УДК 681.61

Ю.Я. САМОХВАЛОВ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ В НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКЕ НА ОСНОВЕ СТРУКТУРНОЙ РЕЗОЛЮЦИИ

Аннотация. Рассмотрен подход к доказательству теорем с нечеткой и не вполне истинной аргументацией. В качестве правила доказательного рассуждения используется композиционное правило вывода Л. Заде, а его процедурная реализация осуществляется механизмом опровержения. В качестве такого механизма предложена структурная резолюция (S-резолюция), которая является обобщением принципа резолюций на нечеткие утверждения. S-резолюция основана на семантических индексах литер и их сходстве. Семантические индексы являются существенным моментом S-резолюции. Они содержат информацию, которая используется в качестве управляющей в процессе вывода. А сходство заключается в поиске литер для получения S-резольвенты. Комплексирование композиционного правила вывода Л. Заде и S-резолюции позволяет, с одной стороны, снять проблему корректности резольвент в нечеткой логике, а с другой — обеспечить регулярность процесса доказательства как в двузначной, так и в нечеткой логике.

Ключевые слова: автоматическое доказательство теорем, нечеткая теорема, принцип резолюций, нечеткая логика, приближенные рассуждения, обобщенное правило modus ponens, композиционное правило, нечеткие предикаты, нечеткие и лингвистические переменные.

АНАЛИЗ ПРОБЛЕМЫ И ПУТИ РЕШЕНИЯ

Установление отношений логического следствия или, что то же самое, доказательство теорем является одной из главных задач логики и представляет не только теоретический, но и практический интерес для многих научных и технических областей. Разнообразные проблемы можно попытаться решить, представляя описание задачи и относящуюся к ней информацию в виде логических аксиом и рассматривая различные случаи задачи как теоремы, которые нужно доказать.

В настоящее время резолюционный принцип ввиду высокой эффективности машинной реализации составляет основу автоматического доказательства теорем в двузначной логике. Однако двузначная логика непригодна для обработки нечеткой аргументации и выводов, характерных для приближенных рассуждений. В нечетких условиях использование резолюционного принципа для доказательства теорем должно базироваться не на двузначной, а на нечеткой логике. Вместе с тем в нечеткой логике вывод резолюционного типа может использоваться только с существенными ограничениями, так как он не всегда приводит к полезным результатам. Это обосновано тем, что в нечеткой логике логическое следствие D из посылки C значимо только тогда, когда для всех интерпретаций выполнено условие

$$T(C) \leq T(D), \tag{1}$$

где $T(C)$ и $T(D)$ — значения истинности высказываний C и D соответственно. В [1] показано, что применительно к методу резолюций это условие выполняется, если справедливо неравенство

$$T(C_1, C_2) \leq T(R(C_1, C_2))$$

или

$$T(L \wedge \rceil L) \leq T(R(C_1, C_2)), \tag{2}$$

где $R(C_1, C_2)$ — резольвента посылок C_1 и C_2, а L и $\rceil L$ — отрезаемые литеры в этих посылках. Таким образом, в нечеткой логике резольвенту можно принять в качестве вывода лишь тогда, когда отрезаемые литеры удовлетворяют условию (2).

Предлагалось несколько подходов к обобщению принципа резолюций на случай нечеткой логики [2–7]. Так, в [2] предложен принцип нечеткой резолюции для случая неопределенных предложений. В [3] введена нечеткая гиперрезолюция на основе антонимов и доказана ее полнота. Нечеткая резолюция на основе понятия сходства с расширенным алгоритмом унификации рассмотрена в работе [4]. В статье [5] получил обобщение принцип резолюций, который применим как для четко определенных, так и для неопределенных предложений. В работах [6, 7] рассмотрены метод и стратегии доказательства в нечеткой логике предикатов на основе опровержения с использованием общего (non-clausal) правила резолюций.

В целом предложенные в этих работах подходы не нашли широкого применения при решении прикладных задач, так как различные семантические предположения в таких подходах ограничивают механизмы вывода и делают их недостаточно гибкими.

В настоящее время, учитывая эффективное применение систем нечеткого вывода при решении широкого класса задач управления [8], предпринимаются попытки использовать методологию приближенных рассуждений и при нечетком выводе резолюционного типа [9–12]. Основная идея этих исследований заключается в том, чтобы получить некоторое обобщение принципа резолюций с учетом положений и подходов к реализации нечетких рассуждений. Так, в работе [12] рассмотрен принцип резолюций для нечетких формул, основанный на подобии и обратном приближенном рассуждении. Подобие является существенным моментом резолюции двух дизъюнктов и заключается в поиске в этих дизъюнктах почти комплементарных литер. А применение приближенных рассуждений заключается в преобразовании нечетких дизъюнкций в нечеткие импликации (нечеткие правила), которые затем выполняются методом обратного приближенного рассуждения. При этом предполагается, что нечеткие рассуждения вполне истинны. Такое обобщение принципа резолюций является естественным, однако проблема обеспечения значимости резолюционных выводов в смысле (1) остается открытой и требует использования дополнительных механизмов с целью получить корректные заключения.

Настоящая статья является развитием рассмотренных в работе [13] идей и механизмов использования принципа резолюций при доказательстве теорем с неопределенной аргументацией и предлагает альтернативный подход к доказательству в нечеткой логике. Его основная идея состоит в использовании композиционного правила нечеткого вывода Л. Заде (далее — композиционное правило) в качестве правила доказательного рассуждения, а принципа резолюций — как механизма его реализации. Такой синергизм позволяет снять проблему значимости резольвент в смысле (1) и обеспечить регулярность процесса доказательства.

ЛОГИКА НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

Исходя из теории доказательств, как раздела математической логики, установление истинности теоремы непосредственно зависит от используемых правил логического вывода. Такие правила должны обеспечивать причинно-следственную направленность процесса доказательства и учитывать форму представления теоремы.

Теория доказательств рассматривает теоремы как утверждения формального языка. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$ – формулы теории $\Im$. Тогда теорему можно представить в виде $F_1, F_2, \ldots, F_n \underset{\Im}{\vdash} G$, а ее доказательство сводится к доказательству того, что формула G выводима из формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ в теории $\Im$, что равносильно доказательству того, что формула G является логическим следствием множества формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Поэтому теорему можно представить также в виде

$$(F_1\ ,\ F_2\ ,\ ...,\ F_n) \to G \qquad (3)$$

и сформулировать ее правилом продукции: «Если $F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n$ истинны То истинна и G». Здесь формулы $F_1, F_2,\ \ldots,\ F_n$ являются аксиомами, а G — заключением теоремы.

Если формальной теорией $\Im$ является нечеткая логика, то формулы $F_1, F_2, \ldots$ $\ldots, F_n$, G (или их часть) в (3) являются нечеткими [14, 15]. При этом, согласно Л. Заде значение истинности заключения G есть истинным в приближенном смысле и его можно вывести из системы аксиом, используя приближенные рассуждения.

