УДК 517.9:519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ С БИПОРЯДКОВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛЬФЕРА

Аннотация. Выполнена постановка и получено решение обратной задачи по определению функции поля и зависящей от геометрической переменной функции источника для уравнения аномальной диффузии с бипорядковой дробной производной Хильфера и переменным направлением времени. Установлены существование и единственность решения данной задачи.

Ключевые слова: аномальная диффузия, дробно-дифференциальное уравнение диффузии, бипорядковая производная Хильфера, уравнения с переменным направлением времени, обратная задача.

Создание современных эффективных информационных технологий для моделирования динамики переноса вещества и энергии в геоэкологических системах невозможно без дальнейшего развития и обобщения классических математических моделей в направлении учета влияния важных аспектов, в частности, связанных с невыполнением принципа локального равновесия [1]. В настоящее время достигнут существенный прогресс в исследовании особенностей динамики геомиграцонных процессов с учетом нелокальных эффектов по времени (эффектов памяти [2]) и пространству (эффект пространственных корреляций [3]) с использованием аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка [4–7], являющегося достаточно адекватным и надежным подходом при построении соответствующих математических моделей. С применением данного подхода поставлено и решено большое число как прямых, так и обратных задач для математических моделей процессов миграции в геосредах, основанных на уравнениях дробного порядка, в частности, рассмотрены обратные задачи для моделей с дробными производными Капуто [8–11], а также для более общих моделей с производными Хильфера [12–14]. При этом постановки обратных задач для уравнений с дробными производными часто восходят к соответствующим постановкам для классических параболических уравнений, которым посвящено практически необозримое количество литературных источников. Ввиду ограниченности объема статьи отметим только работы [15–17], в которых выполнены постановки и получены решения основных классов обратных задач по определению температуры и плотности источников тепла согласно аналитической теории теплопроводности, а также работу [18], в которой выполнена постановка и получено решение обратной задачи для классического уравнения в частных производных параболического типа с переменным направлением времени. Отметим, что подобные уравнения имеют множество разнообразных применений, в частности, описывают процессы теплопроводности в неоднородных средах, процессы взаимодействия фильтрационных потоков, сложные течения вязкой жидкости и др. [18, 19].

В настоящей работе рассматривается обратная задача для дробно-дифференциального уравнения диффузии с бипорядковой [20, 21] производной Хильфера с переменным направлением времени. Диффузионные уравнения с производными Хильфера позволяют эффективно описывать особенности динамики ряда аномальных процессов переноса в условиях учета нелокальных эффектов [22, 23].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: БИПОРЯДКОВАЯ ДРОБНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ХИЛЬФЕРА

Пусть $I_{0t}^{\alpha} f(t)$, $D_{0t}^{\alpha} f(t)$ — соответственно дробный интеграл и производная Римана–Лиувилля порядка α ($\operatorname{Re}\alpha > 0$) функции $f(t)$ действительного аргумента $t > 0$, определяемые соотношениями [4–6]

$$I_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}},$$

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{0t}^{n-\alpha} f(t), \quad n = [\operatorname{Re}(\alpha)] + 1,$$

где $[\operatorname{Re}(\alpha)]$ — целая часть $\operatorname{Re}(\alpha)$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера [24].

Производная Хильфера порядка α ($0 < \alpha < 1$) типа μ ($0 \le \mu \le 1$) определяется следующим образом [25]:

$$D_{0t}^{\alpha,\mu} f(t) = I_{0t}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0t}^{(1-\mu)(1-\alpha)} f(t). \tag{1}$$

Очевидно, что дробная производная, определяемая согласно последнему соотношению, является обобщением дробных производных Капуто и Римана–Лиувилля, поскольку

$$D_{0t}^{\alpha,1} f(t) = D_{0t}^{(\alpha)} f(t) = I_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t), \; D_{0t}^{\alpha,0} f(t) = D_{0t}^{\alpha} f(t),$$

