать про те, що точність наближеного розв'язку у примежових вузлах сітки вища, ніж в її внутрішніх вузлах. Теоретичні результати проілюстровано чисельним прикладом.

Ключові слова: диференціальне рівняння, крайова умова Діріхле, похідна дробового порядку, сітковий розв'язок, оцінка похибки, крайовий ефект.

ВСТУП

У теорії і застосуваннях методу сіток для розв'язування стаціонарних і нестаціонарних задач у канонічних областях [1] значний інтерес становить питання про точність наближеного розв'язку поблизу тієї частини межі області, де задано крайову умову Діріхле. Оскільки сітковий розв'язок задовольняє таку умову точно, то природно очікувати, що в примежових вузлах сітки його точність буде вищою, ніж у внутрішніх вузлах [2].

Кількісну характеристику цього явища у вигляді вагових оцінок, які враховують вплив крайової умови Діріхле, вперше запропоновано в [3]. Ці ідеї знайшли своє продовження в публікаціях [4, 5]. Так, у [4] вивчається скінченно-різницева апроксимація першої крайової задачі для квазілінійного еліптичного рівняння зі змінними коефіцієнтами в одиничному квадраті $\Omega=(0,1)^2$. Для похибки $z(x)=y(x)-u(x)$ різницевої схеми доведено вагову оцінку в сітковій нормі

$$\left\| \frac{z(x)}{\rho^{1/2}(x)} \right\| \le M\,|h|^2\,|u|_{W_2^4(\Omega)}\,,\ \ |h|^2=h_1^2+h_2^2,$$

де $x=(x_1,x_2)$, $\rho(x)=\min\{x_1x_2, x_1(1-x_2), (1-x_1)x_2, (1-x_1)(1-x_2)\}$, $|u|_{W_2^4(\Omega)}$ — напівнорма в $W_2^4(\Omega)$, M — стала, незалежна від $u(x)$ і h_1, h_2, $u(x)$ і $y(x)$ — точний і наближений розв'язок відповідно.

У [5] із застосуванням іншої техніки доведено вагові апріорні оцінки точності різницевих схем для дво- і тривимірного рівняння Пуассона з крайовими умовами Діріхле і Неймана. Наприклад, для першої крайової задачі та її традиційної скінченно-різницевої апроксимації на п'ятиточковому шаблоні квадратної сітки ω доведено оцінку

$$|\,y(x)-u(x)| \le Mh^2\upsilon(x)|\,u\,|_{W_\infty^4(\Omega)}\,,\ \ x=(x_1,x_2)\in\omega,$$

де M — стала, незалежна від $u(x)$ і h, функція $\upsilon(x)$ є величиною $O(h)$ поблизу сторін квадрата $\Omega=(0,1)^2$ і величиною $O(h^2\ln h^{-1})$ — поблизу його вершин.

Апріорні вагові оцінки похибки традиційних різницевих схем для одно- і двовимірного параболічного рівняння з крайовою умовою Діріхле отримано в [6–8]. З доведених оцінок випливає, що точність схеми вища поблизу бічних сторін і дна просторово-часового прямокутника в одновимірному випадку та поблизу бічних граней і дна просторово-часового паралелепіпеда — у двовимірному.

Дослідження крайового і початкового ефектів також становить значний інтерес для нових класів задач, поява яких зумовлена бурхливим розвитком дробового аналізу. Цей розділ класичного аналізу майже триста років (з 1695 р. і донедавна) був не більше ніж вишуканою математичною абстракцією [9]. Однак протягом останніх п'яти десятиліть дробовий аналіз широко застосовується в моделюванні багатьох природних явищ. З'ясувалося [10, 11], що апарат диференціального та інтегрального числення нецілого дійсного (і комплексного) порядку дає змогу якнайкраще будувати адекватні математичні моделі, наприклад, для опису в'язко-пружних тіл, суцільних середовищ з пам'яттю, трансформації температури й вологості в атмосферних шарах, нерівноважної динаміки фільтраційних процесів у тріщинувато-поруватих середовищах, моделі, застосовні для оброблення багатовимірних сигналів у радіофізиці та радіолокації, у нелінійній гідроакустиці, в електродинаміці матеріальних середовищ тощо.

У стані активного розвитку перебувають і наближені методи розв'язування дробово-диференціальних і дробово-інтегральних рівнянь, про що свідчить значна кількість публікацій на цю тему [12–14].

У цій статті розглянуто крайову задачу

$$\begin{gathered} u''(x) - (D_{0+}^{\alpha} u)(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

де [15]

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

— похідна Рімана–Ліувілля порядку $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ — ціла частина числа α, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Для наближеного розв'язання задачі (1) побудовано сіткові схеми першого і другого порядків апроксимації та знайдено узгоджені в розумінні [16] вагові оцінки для похибки з урахуванням крайового ефекту.

ВАГОВА ОЦІНКА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ

Надалі в оцінках використано стандартні позначення для норм у просторах $C_{[0,1]}^k$ і $C_{[0,1]}^{k,\lambda}$ [17]:

$$\|u\|_{\infty} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}} = \sup_{0<x<1} |u(x)|; \; \|u\|_{k,\infty} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}^k} = \sum_{l=0}^{k} \|u^{(l)}\|_{C_{[0,1]}}, \; k \in \mathbb{N};$$

$$\|u\|_{k,\lambda} \equiv \|u\|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}} = \|u\|_{C_{[0,1]}^k} + |u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}}, \; k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$|u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}} = \sup_{\substack{x,y \in (0,1) \\ x \neq y}} \frac{|u^{(k)}(x) - u^{(k)}(y)|}{|x-y|^{\lambda}},$$

де $|u|_{k,\lambda} \equiv |u|_{C_{[0,1]}^{k,\lambda}}$ — напівнорма в просторі Гельдера $C_{[0,1]}^{k,\lambda}$ з показником λ $(0 < \lambda \le 1)$.