Под приближенными рассуждениями понимается процесс получения из нечетких посылок некоторых следствий, возможно также нечетких. Приближенные рассуждения эксплицируются правилами нечетких продукций, которые не только позволяют адекватно представить практические знания экспертов в той или иной проблемной области, но, что очень важно, продукционное представление знаний с точки зрения человека является прямым описанием логических выводов при решении конкретных задач. Кроме этого, правила нечетких продукций полностью корреспондируются с представлением теоремы в форме (3).

Концептуальной основой формализации правил нечетких продукций является обобщенный modus ponens $\dfrac{A^*,\ A \to B}{B}$, где A^*, A, B — нечеткие высказывания, которые могут быть нечеткими множествами. Это правило утверждает следующее: если $A \to B$ истинно и имеет место A^*, где A^* — в некотором смысле приближение A, то отсюда следует, что B приближенно истинно.

Методологическим базисом такой формализации является композиционное правило

$$B = A^* \circ (A \to B),$$

где знак $\circ$ — операция максиминной свертки A^* и $A \to B$.

Пусть U — некоторое множество элементарных нечетких высказываний, а $T\colon U \to [0, 1]$ — отображение истинности высказываний из U в интервал [0, 1]. Обозначим $T(C)$ значение истинности нечеткого высказывания $C \in U$. Тогда в общем случае истинность высказывания B определяется следующим образом:

$$T(B) = \mathrm{maxmin}\,(T(A \mid A_i^*),\ (T(A \to B)),\ i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где $T(A \mid A_i^*)$ — степень истинности посылки A при наличии высказывания A_i^*. При этом если нечеткое высказывание A является составным, то его истинность $T(A)$ вычисляется по классическим формулам min-конъюнкции и max-дизъюнкции.

Кроме того, вычисление истинности $T(A \to B)$ в (4) по известным формулам нечеткой импликации не представляется возможным, так как для этого необходимо значение $T(B)$. Поэтому вместо классической импликации $A \to B$ используем импликацию вида $A \to B\ (\eta)$, которая является основной в системах нечеткого вывода. Здесь η — коэффициент уверенности (весовой коэффициент), выражающий оценку степени истинности или относительный вес нечеткой продукции. Этот коэффициент является значением $T(A \to B)$. С учетом этого логическое следствие B нечеткого правила modus ponens всегда значимо в смысле (1).

Далее, понятие истинности в нечеткой логике имеет «размытый»» характер, при этом интервал [0, 1] используется как универсальное множество для задания лингвистической переменной «истинность». Нечеткая истинность определяется аксиоматически, причем разные авторы обосновывают это по-разному. Если все значения из интервала [0, 1] допустимы в качестве значений «истинно» или «ложно», то наиболее интуитивно понятными являются функции принадлежности Балдвина для термов «истинно» и «ложно»:

$$\mu \text{ «истинно» } (x) = x,$$

$$\mu \text{ «ложно» } (x) = 1 - x,$$

которые количественно градуируют принадлежность значений истинности $x \in [0, 1]$ нечетким множествам истинно и ложно.

В случаях, когда целесообразно разделить интервал [0, 1] на значения истинно и ложно, тогда для этих термов следует использовать предложенные Л. Заде следующие функции принадлежности:

$$\mu \text{ «истинно» } (x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le a,\\ 2\left(\dfrac{x-a}{1-a}\right)^2, & a<x\le \dfrac{a+1}{2},\\ 1-2\left(\dfrac{x-1}{1-a}\right)^2, & \dfrac{a+1}{2}<x\le 1,\end{cases}$$

$$\mu \text{ «ложно» } (x) = \mu \text{ «истинно» } (1-x),$$

где $a\in[0,1]$ — параметр, определяющий носители нечетких множеств истинно и ложно. Носителем для нечеткого множества истинно является интервал $(a,1]$, а для нечеткого множества ложно — интервал $[0,a)$.

Таким образом, использование нечетких правил продукций позволяет формировать естественные выводы, которые близки к содержательному рассуждению человека, и обеспечивать причинно-следственную направленность процесса доказательства.

Вместе с тем применение нечетких правил продукций для автоматического доказательства теорем недостаточно состоятельно. Это связано с тем, что в продукционных моделях существенным моментом является проверка применимости правил, которая предполагает использование (возможно, значительного количества) соответствующих правил вывода. А поскольку выбор таких правил относится к компетенции человека, это существенно затрудняет, а в некоторых случаях делает невозможным механизацию процесса доказательства. Таким образом, идея заключается в реализации нечеткого продукционного вывода единственным правилом — правилом резолюций.

Пусть задано правило $\dfrac{A^*,\ A\to B\ (\eta)}{B}$. Представим импликацию этого правила в виде $\rceil A\vee B$ и положим $C_1=A^*$ и $C_2=\rceil A\vee B$. Пусть также γ — мера сходства между A и A^*, которая будет представлять значение $T(A\mid A^*)$. Если применить правило резолюций к дизъюнктам C_1 и C_2, то получим резольвенту B, степень истинности которой согласно (4) можно получить по формуле $T(B)=\min(\gamma,\eta)$.

Далее, пусть посылка A является составным высказыванием. Без потери общности пусть $A=A_1\wedge\ldots\wedge A_n$ и имеют место утверждения $A_1^*,\ldots,A_n^*$. Тогда, последовательно отрезая литеры $\rceil A_i$ в дизъюнкте $\rceil A_1\vee\rceil A_2\vee\ldots\vee\rceil A_n\vee B$, получим заключение B, истинность которого вычисляется по формуле $T(B)=\min(T(A),\eta)$, где $T(A)=\min(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, а γ_i — мера сходства между A_i и A_i^*. При этом, что очень важно, необходимость проверки резолюционных выводов (резольвент) на значимость их в смысле (2) отпадает. В целом эти положения будем рассматривать как процедурный базис нечеткого вывода при доказательстве теорем в нечеткой логике.

СЕМАНТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Чтобы реализовать процедурный базис, рассмотренный выше, необходимо различать дизъюнкты фактов, правил и заключения теоремы. Для их идентификации используем семантические индексы [13], которые позволяют структурировать множество дизъюнктов и придать ему осмысленный характер.

Семантический индекс присваивается каждой литере и может быть формализован различным способом. Представим его фреймом — кортежем вида $<N,S_1,S_2,S_3>$, где N – имя (семантический индекс литеры); S_1 — множество слотов, содержащих факты, которые определяют декларативную семантику литеры;

S_2 — множество слотов, которые обеспечивают связи с другими литерами теоремы (каузальные, семантические и т.д.); S_3 — множество слотов, обеспечивающих преобразования и определяющие процедурную семантику литеры. Здесь слоты множества S_1 являются обязательными, а слоты множеств S_2 и S_3 — дополнительными.