где $D_{0t}^{(\alpha)}$, D_{0t}^{α} — операторы Капуто и Римана–Лиувилля соответственно. Следовательно, производная Хильфера является непрерывной интерполяцией по параметру $\mu \in [0,1]$ операторов Римана–Лиувилля и Капуто одного порядка α. Обобщая понятие производной Хильфера на ситуации, позволяющие моделировать динамику семейств неравновесных процессов на основе интерполяции по параметру μ операторов Римана–Лиувилля и Капуто не только одного порядка α, но также различных порядков производной α, β ($\alpha \ne \beta$), приходим к понятию бипорядковой дробной производной, которую определим следующим соотношением [20, 21]:

$$D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} f(t) = I_{0t}^{\mu(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0t}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t) \;\; (0 < \alpha, \beta < 1; \; 0 \le \mu \le 1). \tag{2}$$

Дробную производную функции $f(t)$, заданную соотношением (2), назовем бипорядковой дробной производной Хильфера порядков α и β типа μ. Поскольку $D_{0t}^{(\alpha,\beta)1} f(t) \equiv D_{0t}^{(\alpha)} f(t)$, $D_{0t}^{(\alpha,\beta)0} f(t) \equiv D_{0t}^{\beta} f(t)$, бипорядковая дробная производная является непрерывной интерполяцией по параметру $\mu \in [0,1]$ операторов различных порядков: Римана–Лиувилля D_{0t}^{β} порядка β и Капуто $D_{0t}^{(\alpha)}$ порядка α (в общем случае $\alpha \ne \beta$). Отсюда заключаем, что на основе понятия бипорядковой дробной производной возможно моделирование динамики более широкого класса аномальных процессов переноса, чем с использованием общепринятого определения Хильфера, представленного соотношением (1).

На основании (2) нетрудно получить формулу для преобразования Лапласа бипорядковой дробной производной функции $f(t)$ вида [20]

$$\mathcal{L}(D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} f(t)) = p^{\beta + \mu(\alpha-\beta)} \mathcal{L}(f) - p^{\mu(\alpha-1)} I_{0t}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+) \tag{3}$$

$$(0 < \alpha, \beta < 1; \; 0 \le \mu \le 1),$$

где $I_{0t}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(0+) = \lim\limits_{t \to 0+} I_{0t}^{(1-\mu)(1-\beta)} f(t)$ $(f(t) \in L(0, +\infty))$, $\mathcal{L}$ — оператор преобразования.

С учетом соотношения (3) можно показать, что решение задачи

$$D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \; I_{0t}^{(1-\mu)(1-\beta)} u(0+) = \zeta_0 \;\; (0 < \alpha, \beta < 1; \; 0 \le \mu \le 1), \quad (4)$$

($f(t)$ — заданная функция источника, $\lambda, \zeta_0 = \text{const}$) записывается в виде [20]

$$u(t) = \zeta_0 t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma, \gamma+\mu(1-\alpha)}(-\lambda t^{\gamma}) + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda (t-\tau)^{\gamma}) f(\tau)\, d\tau, \quad (5)$$

где $\gamma = \beta + \mu(\alpha - \beta)$, $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [26].

ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим в области $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$ $(\Omega^- = (-1,0) \times (0,T), \; \Omega^+ = (0,1) \times (0,T))$ задачу определения зависящего от геометрической переменной множителя $f(x)$ в источниковом слагаемом правой части неклассического уравнения диффузии

$$\operatorname{sgn} x \cdot D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x) \frac{t^{(1-\mu)(\beta-1)}}{\Gamma(\beta + \mu(1-\beta))} \quad (6)$$

и его решения $u(x,t)$, удовлетворяющего граничным условиям

$$\frac{\partial u(-1,t)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \; t \in [0,T], \quad (7)$$

соответствующим начальным условиям, условиям финального переопределения

$$I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)} u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in [-1,0], \\ \varphi_2(x), & x \in [1,0], \end{cases} \quad (8)$$

$$I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)} u(x,T) = \psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in [-1,0], \\ \psi_2(x), & x \in [1,0], \end{cases} \quad (9)$$

а также обобщенным условиям [18, 27] сопряжения на линии $x = 0$

$$u_+ = u_-, \quad u'_+ = -u'_-, \quad t \in [0,T], \quad (10)$$

$$u_{\pm} = \lim_{x \to 0\pm} u(x,t), \; u'_{\pm} = \lim_{x \to 0\pm} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \; t \in [0,T].$$

Здесь $D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu}$ — оператор бипорядковой дробной производной Хильфера порядков α, β типа μ [20] (функциями φ_2, ψ_1 задаются начальные условия, функциями φ_1, ψ_2 — условия финального переопределения).

ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ. СХОДИМОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Исключая функцию $f(x)$ из уравнения (6) подстановкой

$$\upsilon(x,t) = D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} u(x,t), \quad (11)$$

получаем следующую задачу:

$$\operatorname{sgn} x \cdot D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} \upsilon(x,t) = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \upsilon(-1,t)}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial \upsilon(1,t)}{\partial x} = 0, \; t \in [0,T], \quad (13)$$

$$\operatorname{sgn} x \cdot I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)} \upsilon(x,0) - \varphi''(x) = f(x), \; x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{14}$$

$$\operatorname{sgn} x \cdot I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)} \upsilon(x,T) - \psi''(x) = f(x), \; x \in (-1,0) \cup (0,1), \tag{15}$$

$$x = 0, \; \upsilon_{+} = \upsilon_{-}, \; \upsilon'_{+} = -\upsilon'_{-}, \; t \in [0,T]. \tag{16}$$

Решение задачи (12)–(14), (16) находим с помощью метода разделения переменных в виде $\upsilon(x,t) = X(x) \cdot \Phi(t)$. Тогда для функции $X(x)$ имеем задачу

$$\operatorname{sgn} x \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \text{const}, \tag{17}$$

$$X'(-1) = X'(1) = 0, \tag{18}$$

$$X_{+} = X_{-}, \; X'_{+} = -X'_{-}. \tag{19}$$

Задача (17)–(19) исследована в [18], где показано, что собственные функции оператора $L_x X \equiv \operatorname{sgn} x \cdot X''(x)$ имеют вид

$$\widetilde{X}_k(x) = \begin{cases} \cos(\widetilde{\mu}_k(x+1)) / \cos(\widetilde{\mu}_k), & x < 0, \\ \operatorname{ch}(\widetilde{\mu}_k(1-x)) / \operatorname{ch}(\widetilde{\mu}_k), & x > 0, \end{cases} \quad \lambda = \widetilde{\mu}_k^2 > 0, \; k \in \mathbb{N}; \tag{20}$$

$$\widetilde{\widetilde{X}}_k(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\widetilde{\mu}_k(x+1)) / \operatorname{ch}(\widetilde{\mu}_k), & x < 0, \\ \cos(\widetilde{\mu}_k(1-x)) / \cos(\widetilde{\mu}_k), & x > 0, \end{cases} \quad \lambda = -\widetilde{\mu}_k^2 < 0, \; k \in \mathbb{N}; \tag{21}$$

$$X_0(x) = \begin{cases} 1/2, & x < 0, \\ 1/2, & x > 0, \end{cases} \quad \lambda = 0. \tag{22}$$

Соответствующие собственные значения данного оператора образуют дискретный спектр и являются решениями следующего трансцендентного уравнения: $\operatorname{tg} \widetilde{\mu}_k = -\operatorname{th} \widetilde{\mu}_k$, $k = 0,1,2,\ldots$ Как отмечено в [18], оператор L_x симметрический и компактный. Согласно теореме Гильберта–Шмидта система собственных функций полная и ортогональная в $L_2((-1,0) \cup (0,1))$.

Для определения $\Phi(t)$ из (12) имеем уравнение

$$D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} \Phi(t) - \lambda \Phi(t) = 0.$$

Отсюда с учетом (4), (5) получаем:

- при $\lambda = \widetilde{\mu}_k^2 > 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{\Phi}_k(t) = \frac{\overline{\xi}_k}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)} t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma); \tag{23}$$

- при $\lambda = -\widetilde{\mu}_k^2 < 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_k(t) = \zeta_k t^{(1-\mu)(\beta-1)} E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma); \tag{24}$$

- при $\lambda = 0$

$$\Phi_0(t) = \zeta_0 \frac{t^{(1-\mu)(\beta-1)}}{\Gamma(\beta + \mu(1-\beta))} \quad (\zeta_0, \zeta_k, \overline{\xi}_k = \text{const}). \tag{25}$$