Розглянемо задачу (1) при $\alpha = 0$:

$$u''(x) - u(x) = -f(x), \quad x \in (0,1), \; u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{2}$$

Відомо [18], що при $f(x) \in C_{[0,1]}$ крайова задача (2) має єдиний розв'язок $u(x) \in C_{(0,1)}^2 \cap C_{[0,1]}$, який також є розв'язком такого інтегрального рівняння:

$$u(x) + \int_0^1 G(x,\xi) u(\xi) d\xi = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{3}$$

де

$$G(x,\xi)=\begin{cases} x(1-\xi), & x\le\xi,\\ \xi(1-x), & \xi\le x,\end{cases} \tag{4}$$

— функція Гріна крайової задачі $u''(x)=-f(x)$, $x\in(0,1)$, $u(0)=0$, $u(1)=0$.

Виконавши в (3) заміну $v(x)=\dfrac{u(x)}{x(1-x)}$, одержимо рівняння

$$v(x)+\frac{1}{x(1-x)}\left\{(1-x)\int_0^x \xi^2(1-\xi)v(\xi)d\xi+x\int_x^1 \xi(1-\xi)^2 v(\xi)d\xi\right\}=$$

$$=\frac{1}{x(1-x)}\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,\quad x\in(0,1). \tag{5}$$

Звідси випливає нерівність

$$\|v\|_\infty \le \sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\left\{(1-x)\int_0^x \xi^2(1-\xi)\,d\xi+x\int_x^1 \xi(1-\xi)^2\,d\xi\right\}\|v\|_\infty+$$

$$+\sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int_0^1 G(x,\xi)\,d\xi\,\|f\|_\infty. \tag{6}$$

Обчислимо

$$\sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\left\{(1-x)\int_0^x \xi^2(1-\xi)d\xi+x\int_x^1 \xi(1-\xi)^2\,d\xi\right\}=$$

$$=\sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\left\{(1-x)\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)+x\left(\frac{(1-x)^3}{3}-\frac{(1-x)^4}{4}\right)\right\}=$$

$$=\sup_{0<x<1}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{(1-x)^2}{3}-\frac{(1-x)^3}{4}\right)=\sup_{0<x<1}\frac{1}{12}(1+x-x^2)=\frac{5}{48},$$

$$\sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\int_0^1 G(x,\xi)d\xi=\sup_{0<x<1}\frac{1}{x(1-x)}\left\{(1-x)\int_0^x \xi\,d\xi+x\int_x^1(1-\xi)d\xi\right\}=\frac{1}{2},$$

і запишемо нерівність (6) у вигляді

$$\|v\|_\infty\le\frac{5}{48}\|v\|_\infty+\frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$

Звідси випливає, що для розв'язку $u(x)$ крайової задачі (2) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\|\frac{u(x)}{x(1-x)}\right\|_\infty\le\frac{24}{43}\|f\|_\infty. \tag{7}$$

Розглянемо задачу (1) при $\alpha=1$. Врахуємо, що похідна Рімана–Ліувілля в (1) при $n=2$ набуває вигляду

$$(D_{0+}^1 u)(x)=\frac{1}{\Gamma(1)}\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x u(t)dt=u'(x).$$

Тоді задача (1) перетворюється на таку:

$$u''(x)-u'(x)=-f(x),\quad x\in(0,1),\ u(0)=0,\quad u(1)=0. \tag{8}$$

Подібно до крайової задачі (2) крайова задача (8) при $f(x) \in C_{[0,1]}$ є однозначно розв'язною в класі $C^2_{(0,1)} \cap C_{[0,1]}$, при цьому її розв'язок $u(x)$ є водночас розв'язком інтегрального рівняння

$$u(x) + \left\{ -(1-x)\int_0^x u(\xi)d\xi + x\int_x^1 u(\xi)d\xi \right\} = \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{9}$$

де $G(x,\xi)$ — функція Гріна з (4).

Виконуючи в (9) заміну $\upsilon(x) = \dfrac{u(x)}{x(1-x)}$, отримуємо рівняння

$$\upsilon(x) + \frac{1}{x(1-x)} \left\{ -(1-x)\int_0^x \xi(1-\xi)\upsilon(\xi)d\xi + x\int_x^1 \xi(1-\xi)\upsilon(\xi)d\xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \quad x \in (0,1). \tag{10}$$

Звідси випливає нерівність

$$\| \upsilon \|_\infty \le \sup_{0<x<1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x)\int_0^x \xi(1-\xi)\, d\xi + x\int_x^1 (1-\xi)\,\xi\, d\xi \right\} \| \upsilon \|_\infty +$$

$$+ \sup_{0<x<1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x,\xi)\, d\xi \, \| f \|_\infty . \tag{11}$$

Оскільки

$$\sup_{0<x<1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x)\int_0^x \xi(1-\xi)d\xi + x\int_x^1 \xi(1-\xi)d\xi \right\} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \frac{1}{x(1-x)} \left\{ (1-x)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + x\left(\frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right) \right\} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{1-x}{2} - \frac{(1-x)^2}{3} \right) = \sup_{0<x<1} \frac{1}{6}(1+4x-4x^2) = \frac{1}{3},$$

$$\sup_{0<x<1} \frac{1}{x(1-x)} \int_0^1 G(x,\xi) d\xi = \frac{1}{2},$$

то нерівність (11) можна записати так:

$$\| \upsilon \|_\infty \le \frac{1}{3} \| \upsilon \|_\infty + \frac{1}{2} \| f \|_\infty . \tag{12}$$

Таким чином, для розв'язку $u(x)$ крайової задачі (8) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u(x)}{x(1-x)} \right\|_\infty \le \frac{3}{4} \| f \|_\infty . \tag{13}$$

Розглянемо задачу (1) при $0 < \alpha < 1$ [15]:

$$Lu \equiv u''(x) - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^\alpha} = -f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 . \tag{14}$$

Лема 1 (принцип максимуму). Якщо $u(x) \in C^2_{(0,1)} \cap C_{[0,1]}$ — розв'язок однорідного рівняння $Lu = 0$, відмінний від тотожної сталої, то функція $u(x)$ може досягати свого додатного максимуму (від'ємного мінімуму) тільки на кінцях відрізка $[0, 1]$.

