УДК 517.9

О.Г. НАКОНЕЧНИЙ, О.А. КАПУСТЯН, А.О. ЧИКРІЙ

НАБЛИЖЕНІ ГАРАНТОВАНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОЦІНКИ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗАДАЧ ЗІ ШВИДКО КОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ПРИ НЕЛІНІЙНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ

Анотація. Розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціонала від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами. До розв'язання цієї задачі застосовано традиційний мінімаксний підхід через наявність невідомих функцій у правій частині рівняння та у початковій умові. Доведено існування гарантованої лінійної середньоквадратичної оцінки вихідної задачі. Знайдено наближений розв'язок вихідної задачі з використанням теорії усереднення та методів побудови наближеного синтезу для розподілених систем. Доведено, що оцінка задачі з усередненими параметрами є наближеною гарантованою середньоквадратичною оцінкою вихідної задачі.

Ключові слова: гарантовані середньоквадратичні оцінки, рівняння параболічного типу, швидко коливні коефіцієнти, спостереження, наближені оцінки, оператор типу суперпозиції.

ВСТУП

Розвиток сучасних технологій зумовив постановку нових математичних задач. У роботах [1–7] розвинуто конструктивну теорію оцінювання параметрів як детермінованих, так і стохастичних рівнянь зі звичайними та частинними похідними в умовах невизначеності та неповноти даних. У межах мінімаксного підходу доведено низку теорем про існування, а за додаткових умов — про єдиність розв'язків задач оцінювання з невідомою матрицею спостережень для рівнянь із запізненням та для квазілінійних рівнянь або за умови випадковості матриці лінійної системи. Принципові труднощі виникають під час узагальнення задач оцінювання на випадок рівнянь з частинними похідними. З цією метою побудовано теорію мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків рівнянь [1, 2]. При цьому використано варіаційну теорію розв'язків крайових задач, що зрештою дало змогу встановити умови гладкості апріорних даних. У випадку рівнянь параболічного та гіперболічного типів з певними обмеженнями для мінімаксних оцінок отримано інтегро-диференціальні рівняння, які є аналогом фільтрів Калмана–Б'юсі [3, 5]. Методами мінімаксної теорії оцінювання розв'язано низку задач прогнозування розв'язків рівнянь параболічного типу за даними вимірювань [3]. Спеціальні обмеження кореляційних функцій випадкових процесів, що входять до правих частин та до похибок вимірювань, дали змогу отримати параболічні рівняння для мінімаксних прогнозних оцінок.

У цій статті розв'язано задачу мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язку параболічної крайової задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях. Задачу суттєво ускладнює нелінійність оператора спостереження (оператора типу суперпозиції), наявність швидко коливних коефіцієнтів та неповнота інформації щодо функцій у правій частині рівняння та у початковій умові. Це зумовлює потребу в пошуку наближеної оцінки функціонала від розв'язку вихідної задачі з використанням теорії усереднення [8, 9] та методів, описаних у [10, 11]. Спочатку доводимо існування гарантованої лінійної середньоквадратичної оцінки вихідної задачі. Далі обґрунтовуємо те, що оцінка задачі з усередненими параметрами є наближеною гарантованою середньоквадратичною оцінкою вихідної задачі. Як приклад, для спеціального вигляду множин, яким належать невідомі функції у правій частині рівняння та у початковій умові, знайдено вигляд наближеної гарантованої середньоквадратичної оцінки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область із кусково-гладкою границею $\partial\Omega$, $Q_T = (0, T) \times \Omega$ — циліндр з бічною поверхнею $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$. У циліндрі Q_T розглядається задача

$$\begin{cases} L_\varepsilon y = \dfrac{\partial y^\varepsilon}{\partial t} + A^\varepsilon y^\varepsilon = f_1(t, x), \\ y^\varepsilon|_{\Gamma_T} = 0, \\ y^\varepsilon(0, x) = f_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $A^\varepsilon = \operatorname{div}(a^\varepsilon(x)\nabla)$, $a^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)$, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — задана періодична, симетрична матриця така, що $\exists \nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\nu_1 \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x)\xi_i \xi_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \tag{2}$$

Зауважимо, що для $f_1(t, x) \in L^2(Q_T)$, $f_0(x) \in L^2(\Omega)$ у просторі Соболєва $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1) [12].