К обязательным слотам относятся *статус* и *истинность*. *Статус* литеры определяет ее принадлежность к элементам теоремы и может принимать следующие значения: ф — литера-факт, *а*(к) — литера-антецедент (консеквент) правила, з — литера-заключение теоремы. *Статус* также может принимать значение *о* — отрезанная литера в результате применения резолюции.

Значением слота *истинность* для литер-фактов, антецедентов и заключения теоремы является степень их истинности; для литер-консеквентов — коэффициент уверенности соответствующих правил. Заметим, что при изменении *статуса* литеры или ее истинности соответствующие значения индекса также изменяются.

Дополнительные слоты из соответствующих множеств могут отражать прикладные особенности теоремы, связанные, например, с ad hoc стратегиями, которые используются при решении различных задач. Так, в качестве слота множества S_2 может быть слот *связь*, обеспечивающий дедуктивную связь правил. Значением этого слота может быть символ «с». Например, пусть правило вывода задано в следующем виде:

$$R:(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(x, y, u) \wedge P(y, z, v) \wedge P(u, z, w) \rightarrow$$
$$\rightarrow P(x, v, w)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall u)(\forall v)(\forall w)(P(x, y, u) \wedge P(y, z, v) \wedge$$
$$\wedge P(x, v, w) \rightarrow P(u, z, w)).$$

В клаузальном виде это правило представлено двумя дедуктивно-связанными дизъюнктами-правилами:

1) $\urcorner P^1(x, y, u) \vee \urcorner P^2(y, z, v) \vee \urcorner P^3(u, z, w) \vee P^4(x, v, w)$,

2) $\urcorner P^5(x, y, u) \vee \urcorner P^6(y, z, v) \vee \urcorner P^7(x, v, w) \vee P^3(u, z, w)$.

Литеры дизъюнктов проиндексированы для их условной идентификации. В этих правилах литеры $P^4(x, v, w)$ и $\urcorner P^7(x, v, w)$ обеспечивают их дедуктивную связь. Это означает, что после срабатывания правила п. 1), т.е. получения литеры $P^4(x, v, w)$ в качестве резольвенты, эта литера будет резольвировать с литерой $\urcorner P^7(x, v, w)$ правила п. 2).

Кроме этого, в качестве слота множества S_3 может быть слот *порядок*, который указывает на последовательность отрезания литер антецедента правила в случае наличия возможных вариантов. Для правила п. 1), например, возможна такая последовательность отрезания литер: 3, 1, 2. Эти числа будут значениями слота *порядок* семантических индексов литер антецедента этого правила. В целом семантические индексы можно рассматривать, как управляющую информацию и использовать ее в процессе доказательства для сокращения пространства поиска решения.

Под структурированным множеством дизъюнктов будем понимать такое множество, в котором каждой литере присвоен семантический индекс. В дальнейшем (если не оговорено противное) будем считать, что рассматриваемое множество дизъюнктов является структурированным.

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТЕОРЕМЫ

Как было отмечено, любую задачу практики можно попытаться решить, представляя ее описание и относящуюся к ней информацию в виде логических аксиом и рассматривая различные постановки задачи как теоремы, требующие доказательства. Поэтому в дальнейшем понятия «задача» и «теорема», а также «решение задачи» и «доказательство теоремы» будем считать синонимами.

Процессу доказательства в логике предикатов предшествует подготовительный этап, который состоит в аксиоматизации посылок и заключении теоремы, заданной на естественном языке. К операциям этого этапа относятся построение формул языка предикатов, приведение их в предваренную нормальную форму и затем в скулемовскую стандартную форму или просто в стандартную форму (конъюнктивную нормальную форму). В результате теорема будет представлена в клаузальном виде.

В предлагаемом подходе указанные подготовительные операции также имеют место. Сначала теорема представляется на естественном языке. Основу вербального описания ее фактов и заключения составляют четкие и нечеткие элементарные высказывания (утверждения), которые могут быть двух типов.

1. Высказывание «a есть b». Если высказывание четкое, то a — это наименование сущности, а b — наименование ее свойства. Если высказывание нечеткое, тогда a и b являются наименованием лингвистической переменной и ее значением соответственно.

2. Высказывание «$a \; R \; b$», где a, b — элементы множеств A и B, а R — наименование отношения между a и b. Если отношение нечеткое, то R — нечеткая переменная. Будем рассматривать только бинарные отношения, так как n-арные отношения, во-первых, сложны для восприятия и обработки, а во-вторых, при необходимости их можно представить в виде естественного соединения бинарных отношений.

Вербализация правил вывода теоремы осуществляется высказываниями в форме структурированного текста: «Если *условие* То *заключение* (η)». Здесь η является коэффициентом уверенности правила. Основу вербального описания условий и заключений правил также составляют четкие и нечеткие элементарные высказывания, которые могут содержать предметные переменные.

Относительно практической направленности теорем сделаем несколько уточнений. В качестве фактов и заключения теоремы будем использовать только элементарные высказывания. Поскольку факты могут быть не вполне достоверными (например, разведданные), каждому из них соответствует коэффициент достоверности r. Под достоверностью факта будем понимать свойство содержащейся в нем информации отражать объективную реальность с необходимой точностью. При этом источником фактов может быть как человек, так и техническое устройство. Вопросы оценки достоверности информации рассмотрены в работах многих авторов, например в [16, 17], поэтому для сокращения объема статьи их опускаем. Заметим только, что коэффициенты достоверности и уверенности принадлежат интервалу $[0, 1]$ и по умолчанию равны единице.

Условия правил продукций могут иметь сложную логическую структуру и представлять собой высказывания, составленные из элементарных с помощью операций И, ИЛИ, НЕ. В качестве заключений правил будем рассматривать только элементарные высказывания.

Теорема, заданная на естественном языке, отображается на некоторый формальный язык. Пусть S_T — множество объектов теоремы T (посылки и заключение), S_L — множество объектов (формул) языка L, D_T — терминологический словарь понятий и отношений предметной области теоремы T. Необходимо построить отображение $\Im: S_T \underset{D_T}{\to} S_L$, которое переводит вербальное описание теоремы T в ее формальное представление некоторого языка L. Это отображение строится на основе словаря D_T, который позволяет однозначно понимать и обозначать термины данной задачи. При этом в качестве языка L будем использовать расширенный язык логики предикатов.

Такое расширение осуществляется путем присоединения к алфавиту языка предикатов специальных констант и предикатных символов. Специальную константу — название терма лингвистической переменной обозначим строчной буквой с тильдой, а специальный предикатный символ — название нечеткого отношения обозначим прописной буквой с тильдой.