С учетом (20)–(25) решение задачи (12)–(16) ищем в виде следующего ряда с неизвестными коэффициентами A_k, B_k $(k \in \mathbb{N})$, C:

$$\upsilon(x,t) = t^{(1-\mu)(\beta-1)} \left[\frac{X_0(x) C}{\Gamma(\beta + \mu(1-\beta))} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \widetilde{\widetilde{X}}_k(x) E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_k \widetilde{X}_k(x) \frac{E_{\gamma,\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)} \right) \right], \tag{26}$$

где $E_\alpha(z)$ — однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера [4–6, 26].

На основании (26) из (14), (15) получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[A_k\tilde{\tilde{X}}_k(x)(1-E_\gamma(-\tilde{\mu}_k^2T^\gamma))-B_k\tilde{X}_k(x)\left(1-\frac{1}{E_\gamma(\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)}\right)\right]=$$

$$=\operatorname{sgn}x\cdot(\varphi''(x)-\psi''(x)). \tag{27}$$

Скалярно домножая соотношение (27) на $\tilde{\tilde{X}}_k(x)$, а затем на $\tilde{X}_k(x)$, с учетом ортогональности собственных функций получаем выражения для искомых коэффициентов A_k, B_k в виде

$$A_k=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot(\varphi''(x)-\psi''(x)),\tilde{\tilde{X}}_k(x))}{\left\|\tilde{\tilde{X}}_k(x)\right\|^2(1-E_\gamma(-\tilde{\mu}_k^2T^\gamma))},$$

$$B_k=\frac{(\operatorname{sgn}x\cdot(\varphi''(x)-\psi''(x)),\tilde{X}_k(x))}{\left\|\tilde{X}_k(x)\right\|^2\left(\frac{1}{E_\gamma(\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)}-1\right)},\quad k\in\mathbb{N}, \tag{28}$$

где (,) — скалярное произведение в $L_2((-1,0)\cup(0,1))$, $||f||^2=\int_{-1}^{1}f^2(x)dx$.

Обращая (11), с учетом равенства (26) устанавливаем справедливость соотношения

$$I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)}u(x,t)=\varphi(x)+$$

$$+t^\gamma\left[\frac{X_0(x)C}{\Gamma(1+\gamma)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\tilde{\tilde{X}}_k(x)E_{\gamma,\gamma+1}(-\tilde{\mu}_k^2t^\gamma)+B_k\tilde{X}_k(x)\frac{E_{\gamma,\gamma+1}(\tilde{\mu}_k^2t^\gamma)}{E_\gamma(\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)}\right)\right]. \tag{29}$$

Тогда из (15) на основании (29) получаем

$$T^\gamma\left[\frac{X_0(x)C}{\Gamma(1+\gamma)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k\tilde{\tilde{X}}_k(x)E_{\gamma,\gamma+1}(-\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)+B_k\tilde{X}_k(x)\frac{E_{\gamma,\gamma+1}(\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)}{E_\gamma(\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)}\right)\right]=$$

$$=\psi(x)-\varphi(x). \tag{30}$$

Соотношение (30) позволяет определить неизвестную постоянную C. Действительно, домножая скалярно равенство (30) на $X_0(x)$, находим

$$C=\frac{\Gamma(1+\gamma)}{T^\gamma}(\varphi(x)-\psi(x),X_0(x)). \tag{31}$$

С учетом (28), (31) искомую функцию источника $f(x)$ запишем в виде

$$f(x)=\operatorname{sgn}x\cdot\left[X_0(x)C+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\tilde{\tilde{X}}_k(x)E_\gamma(-\tilde{\mu}_k^2T^\gamma)+B_k\tilde{X}_k(x))\right]-\psi''(x). \tag{32}$$