Надалі припустимо, що для деяких f_0, f_1 спостерігається реалізація випадкової функції $\nu^\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$, вигляду

$$\nu^\varepsilon(x) = \int_0^T C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t, x)) \cdot y^\varepsilon(t, x) dt + \eta(x), \tag{3}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon(t, x, \xi) \colon (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — задана вимірна обмежена функція така, що $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ і для майже всіх (м.в.) $(t, x) \in (0, T) \times \Omega$ виконується нерівність

$$|C^\varepsilon(t, x, \xi)| \le C_1(t, x), \tag{4}$$

$C_1 \in L^\infty(Q_T)$ — задана невід'ємна функція; $\eta(x)$ — випадкове поле, для якого $E\eta(x) = 0$ і функція $E\eta^2(x)$ вимірна та інтегровна.

Функції $f \in L^2(Q_T)$ і $f_0 \in L^2(\Omega)$ з (1) невідомі, проте відомо, що вони належать обмеженій замкненій опуклій множині F з простору $L^2(\Omega) \times L^2(Q_T)$; кореляційна функція $R(x_1, x_2) = E\eta(x_1)\eta(x_2)$ невідома, але відомо, що вона належить обмеженій множині V з простору $L^2(\Omega \times \Omega)$.

Задача полягає в оцінюванні функціонала

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t, x) y^\varepsilon(t, x) dt\, dx, \tag{5}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ — задана функція, y^ε — розв'язок задачі (1).

Означення 1. Лінійною оцінкою функціонала $l(y^\varepsilon)$ назвемо вираз

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega u(x)\nu^\varepsilon(x) dx + c = (u, \nu^\varepsilon) + c, \tag{6}$$

де $u \in L^2(\Omega)$ — задана функція, $\nu^\varepsilon(x)$ — спостереження (3), $c \in \mathbb{R}^1$ — константа.

Тут і надалі $\|\cdot\|$ і $(\cdot\,,\cdot)$ — норма і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_{Q_T}$, $(\cdot\,,\cdot)_{Q_T}$ — норма і скалярний добуток в $L^2(Q_T)$.

Означення 2. Вираз

$$\sigma_\varepsilon(u, c) = (\sup_{F, V} E(l(y^\varepsilon) - \hat{l}(y^\varepsilon))^2)^{1/2} \tag{7}$$

назвемо гарантованою середньоквадратичною похибкою оцінювання.

Означення 3. Оцінка

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \hat{u}(x) v^\varepsilon(x) dx + \hat{c} = (\hat{u}, v^\varepsilon) + \hat{c}, \tag{8}$$

для якої $(\hat{u}, \hat{c}) \in \operatorname{Arg\,min} \sigma_\varepsilon(u, c)$ (тобто $\inf_{u, c} \sigma_\varepsilon^2(u, c) = \sigma_\varepsilon^2(\hat{u}, \hat{c})$), називається гарантованою лінійною середньоквадратичною оцінкою (ГЛСО) функціонала $\hat{l}(y^\varepsilon)$, а величина $\sigma_\varepsilon(\hat{u}, \hat{c})$ — гарантованою середньоквадратичною похибкою (ГСП) оцінки $\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon)$.

Нехай для деякого $\gamma > 0$ множина V містить підмножину V_1 вигляду

$$V_1 = \left\{ R \colon \int_{\Omega\times\Omega} (R(x_1, x_2) - R_0(x_1, x_2))^2 dx_1 dx_2 \le \gamma^2 \right\}, \tag{9}$$

де $R_0 \in L^2(\Omega \times \Omega)$ — відома кореляційна функція. Тоді має місце таке твердження.