Четкие высказывания преобразуются в логические формулы стандартным способом, поэтому соответствующие механизмы здесь опускаем. Нечеткие высказывания первого типа представим предикатом $P(\widetilde{a})$, в котором предикатный символ P обозначает название лингвистической переменной, а терм $\widetilde{a}$ — ее значение. Это значение является нечеткой переменной, для которой строится функция принадлежности (ФП) $\mu_{\widetilde{a}}(x)$ ($x \in X$, где X — базовое множество переменной $\widetilde{a}$). Затем формируется семантический индекс литеры $P(\widetilde{a})$. Например, высказывание «мужчина молодого возраста» можно представить предикатом $P(\widetilde{a})$, где $P \triangleq$ «возраст мужчины», а $\widetilde{a} \triangleq$ «молодой».

Нечеткие высказывания второго типа эксплицируются предикатами $\widetilde{R}(x_1, y_1)$ и $\widetilde{R}(x, y)$, где $\widetilde{R}$ — название нечеткого отношения; $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$ — предметные константы; x, y — предметные переменные, определенные на множествах X и Y. При этом предикаты $\widetilde{R}(x_1, y_1)$ описывают факты и заключение теоремы, а предикаты $\widetilde{R}(x, y)$ входят в описания условий и заключений правил вывода. В этом случае для нечеткого отношения $\widetilde{R}$ строится функция принадлежности $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$ ($(x, y) \in X \times Y$). Например, высказывание «x значительно больше y» можно представить предикатом $\widetilde{R}(x, y)$, где $\widetilde{R} \triangleq$ «значительно больше», а $x, y \in R$.

Исходя из практики возможны ситуации, когда представить факты бинарными нечеткими предикатами затруднительно, а в некоторых случаях невозможно (например, когда механизмы доказательства теорем встроены в систему автоматического управления и в качестве фактов выступают телеметрические данные). Поэтому в таких ситуациях предлагается формировать нечеткие предикаты процедурно. А именно, представление нечеткого отношения предикатом $\widetilde{R}(x, y)$ позволяет утверждать: если $x_i \in X$, $y_j \in Y$, то элементы x_i и y_j находятся в отношении $\widetilde{R}$, т.е. если имеют место факты $Q(x_i) \triangleq$ «$x_i \in X$» и $S(y_j) \triangleq$ «$y_j \in Y$», то имеет место и факт $\widetilde{R}(x_i, y_j)$. При этом предикаты $Q(x_i)$ и $S(y_j)$ будем называть аффилированными с предикатом $\widetilde{R}(x, y)$ и обозначать их в семантическом индексе литеры $\widetilde{R}(x, y)$.

И, наконец, правила нечетких продукций представляются импликациями вида $A \rightarrow B\ (\eta)$, антецеденты и консеквенты которых формализуются выше описанным способом.

Операции приведения формул в предваренную нормальную форму и скулемизации аналогичны операциям в логике предикатов, поэтому для их реализации могут быть использованы стандартные алгоритмы.

В заключение сделаем несколько замечаний. Мы рассмотрели вопросы преобразования элементов теоремы в клаузальный вид как таковые, т.е. безотносительно к ее практическому применению. Поскольку большинство задач практики разрабатываются с учетом их многократного автоматизированного решения, целесообразно правила нечетких продукций, семантические индексы их литер и описания всех лингвистических и нечетких переменных, используемых в этих правилах, хранить в базе знаний. Тогда процесс доказательства теоремы будет включать два этапа:

— формирование теоремы, т.е. аксиоматизация исходных данных (фактов) и заключение теоремы, а также загрузка из базы знаний соответствующих правил и ФП;

— непосредственно доказательство теоремы.

СТРУКТУРНАЯ РЕЗОЛЮЦИЯ

Введем понятие структурной резолюции. Структурная резолюция (S-резолюция) — это уточнение единичной резолюции, использующее понятие, аналогичное понятию упорядоченного дизъюнкта. S-резолюция основана на семантических индексах литер и их сходстве. Семантические индексы являются ключевым понятием S-резолюции и используются для упорядочения литер в дизъюнктах и их идентификации. При этом S-резолюцию разрешается применять к посылкам, одна и только одна из которых является дизъюнктом-фактом, а в дизъюнктах-правилах разрешено отрезать только литеры-антецеденты. А сходство заключается в поиске литеры-факта, которая либо почти дополняет литеру в другой посылке, либо между этими литерами можно установить отношение сходства, используемое при фаззификации в системах нечеткого вывода. Прежде чем дать формальное определение S-резолюции, рассмотрим следующий пример.

Пусть теорема представлена структурированным множеством дизъюнктов, которые являются пропозициональными формулами:

$$C_1:\ {}_{0.8}A^{\text{ф}},$$
$$C_2:\ {}_{0.2}\rceil B^{\text{ф}},$$
$$C_3:\ \rceil A^{a}\vee B^{\text{к}}(0.7),$$
$$C_4:\ \rceil B^{a}\vee D^{\text{к}}(0.9),$$
$$C_5:\ \rceil A^{\text{з}},$$

где C_1, C_2 — дизъюнкты-факты; C_3, C_4 — дизъюнкты-правила $A\to B\,(\eta=0.7)$ и $B\to D$ $(\eta=0.9)$; C_5 — отрицание заключения теоремы. Для наглядности в этих дизъюнктах нижние индексы являются значениями истинности литер, верхние — принадлежность литер к элементам теоремы, а числа в скобках — весовые коэффициенты правил.

В данном случае S-резолюция не применима к дизъюнктам C_2, C_3 и C_3, C_4. При этом резольвентой дизъюнктов C_1 и C_3 есть дизъюнкт $B^{\text{к}}$, а резольвентой дизъюнктов C_1 и C_5 — пустой дизъюнкт.

Теперь дадим формальное определение S-резолюции. Следует различать четкие и нечеткие литеры. Четкая литера – это литера логики предикатов, а нечеткая литера определяет либо нечеткое отношение, либо ее термом является нечеткая переменная.

Пусть $C_1 = {}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ — дизъюнкт-факт, а C_2 — дизъюнкт-правило. Если литеры ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ и $L_2^a \in C_2$ — четкие и ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$, $\rceil L_2^a$ имеют наиболее общий унификатор σ, то дизъюнкт $(C_2\sigma - {}_{1-r_1}L_2^a\sigma)$ назовем S-резольвентой C_1 и C_2.

Предположим, что литеры ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ и $L_2^a \in C_2$ — нечеткие. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть эти литеры являются унарными предикатами: ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}} = {}_{r_1}P(\tilde{a}^*)$ и $L_2^a = \rceil P(\tilde{a})$, где P — название лингвистической переменной, $\tilde{a}^*$ и $\tilde{a}$ — ее значения (нечеткие переменные), заданные нечеткими множествами, которые определены на одном и том же базовом множестве X. Пусть также $\mu_1(x), x\in X$, и $\mu_2(x), x\in X$, — функции принадлежности нечетких множеств $\tilde{a}^*$ и $\tilde{a}$ соответственно. Введем меру $\gamma\in[0,1]$ сходства между нечеткими множествами $\tilde{a}^*$ и $\tilde{a}$. Тогда S-резольвентой C_1 и C_2 будет дизъюнкт $(C_2 - {}_{1-r}\rceil P(\tilde{a}))$, где $r=\gamma\cdot r_1$ — истинность высказывания $P(\tilde{a})$ при наличии высказывания $P(\tilde{a}^*)$. Когда предъявляются требования к уровню истинности заключения теоремы, можно задать пороговое значение ε и разрешать S-резолюцию тогда и только тогда, когда значение γ больше этого порога.