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай $\max\limits_{0 \le x \le 1} u(x) = u(x_0) > 0$, $0 < x_0 < 1$. Тоді $u'(x_0) = 0$, $u''(x_0) \le 0$. Оскільки [15, формули (13.1), (13.2)]

$$(D^{\alpha}_{0+} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{u(x)}{x^{\alpha}} + \lim_{t \to x} \frac{u(t) - u(x)}{(x-t)^{\alpha}} + \alpha \int_0^x \frac{u(x) - u(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{u(x)}{x^{\alpha}} + \alpha \int_0^x \frac{u(x) - u(t)}{(x-t)^{\alpha+1}} dt \right), \ x \in (0,1),$$

то $(D^{\alpha}_{0+} u)(x_0) > 0$, що разом із рівнянням (14) (при $f(x) \equiv 0$)

$$u''(x) = (D^{\alpha}_{0+} u)(x), \quad x \in (0,1),$$

дає нерівність $u''(x_0) > 0$. Отримана суперечність доводить, що у внутрішній точці відрізка [0,1] функція $u(x)$ не може досягати свого додатного максимуму. Аналогічно можна показати, що у внутрішній точці відрізка [0,1] функція $u(x)$ не може досягати свого від'ємного мінімуму. Лему доведено.

Наслідок 1. Однорідна крайова задача (14) (при $f(x) \equiv 0$) у класі функцій $C^2_{(0,1)} \cap C_{[0,1]}$ має тільки тривіальний розв'язок $u(x) \equiv 0$.

Теорема 1. Якщо $f(x) \in C_{[0,1]}$, то крайова задача Діріхле (14) у класі функцій $C^2_{(0,1)} \cap C_{[0,1]}$ є однозначно розв'язною.

Доведення. Нехай $u(x)$ — розв'язок крайової задачі (14). З перетворень

$$\int_0^1 u''(\xi) G(x, \xi)\, d\xi = (1-x) \int_0^x \xi u''(\xi) d\xi + x \int_x^1 (1-\xi)\, u''(\xi) d\xi = -u(x),$$

$$\int_0^1 G(x, \xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi - t)^{\alpha}} d\xi = (1-x) \int_0^x \xi \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi - t)^{\alpha}} d\xi + x \int_x^1 (1-\xi) \frac{d}{d\xi} \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi - t)^{\alpha}} d\xi =$$

$$= (1-x) \left(\xi \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^{\alpha}} \Bigg|_{\xi=0}^{\xi=x} - \int_0^x d\xi \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^{\alpha}} \right) + x \left((1-\xi) \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^{\alpha}} \Bigg|_{\xi=x}^{\xi=1} + \int_x^1 d\xi \int_0^{\xi} \frac{u(t)dt}{(\xi-t)^{\alpha}} \right) =$$

$$= (1-x) \left(x \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} - \int_0^x u(t)dt \int_t^x \frac{d\xi}{(\xi-t)^{\alpha}} \right) +$$

$$+ x \left(-(1-x) \int_0^x \frac{u(t)dt}{(x-t)^{\alpha}} + \int_0^x u(t)dt \int_x^1 \frac{d\xi}{(\xi-t)^{\alpha}} + \int_x^1 u(t)dt \int_t^1 \frac{d\xi}{(\xi-t)^{\alpha}} \right) =$$

$$= -\frac{1-x}{1-\alpha} \int_0^x u(t)(x-t)^{1-\alpha} dt +$$

$$+\frac{x}{1-\alpha}\left(\int_0^x u(t)((1-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha})\,dt+\int_x^1 u(t)(1-t)^{1-\alpha}\,dt\right)$$

випливає, що $u(x)$ задовольняє інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду

$$u(x)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-(1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt+\right.$$
$$\left.+x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha})u(t)dt+x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right)=$$
$$=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,\quad x\in[0,1]. \qquad (15)$$

Можна показати, що і навпаки, розв'язок інтегрального рівняння (15) є розв'язком крайової задачі (14). Таким чином, крайова задача Діріхле (14) еквівалентна інтегральному рівнянню (15).

Оскільки однорідна крайова задача (14) має тільки тривіальний розв'язок $u(x)\equiv 0$, то й однорідне рівняння Фредгольма (15) (при $f(x)\equiv 0$) має тільки тривіальний розв'язок. Внаслідок альтернативи Фредгольма звідси випливає, що неоднорідне рівняння Фредгольма (15) однозначно розв'язне, а тому задача Діріхле (14) також є однозначно розв'язною. Теорему доведено.

Зауваження 1. Метод функції Гріна (4) також використовують [15] для дослідження крайової задачі

$$u''(x)-a(x)(D_{0+}^{\alpha}u)(x)=-f(x),\quad x\in(0,1),\ u(0)=0,\quad u(1)=0,$$

зі змінним коефіцієнтом $a(x)\in C_{[0,1]}$, $a(x)\ge 0$.

Тепер отримаємо вагову оцінку типу (7) і (13) у класі функцій меншої гладкості.

Нехай $f(x)=\varphi''(x)$, де $\varphi\in C_{[0,1]}$. Знайдемо

$$\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi=\int_0^1 G(x,\xi)\varphi''(\xi)d\xi=(1-x)\int_0^x \xi\varphi''(\xi)d\xi+x\int_x^1 (1-\xi)\varphi''(\xi)d\xi=$$
$$=(1-x)\left(\xi\varphi'(\xi)|_0^x-\int_0^x \varphi'(\xi)d\xi\right)+x\left((1-\xi)\varphi'(\xi)|_x^1+\int_x^1 \varphi'(\xi)d\xi\right)=$$
$$=(1-x)(x\varphi'(x)-\varphi(x)+\varphi(0))+x(-(1-x)\varphi'(x)+\varphi(1)-\varphi(x))=$$
$$=-(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0))+x(\varphi(1)-\varphi(x)).$$