Твердження 1. Існує ГЛСО функціонала $l(y^\varepsilon)$ і при цьому

$$\hat{c} = \frac{1}{2}(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) + \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})), \tag{10}$$

$$\sigma_\varepsilon^2(\hat{u}, \hat{c}) = \frac{1}{4}(\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) - \alpha_\varepsilon^-(\hat{u}))^2 + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2) \hat{u}(x_1) \hat{u}(x_2) dx_1 dx_2, \tag{11}$$

де

$$\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) = \sup_F S_\varepsilon(f, \hat{u}), \quad \alpha_\varepsilon^-(\hat{u}) = \inf_F S_\varepsilon(f, \hat{u}),$$

$$S_\varepsilon(f, \hat{u}) = l(y^\varepsilon) - \int_{Q_T} \hat{u}(x) C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t, x)) \cdot y^\varepsilon(t, x) dt dx.$$

Доведення. Дійсно, згідно з означенням 2 має місце рівність

$$\sigma_\varepsilon^2(u, c) = \sup_F (S_\varepsilon(f, u) - c)^2 + \sup_V E\left(\int_\Omega u(x) \eta(x) dx \right)^2 =$$

$$= \sup_F (S_\varepsilon(f, u) - c)^2 + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2.$$

Зауважимо, що $\sigma_\varepsilon^2(u, c)$ — опуклий напівнеперервний знизу функціонал за змінною $u \in L^2(\Omega)$. Крім того, виконується нерівність

$$\sigma_\varepsilon^2(u, c) \ge \sup_F (S_\varepsilon(f, u) - c)^2 + \sup_{V_1} \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 =$$

$$= \sup_F (S_\varepsilon(f, u) - c)^2 + \int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \sup_{V_1} \int_{\Omega\times\Omega} (R(x_1, x_2) - R_0(x_1, x_2)) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2.$$

Далі одержимо, що

$$\sup_{V_1} \int_{\Omega\times\Omega} (R(x_1, x_2) - R_0(x_1, x_2))\, u(x_1)\, u(x_2)\, dx_1 dx_2 = |\gamma| \int_{\Omega} u^2(x) dx. \tag{12}$$

З останньої рівності випливає, що $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} \sigma_\varepsilon^2(u, c) = \infty$. Звідси та з відомого результату [14] для слабко-напівнеперервних знизу функціоналів випливає, що існує $\hat{u}$ таке, що

$$\inf_u \sigma_\varepsilon^2(u, c) = \sigma_\varepsilon^2(\hat{u}, c). \tag{13}$$

Зауважимо далі, що виконується нерівність

$$\alpha_\varepsilon^-(u) \le S_\varepsilon(f, u) \le \alpha_\varepsilon^+(u),$$

звідки випливає, що

$$\sigma_\varepsilon^2(u, c) = \left(\frac{1}{2} (\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u)) + \left| c - \frac{1}{2} (\alpha_\varepsilon^+(u) + \alpha_\varepsilon^-(u)) \right| \right)^2 + \tag{14}$$

$$+ \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2) u(x_1) u(x_2) dx_1 dx_2 \ge \frac{1}{4} (\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u))^2 +$$

$$+ \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2)\, u(x_1)\, u(x_2) dx_1 dx_2 \ge$$

$$\ge \min_u \left\{ \frac{1}{4} (\alpha_\varepsilon^+(u) - \alpha_\varepsilon^-(u))^2 + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2)\, u(x_1)\, u(x_2)\, dx_1 dx_2 \right\},$$

а мінімум в останній нерівності досягається для $u = \hat{u}$, отже

$$\hat{c} = \frac{1}{2} (\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) + \alpha_\varepsilon^-(\hat{u})), \tag{15}$$

при цьому

$$\sigma_\varepsilon^2(\hat{u}, \hat{c}) = \frac{1}{4} (\alpha_\varepsilon^+(\hat{u}) - \alpha_\varepsilon^-(\hat{u}))^2 + \sup_V \int_{\Omega\times\Omega} R(x_1, x_2) \hat{u}(x_1) \hat{u}(x_2) dx_1 dx_2.$$

Твердження доведено.