В настоящее время существует много методов, позволяющих определить меру сходства (различия) между двумя нечеткими множествами [18]. Проведенный в данной работе анализ различных мер сходства показывает, что невозможно выделить единую конкретную меру подобия, которая одинаково хорошо «подходит» для любой проблемы. С учетом этого в [19] предложен показатель подобия, основанный на параметрической метрике Минковского (p-метрике). Варьируя параметром p, можно получить различные функции расстояния в евклидовом пространстве, а следовательно, и различные меры сходства, ориентированные на конкретную проблему. Это позволяет обеспечить гибкость такой меры и в некотором смысле ее универсальность.

Пусть $\tilde{A}(x)$ и $\tilde{B}(x)$, $x\in X$, — нечеткие множества. Тогда показатель подобия определяется формулой

$$S(\tilde{A},\tilde{B}) = 1-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_{\tilde{A}}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

где n — мощность множества X и $p \geq 1$ — параметр (вещественное число), причем чем больше p, тем больше мера подобия. Этот параметр определяется для каждой теоремы. С учетом сказанного такой показатель подобия будем использовать в качестве меры сходства нечетких множеств.

Пусть теперь $\widetilde{a}^* = x_1 \in X$. В этом случае мерой сходства предикатов $P(\widetilde{a})$ и $P(\widetilde{a}^*)$ является степень соответствия (принадлежности) элемента x_1 нечеткому множеству $\widetilde{a}$, т.е. $\gamma = \mu_2(x_1)$.

Случай 2. Пусть литеры ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ и $L_2^a \in C_2$ являются бинарными предикатами: ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}} = {}_{r_1}\widetilde{R}(x_1, y_1)$, $L_2^a = \rceil \widetilde{R}(x\ y)$, где $\widetilde{R}$ — нечеткое отношение между предметными переменными x, y, которые определены на множествах индивидных констант X и Y, а $\mu_{\widetilde{R}}(x, y)$ — функция принадлежности нечеткого отношения $\widetilde{R}$. В этом случае мерой сходства этих предикатов является степень $\gamma = \mu_{\widetilde{R}}(x_1, y_1)$ соответствия (принадлежности) пары (x_1, y_1) нечеткому отношению $\widetilde{R}$, а S-резольвентой будет дизъюнкт

$$(C_2\sigma -_{1-r} \rceil \widetilde{R}(x\ y)\sigma),$$

где $\sigma = \{x_1 / x,\ y_1 / y\}$, $r = \gamma \cdot r_1$.

В случае отсутствия факта $\widetilde{R}(x_1, y_1)$ выполняется поиск литер-фактов, аффилированных с предикатом $\widetilde{R}(x, y)$. Пусть ${}_{r_1}Q^{\text{ф}}(x_1)$ и ${}_{r_2}S^{\text{ф}}(y_1)$ являются такими литерами. В этом случае формируется факт ${}_r\widetilde{R}(x_1, y_1)$, где $r = \min(r_1, r_2)$, и аналогично вычисляется S-резольвента.

Теперь рассмотрим случай, когда $C_1 = {}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ — дизъюнкт-факт, а $C_2 = L_2^{\text{з}}$ — дизъюнкт-заключение. Если литеры ${}_{r_1}L_1^{\text{ф}}$ и $L_2^{\text{з}}$ четкие и контрарные, то S-резольвентой C_1 и C_2 будет пустой дизъюнкт $\square$. При этом истинность заключения $L_2^{\text{з}}$ будет равна r_1. Если дизъюнкты C_1 и C_2 нечеткие и почти комплементарные, то S-резольвентой этих дизъюнктов также будет пустой дизъюнкт, а истинность заключения $L_2^{\text{з}}$ будет вычислена согласно случаям 1 и 2.

Мы рассмотрели различные варианты возможного применения S-резолюции. Теперь рассмотрим случай, когда S-резольвентой является заключение некоторого правила.

Пусть в процессе вывода в качестве S-резольвенты получена литера-консеквент $L_n^{\text{к}}$ правила $\rceil L_1^a \vee \rceil L_2^a \vee ,..., \vee \rceil L_{n-1}^a \vee L_n^{\text{к}}$, что равносильно «срабатыванию» продукционного правила $(L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}) \to L_n(\eta)$. В этом случае степень истинности литеры $L_n^{\text{к}}$ вычисляется согласно (4):

$$r = \min((1 - \max r_i), \eta), \tag{5}$$

где r_i — истинность отрезанной литеры $\rceil L_i^a$ антецедента данного правила.

Если литера-консеквент $L_n^{\text{к}}$ эксплицирует нечеткое высказывание, то выполняется коррекция ФП соответствующей нечеткой переменной путем ее редукции (отсечения). Для этого можно использовать один из методов активизации нечеткого вывода, например классическую min–активизацию:

$$\mu'(x) = \min(r, \mu(x)),$$

где $\mu'(x)$, $\mu(x)$ — соответственно усеченная и исходная ФП нечеткой переменной заключения правила. Затем эта литера переводится в разряд фактов $L_n^{\text{ф}}$. При этом если уже существует факт ${}_qL_n^{\text{ф}}$ такой, что $q \geq r$, то факт ${}_rL_n^{\text{ф}}$ удаляется, иначе удаляется факт ${}_qL_n^{\text{ф}}$.

Пусть D — множество дизъюнктов. Под S-выводом будем понимать вывод, в котором каждый дизъюнкт является либо членом D, либо S-резольвентой. Далее, пусть дана теорема T: $(F_1, F_2, \ldots, F_n) \to G$. Пусть также D — множество дизъюнктов, которые являются конъюнктивной нормальной формой формул F_1, $F_2, \ldots, F_n$, а G^* — дизъюнкт-заключение теоремы. Тогда если справедлива теорема T, то существует S-вывод пустого дизъюнкта из множества $(D \cup \rceil G^*)$.

Вывод заключения G этой теоремы имеет дедуктивный характер и его можно представить следующей системой правил продукций: $(F_1 \to (F_2 \to \ldots \ldots \to (F_{n-1} \to (F_n \to G)))\ldots)$. Так как реализация правил продукций осуществляется S-резолюцией, то, применяя ее, получим дизъюнкт G^* в качестве S-резольвенты. Следовательно, $(D \cup \rceil G^*) \mid\!\!— \Box$, т.е. существует S-вывод пустого дизъюнкта из множества $(D \cup \rceil G^*)$.