При этом искомая функция поля $u(x,t)$ определяется рядами

$$u(x,t)=t^{\gamma+\mu(1-\alpha)-1}\left[\frac{\varphi_2(x)+X_0(x)Ct^\gamma}{\Gamma(\gamma+\mu(1-\alpha))}+\sum_{k=1}^{\infty}t^\gamma\left(A_k\tilde{\tilde{X}}_k(x)E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\tilde{\mu}_k^2t^\gamma)+\right.\right.$$

$$+B_k \widetilde{X}_k(x) \frac{E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)}\Bigg)\Bigg], \; (x,t) \in \Omega^+, \tag{33}$$

$$u(x,t) = t^{\gamma+\mu(1-\alpha)-1}\Bigg[\frac{\psi_1(x) + C \cdot X_0(x)(\Gamma(1+\gamma)t^\gamma - T^\gamma)}{\Gamma(1+\gamma)\Gamma(\gamma+\mu(1-\alpha))} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \widetilde{\widetilde{X}}_k(x)(T^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma) - t^\gamma E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)) +$$

$$+\frac{B_k \widetilde{X}_k(x)}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)}(T^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma) - t^\gamma E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)))\Bigg], \; (x,t) \in \Omega^-. \tag{34}$$

Таким образом, формальное решение задачи (6)–(10) определяется соотношениями (32)–(34), (28), (31). Покажем, что построенное решение является классическим решением рассматриваемой задачи. Докажем, например, соотношение $u(x,t) \in C(\widetilde{\Omega})$, $\widetilde{\Omega} = \overline{\Omega} \cap (t > 0)$. Учитывая асимптотические оценки функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ для больших значений $|z|$ [26], получаем для общего члена ряда из (33) при произвольном $t \ge t_0 > 0$ оценку

$$|\widetilde{a}_k| = \Bigg| t^{\gamma+\mu(1-\alpha)-1}\Bigg(A_k \widetilde{\widetilde{X}}_k(x) t^\gamma E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma) +$$

$$+B_k \widetilde{X}_k(x)\, t^\gamma \frac{E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)}\Bigg)\Bigg| \le$$

$$\le M_1\Bigg[|A_k||\widetilde{\widetilde{X}}_k(x)|\frac{M_2}{\widetilde{\mu}_k^2} + |B_k||\widetilde{X}_k(x)|\frac{M_3}{\widetilde{\mu}_k^2}\Bigg] \le \frac{C_1}{\widetilde{\mu}_k^2}(|A_k| + |B_k|) \le$$

$$\le \frac{C_1}{\pi^2 k^2}(|A_k| + |B_k|) \tag{35}$$

$$(M_i > 0 \;\; (i = \overline{1,3}), \; C_1 > 0, \; \gamma + \mu(1-\alpha) < 1).$$

С учетом соотношения [26]

$$\lambda z^\alpha E_{\alpha,\alpha+\beta}(\lambda z^\alpha) = E_{\alpha,\beta}(\lambda z^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \; z, \beta, \lambda \in \mathbb{C}, \; \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

для общего члена $\widetilde{\widetilde{a}}_k$ ряда из (34) получаем аналогичную оценку

$$|\widetilde{\widetilde{a}}_k| = \Bigg| t^{\gamma+\mu(1-\alpha)-1}\Bigg(A_k \widetilde{\widetilde{X}}_k(x)(T^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(-\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma) - t^\gamma E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(-\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma)) +$$

$$+\frac{B_k \widetilde{X}_k(x)}{E_\gamma(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma)}(T^\gamma E_{\gamma,\gamma+1}(\widetilde{\mu}_k^2 T^\gamma) - t^\gamma E_{\gamma,2\gamma+\mu(1-\alpha)}(\widetilde{\mu}_k^2 t^\gamma))\Bigg)\Bigg| \le$$

$$\leq M_1'\left[|A_k||\tilde{\tilde{X}}_k(x)|\left(\frac{M_2'}{\tilde{\mu}_k^2}+\frac{M_3'}{\tilde{\mu}_k^2}\right)+|B_k||\tilde{X}_k(x)|\left(\frac{M_4'}{\tilde{\mu}_k^2}+\frac{M_5'}{\tilde{\mu}_k^2}\right)\right]\leq$$

$$\leq \frac{C_2}{\tilde{\mu}_k^2}(|A_k|+|B_k|)\leq \frac{C_2}{\pi^2 k^2}(|A_k|+|B_k|)\ \ (M_i'>0\ \ (i=\overline{1,5}),\ C_2>0). \qquad (36)$$