Означення 1. Слабким розв'язком крайової задачі Діріхле (14) називатимемо розв'язок $u(x)\in C_{[0,1]}$ інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$u(x)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(-(1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt+\right.$$
$$\left.+x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha})u(t)dt+x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right)=$$
$$=-(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0))+x(\varphi(1)-\varphi(x)),\quad x\in[0,1]. \qquad (16)$$

З теорем Фредгольма випливає, що для будь-якої функції $\varphi(x)\in C_{[0,1]}$ рівняння (16) має єдиний розв'язок $u(x)\in C_{[0,1]}$. З (16) виводимо нерівність

$$|u(x)| \le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sup_{0<x<1} \left((1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + \right.$$

$$\left. + x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}) dt + x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) \| u \|_{C_{[0,1]}} +$$

$$+ \sup_{0<x<1} \Big| -(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0)) + x(\varphi(1)-\varphi(x)) \Big|, \quad x \in [0,1],$$

і оскільки

$$\sup_{0<x<1} \left((1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}) dt + x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) =$$

$$= \sup_{0<x<1} \frac{(1-x)x^{2-\alpha} + x(1-(1-x)^{2-\alpha} - x^{2-\alpha}) + x(1-x)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \frac{x^{2-\alpha} + x - 2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)} \le \frac{1}{2(2-\alpha)},$$

то для $u(x)$ одержуємо оцінку

$$\| u \|_{C_{[0,1]}} \le \left(1 - \frac{1}{2\Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} 4 \| \varphi \|_{C_{[0,1]}}.$$

Теорема 2. Нехай $\varphi(x) \in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ і для β виконується умова

$$\frac{1}{\ln 4} \cdot \ln \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} < \beta \le 1 \ (0 < \alpha < 1). \tag{17}$$

Тоді слабкий розв'язок $u(x)$ крайової задачі (14) задовольняє умову $u(x) \in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ і для нього справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u(x)}{[x(1-x)]^{\beta}} \right\|_{\infty} \le \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^{\beta}\Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} 2^{\beta} |\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}} \tag{18}$$

Доведення. Виконуючи в (16) заміну $\upsilon(x) = \dfrac{u(x)}{[x(1-x)]^{\beta}}$, одержуємо рівняння

$$\upsilon(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,[x(1-x)]^{\beta}} \left(-(1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha} [t(1-t)]^{\beta} \upsilon(t) dt + \right.$$

$$\left. + x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}) [t(1-t)]^{\beta} \upsilon(t) dt + x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} [t(1-t)]^{\beta} \upsilon(t) dt \right) =$$

$$= \frac{-(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0)) + x(\varphi(1)-\varphi(x))}{[x(1-x)]^{\beta}}, \quad x \in (0, 1). \tag{19}$$

Звідси випливає нерівність

$$\| \upsilon \|_{\infty} \le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sup_{0<x<1} \frac{1}{[x(1-x)]^{\beta}} \left((1-x)\int_0^x (x-t)^{1-\alpha} dt + \right.$$

$$\left. + x\int_0^x ((1-t)^{1-\alpha} - (x-t)^{1-\alpha}) dt + x\int_x^1 (1-t)^{1-\alpha} dt \right) \frac{1}{4^{\beta}} \| \upsilon \|_{\infty} +$$

$$+ \sup_{0<x<1} \frac{\left| -(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0)) + x(\varphi(1)-\varphi(x)) \right|}{[x(1-x)]^{\beta}}. \tag{20}$$

Знайдемо

$$\sup_{0<x<1} \frac{(1-x)\int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha}dt + x\int\limits_0^x ((1-t)^{1-\alpha}-(x-t)^{1-\alpha})dt + x\int\limits_x^1 (1-t)^{1-\alpha}dt}{[x(1-x)]^{\beta}} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \frac{(1-x)x^{2-\alpha}+x(1-(1-x)^{2-\alpha}-x^{2-\alpha})+x(1-x)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\,[x(1-x)]^{\beta}} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \frac{x^{2-\alpha}+x-2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)[x(1-x)]^{\beta}} \le \sup_{0<x<1} \frac{x^{2-\alpha}+x-2x^{3-\alpha}}{(2-\alpha)\,x(1-x)} = \sup_{0<x<1} \frac{x^{1-\alpha}+1-2x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\,(1-x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{x^{1-\alpha}+1-2x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)\,(1-x)} = \lim_{x\to 1-0} \frac{(1-\alpha)x^{1-\alpha}-(2-\alpha)2x^{1-\alpha}}{-(2-\alpha)} = \frac{3-\alpha}{2-\alpha} \qquad (21)$$

(застосовано правило Лопіталя);

$$\sup_{0<x<1} \frac{\left|-(1-x)(\varphi(x)-\varphi(0))+x\,(\varphi(1)-\varphi(x))\right|}{[x(1-x)]^{\beta}} =$$

$$= \sup_{0<x<1} \left| -(1-x)^{1-\beta}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^{\beta}} + x^{1-\beta}\,\frac{\varphi(1)-\varphi(x)}{(1-x)^{\beta}} \right| \le$$

$$\le \sup_{0<x<1} ((1-x)^{1-\beta}+x^{1-\beta})|\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}} \le 2^{\beta}|\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}}. \qquad (22)$$

Використовуючи оцінки (21) і (22), з нерівності (20) виводимо

$$\|v\|_{\infty} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\,\frac{1}{4^{\beta}}\,\|v\|_{\infty} + 2^{\beta}|\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}}. \qquad (23)$$

Якщо β задовольняє умову (17), то $\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\,\frac{1}{4^{\beta}} < 1$. Тоді з нерівності (23) випливає, що справджується оцінка (18).