СТРАТЕГИЯ УПРАВЛЕНИЯ ВЫВОДОМ

Использование семантических индексов литер позволяет в процессе доказательства применять такие эвристики, как прямой или обратный вывод.

Прямой логический вывод представляет собой цепочку рассуждений, которая ведет от исходных аксиом к целевому выражению. Основной недостаток прямого метода состоит в его ненаправленности, что приводит к росту промежуточных заключений, не связанных с целевым утверждением. Однако в случаях, когда необходимо получать заключения на основе поступающих результатов восприятия без учета какого-либо конкретного запроса, прямая цепочка рассуждений является единственно возможным методом логического вывод.

При обратном выводе поиск доказательства начинается с целевого утверждения. Обратный вывод является направленным. Каждый шаг вывода в этом случае связан всегда с исходной целью. Для обратных выводов характерна тенденция исключения из рассмотрения правил, не имеющих прямого отношения к заданной цели. Поэтому использование обратной цепочки рассуждений предпочтительнее. В качестве иллюстрации приведем один из возможных алгоритмов доказательства теоремы обратным методом.

Пусть теорема T представлена следующим структурированным множеством дизъюнктов:

$$C_1: M^{\Phi}(a),$$
$$C_2: {}_rC^{\Phi}(\widetilde{b}),$$
$$C_3: D^{\Phi}(v_1),$$
$$C_4: \rceil M^a(x) \vee \rceil D^a(\widetilde{e}) \vee L^{\kappa}(x)(\eta_1),$$
$$C_5: \rceil M^a(x) \vee \rceil L^a(x) \vee \rceil C^a(\widetilde{g}) \vee A^{\kappa}(x)(\eta_2),$$
$$C_6: \rceil A^3(a).$$

Здесь дизъюнкты $C_1 \div C_3$ — факты; C_4, C_5 — правила; C_6 — заключение теоремы. Пусть также $\mu_{\widetilde{g}}(u)$, $\mu_{\widetilde{b}}(u)$, $\mu_{\widetilde{e}}(v)$ — функции принадлежности нечетких переменных $\widetilde{g}, \widetilde{b}, \widetilde{e}$. Причем нечеткие переменные $\widetilde{g}$ и $\widetilde{b}$ заданы нечеткими множествами и определены на одном и том же универсальном множестве $U = (u_1, \ldots, u_m)$, а переменная $\widetilde{e}$ задана на универсальном множестве $V = (v_1, \ldots, v_n)$.

Далее, пусть M — множество фактов, F — множество правил вывода, $G_0 = \rceil A^3$ — исходная целевая формула (цель). Тогда теорему T можно представить кортежем $< M, F, G_0 >$ и ее доказательство описать следующим алгоритмом.

Шаг 1. Проверить на противоречивость множество $\{M \cup G_0\}$. Если $\{M \cup G_0\} \mid\!\!— \Box$, то завершить работу; теорема T доказана. В противном случае следующий шаг.

Шаг 2. Поместить цель G_0 в список LIST = (G_0) и найти правило, консеквент которого позволил бы достичь цель G_0. Если подходящего правила нет — завершить процесс; теорема не имеет решения. В данном случае таким правилом является дизъюнкт C_5. Его антецедент задать в качестве новой цели $G_1 = \rceil M^a(a) \vee \rceil L^a(a) \vee \rceil C^a(\widetilde{g})$ и поместить ее в список LIST $= (G_1, G_0)$.

Шаг 3. Применить S-резолюцию к C_1 и G_1:

$$G_7 : \rceil L^a(a) \vee \rceil C^a(\widetilde{g}) \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Шаг 4. Применить S-резолюцию к C_2 и C_7:

$$C_8 : \rceil L^a(a) \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Шаг 5. Так как нет факта, который мог бы резольвировать с C_8, то использовать антецедент правила C_4 в качестве новой цели $G_2 = \rceil M^a(a) \vee \rceil D^a(\widetilde{e})$ и поместить ее в список LIST = (G_2, G_1, G_0).

Шаг 6. Применить S-резолюцию к C_1 и G_2:

$$C_9 : \rceil D^a(\widetilde{e}) \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Шаг 7. Применить S-резолюцию к C_3 и C_9:

$$C_{10} : \square \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Удалить G_2 из списка LIST.

Шаг 8. Вычислить согласно (5) значение r истинности консеквента $L^{\text{к}}(a)$ правила C_4 и перевести его в разряд фактов. В результате получим литеру C_{11}: ${}_rL^{\text{ф}}(a)$.

Шаг 9. Применить S-резолюцию к C_8 и C_{11}:

$$C_{12} : \square \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Удалить G_1 из списка LIST.

Шаг 10. Вычислить аналогично значение r истинности консеквента $A^{\text{к}}(a)$ правила C_5 и перевести его в разряд фактов. В результате получим литеру

$$C_{13} : {}_rA^{\text{ф}}(a).$$

Шаг 11. Применить S-резолюцию к C_{13} и C_6:

$$C_{14} : \square \text{ — } S\text{-резольвента.}$$

Теорема доказана с результирующим правилом C_5, при этом истинность ее заключения равна r. Аргументацией этого заключения является следующая цепочка рассуждений: исходные факты $\to$ правило C_4 $\to$ правило C_5 $\to$ $\to$ заключение теоремы.

Шаг 12. Если нет других подходящих правил, консеквенты которых позволили бы достичь цель G_0, то доказательство завершить. В противном случае выбрать правило, антецедент которого имеет наименьше литер, и процесс повторить. Если правила имеют антецеденты одинаковой длины, то доказательство проводится для каждого из них. В этом случае истинность заключения теоремы будет максимальной при всех результирующих правилах, а аргументация этого заключения будет аргументацией доказательства теоремы.

Рассмотренный алгоритм включает два этапа. На первом этапе (шаги 1–8) определяется цепочка рассуждений, ведущая к цели, а на втором этапе (шаги 9–11) вычисляется истинность заключений правил теоремы.

ОСОБЕННОСТИ ПРЕДЛАГАЕМОГО ПОДХОДА

1. В классической схеме доказательства резольвенты присоединяются к исходному множеству дизъюнктов, что приводит к его увеличению, а соответственно

и к потери эффективности. Применяя S-резолюцию, получаем в качестве резольвенты укороченную неединичную посылку. Поскольку статус отрезанной литеры фиксируется в ее семантическом индексе, фактически нет необходимости эту литеру отрезать, а резольвенту присоединять к текущему множеству.

2. Применение S-резолюции позволяет блокировать бесконечные ветви процесса доказательства. Например, пусть дано множество дизъюнктов:

1) $\rceil P(a)$,

2) $\rceil P(f(f(x))) \vee P(x)$.