Нелінійність C^ε і наявність швидко коливних коефіцієнтів у A^ε, C^ε змушує нас шукати наближений розв'язок задачі (1)–(5) за методикою, запропонованою в [10, 11], використовуючи теорію усереднення [8, 9]. Нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^\varepsilon(x)$, $A^0 = \operatorname{div}(a^0 \nabla)$. Усереднені коефіцієнти, як і саму усереднену задачу, можна отримати методом асимптотичних розкладів, детально описаним у [11]. Припустимо, що існує вимірна обмежена функція $C^0(t, x) \in L^\infty(Q_T)$ така, що

$$\forall r \; C^\varepsilon(t, x, \xi) \to C^0(t, x) \text{ при } \varepsilon \to 0 \text{ рівномірно по } |\xi| \le r. \tag{16}$$

Для фіксованого $u \in L^2(\Omega)$ розглянемо задачу

$$\begin{cases} L_0 y = \dfrac{\partial y^0}{\partial t} + A^0 y^0 = f_1(t, x), \\ y^0|_{\Gamma_T} = 0, \\ y^0(0, x) = f_0(x). \end{cases} \tag{17}$$

Зауважимо, що для $f_1(t,x)\in L^2(Q_T)$, $f_0(x)\in L^2(\Omega)$ у просторі Соболєва $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ існує єдиний узагальнений розв'язок y_0 задачі (17) [12]. Припустимо також, що для деяких $f_1(t,x)\in L^2(Q_T)$, $f_0(x)\in L^2(\Omega)$ спостерігається реалізація випадкової функції $\nu^0(x), x\in\Omega$, вигляду

$$\nu^0(x)=\int_0^T C^0(t,x)\cdot y^0(t,x)dt+\eta(x). \tag{18}$$

Нехай функція $\hat{u}_0\in L^2(\Omega)$ і число $\hat{c}^0$ знаходяться із розв'язку задачі

$$\inf_{u,c}\sigma_0^2(u,c)=\sigma_0^2(\hat{u}^0,\hat{c}^0), \tag{19}$$

де

$$\sigma_0^2(\hat{u}^0,\hat{c}^0)=$$
$$=\frac{1}{4}(\alpha_0^+(\hat{u}^0)-\alpha_0^-(\hat{u}^0))^2+\sup_V\int_{\Omega\times\Omega}R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2)dx_1dx_2, \tag{20}$$

$$\alpha_0^+(\hat{u}^0)=\sup_F S_0(f,\hat{u}^0),\quad \alpha_0^-(\hat{u}^0)=\inf_F S_0(f,\hat{u}^0), \tag{21}$$

$$S_0(f,\hat{u}^0)=l(y^0)-\int_{Q_T}\hat{u}^0(x)C^0(t,x)\cdot y^0(t,x)dtdx,$$

$l(y^0)$ — функціонал вигляду (5), y^0 — розв'язок задачі (1) для $\varepsilon=0$.

Означення 4. Оцінку вигляду

$$\hat{l}_0(y^\varepsilon)=(\hat{u}^0,\nu^\varepsilon)+\hat{c}^0, \tag{22}$$

де ν^ε— спостереження вигляду (3), y^ε — розв'язок задачі (1), назвемо наближеною гарантованою середньоквадратичною оцінкою (НГСО) до гарантованої лінійної середньоквадратичної оцінки.

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Обґрунтуємо близькість наближеної гарантованої середньоквадратичної оцінки до лінійної оцінки функціонала (6).