Покажемо, що $u(x) \in C^{0,\beta}_{[0,1]}$. Запишемо інтегральне рівняння (16) у вигляді

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left(x\int\limits_0^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt - \int\limits_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt \right) =$$

$$= -\varphi(x)+\varphi(0)+x(\varphi(1)-\varphi(0)),\ \ x\in[0,1].$$

Тоді при $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 \ne x_2$, отримаємо

$$\frac{u(x_2)-u(x_1)}{|x_2-x_1|^{\beta}} + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^{\beta}}\int\limits_0^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt -$$

$$-\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{\int\limits_0^{x_2} (x_2-t)^{1-\alpha}u(t)dt - \int\limits_0^{x_1} (x_1-t)^{1-\alpha}u(t)dt}{|x_2-x_1|^{\beta}} =$$

$$= \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{|x_2-x_1|^{\beta}} + (\varphi(1)-\varphi(0))\,\frac{x_2-x_1}{|x_2-x_1|^{\beta}}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\frac{|u(x_2)-u(x_1)|}{|x_2-x_1|^\beta} \le \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}|x_2-x_1|^{1-\beta}\left|\int_0^1 (1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right| +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\left|\int_0^{x_2}(x_2-t)^{1-\alpha}u(t)dt-\int_0^{x_1}(x_1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right|}{|x_2-x_1|^\beta}+$$

$$+\frac{|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|}{|x_2-x_1|^\beta}+(\varphi(1)-\varphi(0))|x_2-x_1|^{1-\beta}. \tag{24}$$

Розглянемо другий доданок у правій частині цієї нерівності. Для функції

$$g(x)=\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}u(t)dt,\ \ x\in[0,1],$$

маємо: $g(x)\in C^1_{[0,1]}$ і $g'(x)=(1-\alpha)\int_0^x (x-t)^{-\alpha}u(t)dt,$

$$|g(x_2)-g(x_1)|=|g'(\xi)(x_2-x_1)|=(1-\alpha)\left|\int_0^\xi (\xi-t)^{-\alpha}u(t)dt\right||x_2-x_1|\le$$

$$\le\|u\|_{C_{[0,1]}}|x_2-x_1|\quad (x_1\ {\textstyle\le\atop\ge}\ \xi\ {\textstyle\le\atop\ge}\ x_2).$$

Тоді з (24) дістаємо оцінку

$$|u|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}}\le\left(\frac{1}{\Gamma(3-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\right)\|u\|_{C_{[0,1]}}+|\varphi|_{C^{0,\beta}_{[0,1]}}+|\varphi(1)-\varphi(0)|,$$

а отже, $u\in C^{0,\beta}_{[0,1]}$. Теорему доведено.

Зауваження 2. Множина значень β, які задовольняють умову (17), не порожня, оскільки

$$0.2924812504\ldots\le\frac{1}{\ln 4}\cdot\ln\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\le 0.5024543610\ldots$$

при $0\le\alpha\le 1$.

ВАГОВА ОЦІНКА ТОЧНОСТІ СІТКОВОГО МЕТОДУ

Для розв’язання рівняння (16) застосуємо метод сіток. Введемо сіткову множину

$$\omega=\{x_j=jh,\quad j=1,\ldots,N-1,\quad h=1/N\},\ \overline{\omega}=\omega\cup\{0\}\cup\{1\},$$

де $N\ge 2$ — ціле, і покладемо в (16) $x=x_j$:

$$u(x_j)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}u(t)dt+\right.$$

$$\left.+x_j\sum_{k=1}^{j}\int_{x_{k-1}}^{x_k}((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha})u(t)dt+x_j\sum_{k=j+1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}u(t)dt\right\}=$$

$$=-(1-x_j)(\varphi(x_j)-\varphi(0))+x_j(\varphi(1)-\varphi(x_j)),\quad j=1,2,\ldots,N-1.$$

Звідси отримаємо сіткову схему

$$u^h(x_j)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}dt+\right.$$

$$\left.+x_j\sum_{k=1}^{j}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha})\,dt+x_j\sum_{k=j+1}^{N}u^h(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}dt\right\}=$$

$$=-(1-x_j)(\varphi(x_j)-\varphi(0))+x_j(\varphi(1)-\varphi(x_j)),\quad j=1,2,\ldots,N-1,\ u^h(x_N)=0. \quad (25)$$

Похибка

$$z(x)=u^h(x)-u(x) \quad (26)$$

є розв'язком сіткової задачі

$$z(x_j)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}z(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}dt+\right.$$

$$\left.+x_j\sum_{k=1}^{j}z(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha})\,dt+x_j\sum_{k=j+1}^{N}z(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}dt\right\}=$$

$$=\psi(x_j),\quad j=1,2,\ldots,N-1,\ z(x_N)=0, \quad (27)$$

де

$$\psi(x_j)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}(u(t)-u(x_k))dt+\right.$$

$$+x_j\sum_{k=1}^{j}\int_{x_{k-1}}^{x_k}((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha})(u(t)-u(x_k))dt\ +$$

$$\left.+x_j\sum_{k=j+1}^{N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}\big(u(t)-u(x_k)\big)dt\right\} \quad (28)$$

— похибка апроксимації.

Виконавши в (27) заміну $Z(x)=\dfrac{z(x)}{[x(1-x)]^{\beta}}$, отримаємо сіткову задачу

$$Z(x_j)+\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)[x_j(1-x_j)]^{\beta}}\left\{-(1-x_j)\sum_{k=1}^{j}Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^{\beta}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x_j-t)^{1-\alpha}dt+\right.$$

$$+x_j\sum_{k=1}^{j}Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^{\beta}\int_{x_{k-1}}^{x_k}((1-t)^{1-\alpha}-(x_j-t)^{1-\alpha})dt+$$

$$\left.+x_j\sum_{k=j+1}^{N}Z(x_k)[x_k(1-x_k)]^{\beta}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(1-t)^{1-\alpha}dt\right\}=\frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^{\beta}},$$

$$j=1,2,\ldots,N-1,\ Z(x_N)=0. \quad (29)$$

Позначимо сіткову норму $\|w\|_{\infty,\omega}=\max\limits_{x\in\omega}|w(x)|$.

Знайдемо оцінку для $\left\| \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^{\beta}} \right\|_{\infty,\omega}$, де $\psi(x_j)$ визначена в (28).