Применяя резолюцию к этим дизъюнктам, можно получить следующий бесконечный вывод: $\rceil P(f(f(a)))$, $\rceil P(f(f(f(f(a)))))$, …

Теперь представим это множество в структурированном виде:

3) $\rceil P^{\text{ф}}(a)$,

4) $\rceil P^{a}(f(f(x))) \vee P^{\text{к}}(x)$.

В этом случае S-резолюция к таким дизъюнктам не применима по определению.

3. Применение S-резолюции дает возможность осуществлять доказательство при наличии противоречивой информации, которая в классической логике позволяет из утверждения A и его отрицания $\rceil A$ получить любое суждение. Например, пусть теорема представлена множеством дизъюнктов:

1) A,

2) $\rceil A$,

3) $\rceil B \vee C$,

4) $\rceil P$.

Здесь дизъюнкты 1) и 2) — факты, 3) — правило вывода, 4) — отрицание заключения теоремы. Очевидно, что в этом случае утверждение P выводимо. С использованием S-резолюции получить такой вывод невозможно, так как к дизъюнктам-фактам S-резолюция также не применима.

4. Применение композиционного правила в качестве правила вывода позволяет перейти от «мелких», не естественных для нашего понимания заключений, какими являются резольвенты, к продукционным выводам, которые близки к содержательному рассуждению, привычному для нас, и позволяют интуитивно проследить за каждым шагом процесса доказательства.

5. Введение в алфавит языка логики предикатов специальных констант, обозначающих термы лингвистических переменных, и предикатных символов, которые отображают нечеткие отношения, позволяет осуществить доказательство как в нечеткой, так и в двузначной логике как ее частном случае. При этом допускается использование не вполне истинной аргументации.

6. Предложенные механизмы позволяют получить более простой S-вывод. Аргументацией этому могут быть следующие рассуждения.

Известно, что сложность вывода определяется числом дизъюнктов в его линейной записи. Пусть D — множество дизъюнктов; $\square$ — пустой дизъюнкт, причем $D \mid\!\!-\!\!- \square$. Обозначим $\Im$ вывод дизъюнкта $\square$ из D, где каждый дизъюнкт является либо членом D, либо резольвентой. Поэтому сложность вывода $\Im$ непосредственно зависит от количества резольвент. При этом будем различать резольвенты двух видов: полезные резольвенты, которые позволяют получить пустой дизъюнкт, и бесполезные резольвенты.

Полезные резольвенты формируются, когда отрезаемыми являются литера дизъюнкта-факта и литера антецедента дизъюнкта-правила. При этом чем меньше литер содержат посылки, тем меньше полезных резольвент. В предлагаемом подходе резольвенты всегда полезны, так как указанное условие получения резольвент является условием применения S-резолюции. Сокращение таких резольвент может быть обеспечено за счет выбора правил с короткими антецедентами.

Генерирование бесполезных резольвент возможно в двух случаях. В первом случае они могут быть получены, когда резолюция применяется к посылкам-фактам или посылкам-правилам. Если множество дизъюнктов не структурировано, то такое применение резолюции возможно. Применение S-резолюции позволяет заблокировать заведомо неперспективные посылки и таким образом сократить пространство поиска решения. Во втором случае бесполезные резольвенты могут быть получены, когда возможны различные варианты применения резолюции, например если теорема представлена следующим множеством дизъюнктов:

1) $P(i(x),\ x,\ e)$,
2) $P(e,\ x,\ x)$,
3) $\rceil P(x, y, u) \vee \rceil P(y, z, v) \vee \rceil P(u, z, w) \vee P(x, v, w)$,
4) $\rceil P(x, y, u) \vee \rceil P(y, z, v) \vee \rceil P(x, v, w) \vee P(u, z, w)$,
5) $\rceil P(a, e, a)$.

Далее будем считать, что это множество структурировано. В нем дизъюнкты 1) и 2) являются фактами, дизъюнкты 3) и 4) — правилами вывода, дизъюнкт 5) — заключением теоремы. В этом случае S-резолюция к дизъюнктам 3) и 4) не применима по определению. А при применении S-резолюции, например, к дизъюнктам 1) и 3) неопределенность выбора резольвирующих литер может быть устранена с учетом последовательности их отрезания, которая задается в семантических индексах этих литер.

Также неопределенность выбора резольвирующих литер может быть уменьшена, используя дедуктивную связь правил и обратную цепочку рассуждений, которая позволяет исключить из рассмотрения правила, не имеющие прямого отношения к заключению теоремы.

Таким образом, на основании сказанного можно заключить, что сокращение резольвент в S-выводе происходит при учете управляющей информации, которая отражает специфику задачи и находится в семантических индексах литер теоремы. А поскольку известные обобщения принципа резолюций на нечеткие утверждения такую информацию не используют, то можно считать, что предложенный подход к доказательству теорем является более простым и более гибким.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ

В настоящее время нечеткое управление является одной из наиболее активных и результативных областей применения теории нечетких множеств. Алгоритмы нечеткого управления основаны на нечетком выводе и применяются в сложных технических системах в качестве интеллектуальных контроллеров [20]. Основная функция систем нечеткого управления заключается в выработке в соответствии с правилами нечетких продукций управляющих воздействий на основе поступающей от датчиков телеметрической информации. Такие системы относятся к классу рефлексных систем, функционирование которых основано на непосредственном отображении состояний в действия.

Однако в общем случае цель управления заключается в том, чтобы на основании анализа текущего состояния объекта управления и внешней среды определить управляющие воздействия, реализация которых позволит обеспечить желаемое поведение или состояние объекта управления. Поэтому в большинстве проблемных ситуаций управление по своей сути должно быть ситуационным.

Основными задачами ситуационного управления являются оценка (распознавание) ситуаций, определение управляющих решений и выработка соответствующих воздействий на объект управления. В [21] показано, что задачи оценки ситуаций и выработки управляющих решений в моделях ситуационного управления могут быть сформулированы как задачи доказательства теорем, а процедуры их решения (в совокупности) можно рассматривать как нечеткий недетерминированный секвенциальный автомат выработки управляющих решений. Использование такого автомата в технических системах представляется особенно перспективным при управлении автономными роботизированными системами [22], например беспилотными летающими аппаратами, которые в настоящее время широко используются как в мирных, так и в военных целях. Такие роботы должны самостоятельно действовать в заранее неопределенных условиях, оценивать окружающую среду, принимать и реализовывать соответствующие управляющие решения. Поэтому применение нечеткого секвенциального автомата, особенно совместно с механизмами нечеткого управления, позволит обеспечить в некоторой мере автономность и целенаправленное поведение роботизированных систем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен подход к доказательству теорем с нечеткой аргументацией. В качестве правила доказательного рассуждения используется композиционное правило, а его процедурная реализация осуществляется S-резолюцией. Такое комплексирование позволяет, с одной стороны, снять проблему значимости резольвент в смысле (1), а с другой — обеспечить регулярность процесса доказательства как в нечеткой логике, так и в ее частном случае — двузначной логике. При этом допускается использование не вполне истинной аргументации.