На основании оценок (35), (36) и ограниченности (при известных условиях [18]) коэффициентов A_k, B_k $(k\in\mathbb{N})$ заключаем, что ряды в (33), (34) мажорируются сходящимся рядом. Поэтому, в силу мажорантного признака Вейерштрасса, ряд в соответствующем выражении для $u(x,t)$ в области $\tilde{\Omega}$ сходится абсолютно и равномерно и его сумма представляет собой непрерывную функцию в данной области. Решение $u(x,t)$ — непрерывная функция, являющаяся суммой непрерывной функции и равномерно сходящегося ряда.

Поскольку в области $\overline{\Omega}$ справедливо неравенство

$$|t^{(1-\beta)(1-\mu)}u(x,t)|\leq |p(x,t)|+M\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|A_k|+|B_k|}{k^2}<\infty$$

($p(x,t)$ — непрерывная в области $\overline{\Omega}$ функция, $M=\mathrm{const}>0$), имеем

$$t^{(1-\beta)(1-\mu)}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}).$$

Аналогично изложенному выше установим соотношения

$$D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu}u(x,t),\ u_{xx}(x,t)\in C(\tilde{\Omega}).$$

Относительно вопроса о единственности решения задачи отметим следующее.

Пусть $\{u_1,f_1\},\{u_2,f_2\}$ — два различных решения задачи. Тогда функции $\bar{u}=u_2-u_1$, $\bar{f}=f_2-f_1$ удовлетворяют уравнению

$$\operatorname{sgn} x\cdot D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu}\bar{u}(x,t)=\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}+\bar{f}(x)\frac{t^{(1-\mu)(\beta-1)}}{\Gamma(\beta+\mu(1-\beta))},$$

однородным краевым условиям

$$\frac{\partial\bar{u}(-1,t)}{\partial x}=0,\ \frac{\partial\bar{u}(1,t)}{\partial x}=0,\ t\in[0,T],$$

$$I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)}\bar{u}(x,0)=I_{0t}^{(1-\beta)(1-\mu)}\bar{u}(x,T)=0$$

и условиям сопряжения на линии $x=0$

$$\bar{u}_+=\bar{u}_-,\ \bar{u}_+'=-\bar{u}_-',\ \ t\in[0,T].$$

Отсюда, учитывая соотношения (28), (31), имеем $C=A_k=B_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$. На основании (32)–(34), с учетом полноты системы собственных функций оператора L_x, заключаем, что $\bar{u}(x,t)\equiv 0$, $\bar{f}(x)\equiv 0$ в области Ω. Этим фактом устанавливается наличие свойства единственности решения рассматриваемой обратной задачи.

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи приведенной задачи.

Поскольку при $\mu=1$ имеем $D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu}u(t)=D_{0t}^{(\alpha,\beta)1}u(t)=D_{0t}^{(\alpha)}u(t)$, где $D_{0t}^{(\alpha)}$ — оператор дробной производной Капуто порядка α, из найденного выше решения как частный случай получаем решение соответствующей обратной задачи для дробно-дифференциального уравнения диффузии с производной Капуто вида

$$\operatorname{sgn} x \cdot D_{0t}^{(\alpha)} u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x).$$