Якщо $u \in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ $(0<\beta \le 1)$, то

$$|u(t)-u(x_k)| = \left| \frac{u(t)-u(x_k)}{(x_k-t)^{\beta}} (x_k-t)^{\beta} \right| \le h^{\beta} |u|_{0,\beta}; \tag{30}$$

якщо $u(x) \in C^1_{[0,1]}$, то

$$|u(t)-u(x_k)| = |u'(\bar{x}_k)(t-x_k)| \le h \| u \|_{1,\infty} \quad (\bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k)). \tag{31}$$

Враховуючи нерівності (21), (30) і (31), з рівності (29) виводимо оцінки

$$\| Z \|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^{\beta}} \| Z \|_{\infty,\omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} h^{\beta} |u|_{0,\beta} \quad (0<\beta\le 1),$$

$$\| Z \|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} \frac{1}{4^{\beta}} \| Z \|_{\infty,\omega} + \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} h \| u \|_{1,\infty}.$$

Звідси випливають такі твердження.

Теорема 3. Нехай виконано умови теореми 2. Тоді для похибки (26) сіткової схеми (25) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\| \frac{u-u^h}{[x(1-x)]^{\beta}} \right\|_{\infty,\omega} \le M h^{\beta} |u|_{0,\beta}, \tag{32}$$

де $M = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^{\beta}\, \Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$ — стала, незалежна від h і $u(x)$.

Зауваження 3. Якщо $u(x) \in C^1_{[0,1]}$, то для похибки $z(x) = u(x) - u^h(x)$ сіткової схеми (25) виконується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u-u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty,\omega} \le M h \| u \|_{1,\infty}, \tag{33}$$

де $M = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\, \Gamma(3-\alpha)} \right)^{-1} \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}$ — стала, не залежна від h і $u(x)$.

Побудуємо і дослідимо сіткову схему другого порядку апроксимації

$$u^h(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j - t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt + \right.$$
$$+ x_j \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((1-t)^{1-\alpha} - (x_j-t)^{1-\alpha}) L_k(t; u^h) dt +$$
$$\left. + x_j \sum_{k=j+1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt \right\} =$$
$$= -(1-x_j)(\varphi(x_j) - \varphi(0)) + x_j(\varphi(1) - \varphi(x_j)), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1, \; u^h(x_N) = 0, \tag{34}$$

де $L_k(t; w) = \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} w(x_k) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}} w(x_{k-1})$, $t \in [x_{k-1}, x_k]$, — інтерполяційний поліном Лагранжа 1-го степеня для функції $w(x)$.

Для похибки

$$z(x) = u^h(x) - u(x) \tag{35}$$

маємо сіткову схему

$$u^h(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j - t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt + \right.$$

$$+ x_j \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((1-t)^{1-\alpha} - (x_j - t)^{1-\alpha}) L_k(t; u^h) dt +$$

$$\left. + x_j \sum_{k=j+1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k(t; u^h) dt \right\} = \psi(x_j), \;\; j = 1, 2, \ldots, N-1, \;\; u^h(x_N) = 0, \tag{36}$$

де

$$\psi(x_j) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j - t)^{1-\alpha} (u(t) - L_k(t; u)) dt + \right.$$

$$+ x_j \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((1-t)^{1-\alpha} - (x_j - t)^{1-\alpha})(u(t) - L_k(t; u)) dt +$$

$$\left. + x_j \sum_{k=j+1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} (u(t) - L_k(t; u)) \, dt \right\} \tag{37}$$

— похибка апроксимації.

Тоді функція $Z(x) = \dfrac{z(x)}{[x(1-x)]^{\beta}}$ є розв'язком сіткової задачі

$$Z(x_j) + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\,[x_j(1-x_j)]^{\beta}} \left\{ -(1-x_j) \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j - t)^{1-\alpha} L_k(t; [x(1-x)]^{\beta} Z) dt + \right.$$

$$+ x_j \sum_{k=1}^{j} \int_{x_{k-1}}^{x_k} ((1-t)^{1-\alpha} - (x_j - t)^{1-\alpha}) L_k(t; [x(1-x)]^{\beta} Z) dt +$$

$$\left. + x_j \sum_{k=j+1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (1-t)^{1-\alpha} L_k\big(t; x(1-x) Z\big) \, dt \right\} = \frac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^{\beta}},$$

$$j = 1, 2, \ldots, N-1, \;\; u^h(x_N) = 0. \tag{38}$$

Знайдемо оцінку для $\left\| \dfrac{\psi(x_j)}{[x_j(1-x_j)]^{\beta}} \right\|_{\infty, \omega}$, де $\psi(x_j)$ визначена в (37).

Якщо $u \in C^{0,\beta}_{[0,1]}$ $(0 < \beta \le 1)$, то

$$|u(t) - L_k(t; u)| = \left| u(t) - \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} u(x_k) - \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}} u(x_{k-1}) \right| =$$

$$= \left| \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} (u(t) - u(x_k)) + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}} (u(t) - u(x_{k-1})) \right| =$$

$$= \left| \frac{t - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \frac{u(t) - u(x_k)}{(x_k - t)^{\beta}} (x_k - t)^{\beta} + \frac{x_k - t}{x_k - x_{k-1}} \frac{u(t) - u(x_{k-1})}{(t - x_{k-1})^{\beta}} (t - x_{k-1})^{\beta} \right| \le h^{\beta} |u|_{0,\beta}; \tag{39}$$

якщо $u \in C^1_{[0,1]}$, то

$$\left|u(t)-L_k(t;u)\right| = \left|\frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}(u(t)-u(x_k))+\frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}}(u(t)-u(x_{k-1}))\right| =$$

$$=\left|\frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}u'(\bar{x}_k)(t-x_k)+\frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}}u'(\bar{\bar{x}}_k)(t-x_{k-1})\right| \le$$

$$\le \frac{2(t-x_{k-1})(x_k-t)}{x_k-x_{k-1}}\|u\|_{1,\infty} \le \frac{h}{2}\|u\|_{1,\infty} \quad (\bar{x}_k, \bar{\bar{x}}_k \in (x_{k-1}, x_k)); \tag{40}$$