В целом данный подход может быть эффективным методом при построении доказательства теорем в нечеткой логике с использованием процедуры опровержения. Он не претендует на завершенность и служит лишь иллюстрацией использования механизмов приближенных рассуждений для получения нечеткого вывода резолюционного типа и может быть использован в качестве методологической основы для разработки регулярных алгоритмов доказательства теорем с нечеткой аргументацией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мукаидоно М.А. Нечеткий вывод резолюционного типа. В кн.: *Нечеткие множества и теория возможностей* (под ред. Ягера Р.). Москва: Радио и связь, 1986. С. 153–161.
2. Dubois D., Prade H. Necessity and the resolution principle. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics.* 1987. Vol. 17, N 3. P. 474–478.
3. Kim C.S., Kim D.S., Park J. A new fuzzy resolution principle based on the antonym. *Fuzzy Sets and Systems.* 2000. Vol. 113, N 2. P. 299–307.
4. Fontana F.A., Formato F. A similarity-based resolution principle. *International Journal of Intelligent Systems*. 2002. Vol. 17, N 9. P. 853–872.
5. Raha S., Ray K.S. Approximate reasoning based on generalised disjunctive syllogism. *Fuzzy Sets and Systems.* 1994. Vol. 61, N 2. P. 143–151.
6. Habiballa H. Resolution principle in fuzzy predicate logic. *Acta Fac. Paed. Univ. Tyrnaviensis. Ser. C.* 2005. N 9. P. 3–12
7. Habiballa H. Resolution principle and fuzzy logic. *Fuzzy Logic — Algorithms, Techniques and Implementations.* Ch. 3. London: IntechOpen, 2012. P. 20.
8. Штовба С.Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. Москва: Горячая линия. Телеком, 2007. 288 с.
9. Raha S., Pal N.R., Ray K.S. Similarity based approximate reasoning: Methodology and application. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernatics*. Part A: Systems and humans. 2002. Vol. 32, N 4. P. 541–547.
10. Mondal B., Mazumdar D., Raha S. Similarity in approximate reasoning. *International Journal of Computational Cognition*. 2006. Vol. 4, N 3. P. 46–56.
11. Mondal B., Raha S. Similarity-based inverse approximate reasoning. *IEEE Transaction on Fuzzy Systems*. 2011. Vol. 19, N 6. P. 1058–1071.
12. Mondal B., Raha S. Approximate reasoning in fuzzy resolution. *International Journal of Intelligence Science.* 20113. Vol. 3, N 2. P. 86–98.
13. Самохвалов Ю.Я. Метод проблемно-ориентированного доказательства в нечеткой логике. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 5. С. 58–68.
14. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Москва: Мир, 1976. 165 с.
15. Bofill M., Moreno G., Vázquez C., Villaret M. Automatic proving of fuzzy formulae with fuzzy logic programming and SMT. Actas de las XIII Jornadas sobre Programación y Lenguajes, PROLE'13, Jornadas SISTEDES, Madrid, 18–20 September 2013. P. 151–165.
16. Самохвалов Ю.Я. Оценка обоснованности управленческих решений на основе нечеткой логики. *Управляющие системы и машины*. 2017. № 3. С. 26–34.

17. Самохвалов Ю.Я. Согласование экспертных оценок в матрицах отношений предпочтения. *Управляющие системы и машины.* 2002. № 6. С. 49–53.
18. Zwick R., Carlstein E., Budescu D.V. Measures of similarity among fuzzy concepts: A comparative analysis. *International Journal of Approximat.* 1987. Vol. 1, N 2. P. 221–242.
19. Mondal B., Mazumdar D., Raha S. Similarity in approximate reasoning. *International Journal of Computational Cognition*. 2006. Vol. 4, N 3. P. 46–56.
20. Wilamowski B.M., Irwin J.D. (Eds.) The industrial electronics handbook: Intelligent systems. Boca Raton: CRC Press, 2011. 610 p.
21. Самохвалов Ю.Я. Автоматическое доказательство теорем и нечеткий ситуационный поиск решений. *Кибернетика и системный анализ.* 2001. № 4. С. 53–60.
22. Ford M. The rise of the robots: Technology and the threat of jobless future. New York: Basic Books, 2015. 334 p.

Надійшло до редакції 22.01.2018

Ю.Я. Самохвалов

ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ У НЕЧІТКІЙ ЛОГІЦІ НА ОСНОВІ СТРУКТУРНОЇ РЕЗОЛЮЦІЇ

Анотація. Розглянуто підхід до доведення теорем у нечіткій логіці і не цілком істинною аргументацією. Як правило доказового міркування використовують композиційне правило виведення Л. Заде, а його процедурна реалізація здійснюється механізмом спростування. Структурна резолюція (*S*-резолюція), яка є узагальненням принципу резолюцій на нечіткі твердження, запропонована як такий механізм. *S*-резолюція базується на семантичних індексах літер і їхній схожості. Семантичні індекси є істотним моментом *S*-резолюції. Вони містять інформацію, яка використовується як керівна у процесі виводу, а схожість полягає у пошуку літер для отримання *S*-резольвенти. Комплексування композиційного правила виводу Л. Заде і *S*-резолюції дозволяє, з одного боку, зняти проблему коректності резольвент в нечіткій логіці, а з іншого — забезпечити регулярність процесу доведення як в двозначній, так і в нечіткій логіці.

Ключові слова: автоматичне доведення теорем, нечітка теорема, принцип резолюцій, нечітка логіка, наближені міркування, узагальнене правило modus ponens, композиційне правило, нечіткі предикати, нечіткі і лінгвістичні змінні.

Yu.Ya. Samokhvalov

PROOF OF THEOREMS IN FUZZY LOGIC ON THE BASIS OF STRUCTURAL RESOLUTION

Abstract. The author considers the approach to proof of theorems with fuzzy and not quite true argumentation. In this approach, the Zadeh composition rule of correctness is used as a rule of evidence, and its procedural implementation is carried out by refutation mechanism. As such a mechanism, a structural resolution (*S*-resolution) is proposed, which is a generalization of the principle of resolutions to fuzzy statements. *S*-resolution is based on semantic indices of letters and their similarity. Semantic indices are a key point of S-resolution. They contain information that is used as a control for the derivation process. And similarity implies finding letters to get S-resolvent. Combining the Zadeh compositional derivation rule and S-resolution allows, on the one hand, solving the problem of correctness of resolvents in fuzzy logic, and on the other hand, ensuring the regularity of the proof process in both two-valued and fuzzy logic.

Keywords: automatic proof of theorems, fuzzy theorem, principle of resolutions, fuzzy logic, approximate reasoning, generalized rule of modus ponens, composition rule, fuzzy predicates, fuzzy and linguistic variables.

Самохвалов Юрий Яковлевич,
доктор техн. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: yu1953@ukr.net.