Если $\alpha = \beta = 1$, то имеем $D_{0t}^{(\alpha,\beta)\mu} u(t) = D_{0t}^{(1,1)\mu} u(t) = \frac{du}{dt}$. Тогда из найденного выше решения, в частности, получаем решение соответствующей обратной краевой задачи для классического параболического уравнения с переменным направлением времени, приведенное в [18].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физических наук*. 1997. Т. 167, № 10. С. 1095–1106.
2. Хасанов М.М., Булгакова Г.Т. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 288 с.
3. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шибанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 135 с.
4. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Yverdon, Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 688 p.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
6. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
7. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
8. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Ж., Турметов Б.Х. О некоторых обратных задачах для уравнения теплопроводности дробного порядка. *Вестник Казахского НУ. Сер. математика, механика, информатика*. 2010, № 2 (65). С. 36–41.
9. Kirane M., Malik S.A. Determination of an unknown source term and the temperature distribution for the linear heat equation involving fractional derivative in time. *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 218. P. 163–170.
10. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013. Vol. 270. P. 1–16.
11. Al-Musalhi F., Al-Salti N., Kerbal S. Inverse problems of a fractional differential equations with Bessel operator. arXiv: 1609.04587 v1, 2016.
12. Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 249. P. 24–31.
13. Furati K.M., Iyiola O.S., Kassem M. An inverse source problem for a two-parameter anomalous diffusion with local time datum. arXiv: 1604.06886 v1, 2016.
14. Турметов Б.Х., Шиналиев К.М. О разрешимости некоторых начально-краевых задач для обобщенного уравнения теплопроводности. *Вестник Евразийского нац. университета им. Л.Н. Гумилева. Сер. Естественно-технические науки*. 2011. Вып. 6 (85). С. 8–14.
15. Калиев И.А., Первушина М.М. Обратные задачи для уравнения теплопроводности. *Современные проблемы физики и математики*. Уфа: Гилем, 2004. Т. 1. С. 50–55.
16. Калиев И.А., Сабитова М.М. Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2009. Т. 12, № 1 (37). С. 89–97.
17. Оразов И., Садыбеков М.А. Об одной нелокальной задаче определения температуры и плотности источников тепла. *Известия вузов. Математика*. 2012. № 2. С. 70–75.

18. Калиев И.А., Мугафаров М.Ф., Фаттахова О.В. Обратная задача для параболического уравнения с переменным направлением времени с обобщенными условиями сопряжения. *Уфимский математический журнал*. 2011. Т. 3, № 2. С. 34–42.

19. Яненко Н.Н., Новиков В.А. Об одной модели жидкости с знакопеременным коэффициентом вязкости. *Численные методы механики сплошной среды.* Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Т. 4, № 2. С. 142–147.

20. Bulavatsky V.M. Closed form of the solutions of some boundary-value problems for anomalous diffusion equation with Hilfer's generalized derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 570–577.

21. Bulavatsky V.M., Gladky A.V. Mathematical modeling of the dynamics of a nonequilibrium diffusion process on the basis of integro-differentiation of fractional order. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 1. P. 134–141.

22. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative. *Journal of Physics A*. 2011. Vol. 44. P. 5–52.

23. Tomovski Z., Sandev T., Metzler R., Dubbeldam J. Generalized space-time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative. *Physica A*. 2012. Vol. 391. P. 2527–2542.

24. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1965. 831 p.

25. Hilfer R. Fractional time evolution. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. Hilfer R. Singapore: World Scientific, 2000. P. 87–130.

26. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.

27. Туласынов М.С. Первая краевая задача для одного параболического уравнения с меняющимся направлением времени с полной матрицей условий склеивания. *Вестник Новосибирского гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика*. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 57–68.

Надійшла до редакції 12.02.2018

В.М. Булавацький

ПРО ОДНУ ОБЕРНЕНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ РІВНЯННЯ АНОМАЛЬНОЇ ДИФУЗІЇ З БІПОРЯДКОВОЮ ПОХІДНОЮ ХІЛЬФЕРА

Анотація. Виконано постановку та отримано розв'язок оберненої задачі щодо визначення функції поля та залежної від геометричної змінної функції джерела для рівняння аномальної дифузії з біпорядковою дробовою похідною Хільфера та змінним напрямком часу. Встановлено існування та єдиність розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: аномальна дифузія, дробово-диференційне рівняння дифуії, біпорядкова похідна Хільфера, рівняння зі змінним напрямом часу, обернена задача.

V.M. Bulavatsky

AN INVERSE PROBLEM FOR ANOMALOUS DIFFUSION WITH BI-ORDINAL HILFER'S DERIVATIVE

Abstract. The formulation is completed and solution of the inverse problem is obtained for determining the field function and the function dependent on the geometric variable source for the anomalous diffusion equation with bi-ordinal Hilfer's fractional derivative and variable direction of time. The existence and uniqueness of the solution of the considered problem are established.

Keywords: anomalous diffusion, fractional differential diffusion equation, bi-ordinal Hilfer's derivative, equations with variable direction of time, inverse problem.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.