якщо $u \in C^{1,\beta}_{[0,1]}$ $(0<\beta\le 1)$, то

$$\left|u(t)-L_k(t;u)\right| = \left|\frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}(u(t)-u(x_k))+\frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}}(u(t)-u(x_{k-1}))\right| =$$

$$=\left|\frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}}u'(\bar{x}_k)(t-x_k)+\frac{x_k-t}{x_k-x_{k-1}}u'(\bar{\bar{x}}_k)(t-x_{k-1})\right| =$$

$$=\left|\frac{(t-x_{k-1})(x_k-t)}{x_k-x_{k-1}}\frac{u'(\bar{\bar{x}}_k)-u'(\bar{x}_k)}{(\bar{\bar{x}}_k-\bar{x}_k)^\beta}(\bar{\bar{x}}_k-\bar{x}_k)^\beta\right| \le \frac{h^{\beta+1}}{4}|u|_{1,\beta}$$

$$(\bar{x}_k, \bar{\bar{x}}_k \in (x_{k-1}, x_k)); \tag{41}$$

якщо $u \in C^2_{[0,1]}$, то з урахуванням формули [19]

$$u(t)-L_k(t;u)=\frac{u''(\bar{x}_k)}{2!}(t-x_{k-1})(t-x_k), \; \bar{x}_k \in (x_{k-1}, x_k),$$

отримаємо

$$\left|u(t)-L_k(t;u)\right| \le \frac{h^2}{8}\|u\|_{2,\infty}. \tag{42}$$

Враховуючи нерівності (21), (39)–(42), з рівності (29) виводимо оцінки

$$\|Z\|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{4^\beta}\|Z\|_{\infty,\omega}+\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}h^\beta|u|_{0,\beta} \quad (0<\beta\le 1),$$

$$\|Z\|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{4}\|Z\|_{\infty,\omega}+\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{h}{2}\|u\|_{1,\infty},$$

$$\|Z\|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{4^\beta}\|Z\|_{\infty,\omega}+\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{h^{1+\beta}}{4}|u|_{1,\beta} \quad (0<\beta\le 1),$$

$$\|Z\|_{\infty,\omega} \le \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{1}{4}\|Z\|_{\infty,\omega}+\frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)}\frac{h^2}{8}\|u\|_{2,\infty}.$$

Звідси випливають такі твердження.

Теорема 4. Нехай слабкий розв’язок $u(x)$ задачі (14) задовольняє умову $u \in C^{k,\beta}_{[0,1]}$ $(k=0,1;\; 0<\beta\le 1)$ і виконана умова (17). Тоді для похибки (35) сіткової схеми (34) справджується вагова оцінка, яка враховує крайовий ефект:

$$\left\|\frac{u-u^h}{[x(1-x)]^\beta}\right\|_{\infty,\omega} \le M_k h^{k+\beta}|u|_{k,\beta}, \tag{43}$$

де M_0 і M_1 — сталі, які є незалежними від h та $u(x)$,

$$M_0 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta\ \Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \frac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)},\ M_1 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4^\beta\ \Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \frac{3-\alpha}{4\,\Gamma(3-\alpha)}.$$

Зауваження 4. Якщо $u \in C^1_{[0,1]}$, то для похибки $z(x) = u(x) - u^h(x)$ сіткової схеми (34) виконується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u-u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty,\omega} \le M_1 h \| u \|_{1,\infty},$$

якщо $u \in C^2_{[0,1]}$, то справджується вагова оцінка

$$\left\| \frac{u-u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty,\omega} \le M_2 h^2 \| u \|_{2,\infty},$$

де M_1 і M_2 — сталі, які є незалежними від h та $u(x)$,

$$M_1 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\,\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \frac{3-\alpha}{2\Gamma(3-\alpha)},\ M_2 = \left(1 - \frac{3-\alpha}{4\,\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \frac{3-\alpha}{8\,\Gamma(3-\alpha)}.$$

ЧИСЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Розглянемо задачу (14) при $\alpha = 1/2$:

$$u''(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t)dt}{\sqrt{x-t}} = -f(x),\ 0 < x < 1,\ u(0) = 0,\ u(1) = 0. \tag{44}$$

Для наближеного розв’язування скористаємося сітковою схемою (25) першого порядку апроксимації:

$$\left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j \sqrt{1-t} - \sqrt{x_j - t})\, dt \right\} u^h(x_j) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{j-1} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_j \sqrt{1-t} - \sqrt{x_j - t})\, dt + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x_j \sum_{k=j+1}^{N-1} u^h(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1-t}\,dt =$$

$$= (1-x_j) \int_0^{x_j} \xi f(\xi) d\xi + x_j \int_{x_j}^1 (1-\xi) f(\xi) d\xi,\quad j = 1, 2, \ldots, N-1; \tag{45}$$

$\omega_h = \{x_j = jh,\ \ j = 1, \ldots, N-1, h = 1/N\}$, де $N \ge 2$ — ціле.

При $f(x) = 6x + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(2x^{1/2} - \frac{16}{5} x^{5/2} \right)$ задача (44) має точний розв’язок $u(x) = x(1-x^2)$. У правій частині системи (45) отримуємо

$$(1-x_j) \int_0^{x_j} \xi \left(6\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{1/2} - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \xi^{5/2} \right) d\xi + x_j \int_{x_j}^1 (1-\xi) \left(6\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{1/2} - \frac{16}{5\sqrt{\pi}} \xi^{5/2} \right) d\xi.$$

Оцінка (33) має вигляд

$$\left\| \frac{u-u^h}{x(1-x)} \right\|_{\infty,\omega} \le Mh \| u \|_{1,\infty},$$