Твердження 2. Має місце гранична рівність

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{F,V}E(l(y^\varepsilon)-\hat{l}_0(y^\varepsilon))^2=\sigma_0^2, \tag{23}$$

де

$$\sigma_0^2=\sup_F\left(l(y^0)-\int_{Q_T}\hat{u}^0(x)C^0(t,x)\cdot y^0(t,x)dtdx-\hat{c}_0\right)^2+$$
$$+\sup_V\int_{\Omega\times\Omega}R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2)dx_1dx_2. \tag{24}$$

Доведення. Зауважимо, що

$$\sup_{F,V}E(l(y^\varepsilon)-\hat{l}_0(y^\varepsilon))^2=$$
$$=\sup_F\left(l(y^\varepsilon)-\int_{Q_T}\hat{u}^0(x)C^\varepsilon(t,x,y^\varepsilon(t,x))\cdot y^\varepsilon(t,x)dtdx-\hat{c}^0\right)^2+ \tag{25}$$
$$+\sup_V\int_{\Omega\times\Omega}R(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2)dx_1dx_2.$$

Нехай $\{\hat{f}_0^k, \hat{f}_1^k\}$ — максимізувальна послідовність у (25). Тоді за підпослідовністю

$$\{\hat{f}_0^k, \hat{f}_1^k\} \to \{\hat{f}_0, \hat{f}_1\} \text{ слабко в } L^2(\Omega) \times L^2(Q_T).$$

Таким чином, з [13] випливає

$$\hat{y}^k \to \hat{y}^0 \text{ в } L^2(Q_T), \tag{26}$$

де $\hat{y}^0$ — розв'язок задачі (17) з умовами $\hat{f}_1$, $\hat{f}_0$.

Доведемо, що має місце збіжність для деякої функції

$$C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t, x)\hat{u}^0 \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{27}$$

Зі збіжності (16) випливає, що $\forall r > 0$

$$\alpha_k(r) := \sup_{|\xi| \le r} \int_{Q_T} |C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)|^2 dtdx \to 0, \ k \to \infty.$$

Покладемо

$$Q_T(k, r) = \{(t, x) \,|\, |\hat{y}^k(t, x)| \le r\}.$$

Згідно з нерівністю Чебишова і збіжністю (26) одержимо

$$\mu(Q_T \setminus Q_T(k, r)) \le \frac{1}{r} \int_{Q_T} |\hat{y}^k(t, x)| \, dt\, dx \le \frac{C}{r}, \tag{28}$$

де константа $C > 0$ не залежить від k, r. Тоді

$$\begin{aligned} &\int_{Q_T} |C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)|^2 dt\, dx = \\ &= \int_{Q_T(k, r)} |C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)|^2 dt\, dx + \\ &+ \int_{Q_T \setminus Q_T(k, r)} |C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)|^2 dt\, dx \le \alpha_k(r) + 2 \|C_1\|^2_{L^\infty(Q_T)} \cdot \frac{C}{r}, \end{aligned} \tag{29}$$

де функція C_1 взята з умови (4). Остання нерівність (29) означає, що

$$C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k) \to C^0(t, x) \text{ в } L^2(Q_T).$$

Тоді в силу нерівності Гельдера

$$\int_{Q_T} |C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)| \cdot |\hat{u}^k(x)| \, dtdx \to 0, \ k \to \infty.$$

Отже, за підпослідовністю

$$(C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x))\hat{u}^k(x) \to 0, \ k \to \infty \text{ для м.в. } (t, x).$$

З леми Ліонса [14] отримуємо

$$(C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k) - C^0(t, x))\hat{u}^k \to 0, \ k \to \infty \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{30}$$

Оскільки

$$C^0(t, x)(\hat{u}^k - \hat{u}^0) \to 0, \ k \to \infty \text{ слабко в } L^2(Q_T), \tag{31}$$

то зі збіжностей (30), (31) отримуємо збіжність (27).

Таким чином, зі збіжностей (26) і (27) одержуємо рівність (23). Твердження доведено.