Таблиця 1

N	$\mathrm{err}_h = \left\Vert \dfrac{u^h(x) - u(x)}{x(1-x)} \right\Vert_{\infty,\, \omega_h}$	$Mh \, \Vert u \Vert_{1,\infty}$	$p = \log_2 \dfrac{\mathrm{err}_h}{\mathrm{err}_{h/2}}$
4	0.108432317883416745723216	1.774710098	—
8	0.0547152701094182091868434	0.887355049	0.986779384943758484362501
16	0.0275431416451253171904171	0.443677524	0.990250394523665314608884
32	0.0138219070074192345792445	0.221838762	0.994736448571623860157041
64	0.00692350462915187444833523	0.110919381	0.997382268069024220886207
128	0.00346479632445953474833496	0.055459690	0.998731957725250175509775
256	0.00173313158010428842310395	0.027729845	0.999389358381004698470821
512	0.000866742870244009382101217	0.013864922	0.999705219593735010043082

де $M = \left(1 - \dfrac{3-\alpha}{4\,\Gamma(3-\alpha)}\right)^{-1} \dfrac{3-\alpha}{\Gamma(3-\alpha)} = \dfrac{20}{6\sqrt{\pi} - 5} = 3{,}549420196\ldots,$

$$\Vert u \Vert_{1,\infty} = \Vert 1 - 3x^2 \Vert_{\infty} = 2\,.$$

Результати обчислень наведено в табл. 1.

Для числових розрахунків використано пакет Maple 18.

ВИСНОВКИ

Отримані в теоремах 2 і 3 вагові оцінки свідчать про те, що точність наближеного розв’язку першої крайової задачі для рівняння з дробовою похідною у примежових вузлах сітки вища, ніж в її внутрішніх вузлах. Теоретичні висновки узгоджуються з результатами обчислень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 762 p.
2. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Сб. «Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ»*. Киев: Ин.-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР. 1985. С 30–34.
3. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect. *C. R. Acad. Bulg. Sci. (Proc. of the Bulgarian Academy of Sciences*). 1989. Vol. 42, N 5. P. 41–44.
4. Makarov V.L., Demkiv L.I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi-linear elliptic equations with variable coefficients taking into account boundary effect. *Lect. Notes Comput. Sc.* 2005. Vol. 3401. P. 80–90.
5. Makarov V.L., Demkiv L.I. Weight uniform accuracy estimate of finite-difference method for Poisson equation taking into account boundary effect. *Lect. Notes Comput. Sc.* 2009. Vol. 5434. P. 92–103.
6. Макаров В.Л., Демків Л.І. Покращені оцінки точності традиційних різницевих схем для параболічних рівнянь. *Праці укр. матем. конгресу.* 2001. С. 31–42.
7. Макаров В.Л., Демків Л.І. Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект. *Доповіді НАН України.* 2003. № 2. С. 26–32.
8. Mayko N.V. Improved accuracy estimates of the difference scheme for the two-dimensional parabolic equation with regard for the effect of initial and boundary conditions. *Cybern. Syst. Anal.* 2017. Vol. 53, N 1. P. 99–107.
9. Machado J.A., Galhano A.M.S.F., Trujillo J.J. On development of fractional calculus during the last fifty years. *Scientometrics.* 2014. Vol. 98, Iss. 1. P. 577–582.
10. Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some of its application. *Cybern. Syst. Anal.* 2016. Vol. 52, N 5. P. 737–747.
11. Васильев В.В, Симак Л.А. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. Киев: НАН Украины, 2008. 256 с.

12. Demkiv I.I., Gavrilyuk I.P., Makarov V.L. Super-exponentionally convergent parallel algorithm for the eirgen value problems with fractional derivatives. *Comput. Methods Appl. Math.* 2016. Vol. 16, N 4. P 633–652.

13. Bangti J., Lazarov R., Vabishchevich P. Preface: Numerical analysis of fractional differential equations. *Comp. Methods Appl. Math.* 2017. Vol. 17, N 4. P. 643–646.

14. Makarov V.L, Mayko N.V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Computational Methods in Applied Mathematics.* 2018. Vol. 20, Iss. 10. DOI: https://doi.org/10.1515/cmam-2018-0002.

15. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. New York: Gordon and Breach Science, 1993. 1006 p.

16. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. Москва: Высшая школа, 1987. 296 с.

17. Evans L.C. Partial differential equations. 2nd ed. Providence, USA: AMS Press, 2010. 778 p.

18. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.

19. Гаврилюк І.П., Макаров В.Л. Методи обчислень. Частина 1. Київ: Вища школа, 1995. 367 с.

Надійшла до редакції 14.01.2018

В.Л. Макаров, Н.В. Майко

КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ В ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. Построены и исследованы сеточные методы решения первой краевой задачи для дифференциального уравнения с производной Римана–Лиувилля дробного порядка. При помощи функции Грина краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма, для дискретизации которого применяются интерполяционные полиномы Лагранжа. Доказаны весовые оценки точности сеточных задач, учитывающие влияние краевого условия Дирихле. Полученные результаты свидетельствуют о том, что в приграничных узлах сетки точность приближенного решения выше, чем в ее внутренних узлах. Теоретические результаты проиллюстрированы численным примером.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевое условие Дирихле, производная дробного порядка, сеточное решение, оценка погрешности, краевой эффект.

V.L. Makarov, N.V. Mayko

BOUNDARY EFFECT IN ERROR ESTIMATE OF THE GRID METHOD FOR SOLVING A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. We construct and analyze grid methods for solving the first boundary-value problem for an ordinary differential equation with the Riemann–Liouville fractional derivative. Using Green's function, we replace the boundaryvalue problem by the Fredholm integral equation, which is then discretized by means of the Lagrange interpolation polynomials. We prove the weight error estimates, which take into account the impact of the Dirichlet boundary condition. All the results give us clear evidence that the accuracy order of the grid scheme is higher near the endpointd of the line segment than in the inner points of the mesh set. We provide a numerical example to support the theory.

Keywords: fractional differential equation, Dirichlet boundary condition, grid solution, error estimate, boundary effect.

Макаров Володимир Леонідович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту математики НАН України, Київ, e-mail: makarovimath@gmail.com.

Майко Наталія Валентинівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: mayko@knu.ua.