Знайдемо вигляд НГСО у випадку, коли $V = V_1$, а множина F має вигляд

$$F = \left\{ (f_0, f_1) \colon \Phi(f_0, f_1) = \int_\Omega q_0^2(x)(f_0(x) - \bar{f}_0(x))^2 dx + \right.$$
$$\left. + \int_{Q_T} q_1^2(t,x)(f_1(t,x) - \bar{f}_1(t,x))^2 dxdt \le 1 \right\}, \tag{32}$$

де $q_0(x)$, $q_1(t,x)$ — неперервні функції у відповідних замкнених областях, причому α_0, $\alpha_1 < 0$ такі, що $q_0^2(x) \ge \alpha_0$, $q_1^2(t,x) \ge \alpha_1$, $\bar{f}_0(x)$, $\bar{f}_1(t,x)$ — відомі функції з $L^2(\Omega)$ та $L^2(Q_T)$ відповідно.

Знайдемо функцію $\hat{u}^0(x)$ та константу $\hat{c}^0$ для цього випадку. Спочатку введемо функції $\hat{z}(t,x)$ та $\hat{p}(t,x)$ як узагальнені розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} L_0^+ \hat{z} = -\dfrac{\partial \hat{z}}{\partial t} + A^0 \hat{z} = l(t,x) - C^0(t,x)\hat{u}^0(x), \\ \hat{z}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{z}(T,x) = 0, \\ L_0 \hat{p} = \dfrac{\partial \hat{p}}{\partial t} + A^0 \hat{p} = q_1^{-2}(t,x)\hat{z}(t,x), \\ \hat{p}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \hat{p}(0,x) = q_0^{-2}(x)\hat{z}(0,x), \end{cases} \tag{33}$$

де L_0^+ — оператор, формально спряжений до L_0, і нехай виконується рівність

$$R_0 \hat{u}^0 + |\gamma| \hat{u}^0(x) = \int_0^T C^0(t,x)\hat{p}(t,x)dt. \tag{34}$$

Далі буде показано, що система (33) має єдиний узагальнений розв'язок, який належить простору $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) \times \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$.

Теорема 1. Має місце рівність

$$\sigma_0^2 = l(\hat{p}), \tag{35}$$

функція $\hat{u}^0(x)$ визначається із систем рівнянь (33) і при цьому

$$\hat{c}^0 = \int_\Omega \hat{z}(0,x)\bar{f}_0(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)\bar{f}_1(t,x)dtdx. \tag{36}$$

Доведення. Нехай $\hat{z}(t,x)$ є узагальненим розв'язком першого рівняння системи (33). Введемо функції $\alpha_0^+(u)$, $\alpha_0^-(u)$ як наведено у виразах (19), де

$$S_0(f,u) = \int_\Omega \hat{z}(0,x)f_0(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)f_1(t,x)dtdx. \tag{37}$$

Використовуючи нерівність Коші–Буняковського, одержимо

$$\frac{1}{2}(\alpha_0^+(u) - \alpha_0^-(u)) =$$
$$= \left(\int_\Omega \hat{z}^2(0,x)q_0^{-2}(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}^2(t,x)q_1^{-2}(t,x)dtdx \right)^{\frac{1}{2}} = d_1(\hat{z}), \tag{38}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha_0^+(u) + \alpha_0^-(u)) = \int_\Omega \hat{z}(0,x)\bar{f}_0(x)dx + \int_{Q_T} \hat{z}(t,x)\bar{f}_1(t,x)dtdx = d_2(\hat{z}). \tag{39}$$

Звідси, враховуючи вираз для $\sup\limits_{V_1}(Ru, u)$ та вираз (11), отримаємо

$$J^0(u) = d_1^2(\hat{z}) + \int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1,x_2)u(x_1)u(x_2)dx_1dx_2 + |\gamma| \int_\Omega u^2(x)dx. \tag{40}$$

Оскільки $J^0(u)$ — опуклий слабко-напівнеперервний знизу функціонал і $\lim\limits_{\|u\|\to\infty} J^0(u)=\infty$, то існує єдина функція $\hat{u}^0(x)\in L^2(\Omega)$, яка знаходиться із розв'язку задачі

$$\inf_u J^0(u)=J^0(\hat{u}^0).$$

Тоді для функції $\hat{u}^0(x)$ справедлива тотожність

$$\frac{d}{d\tau}J^0(\hat{u}^0+\tau v)\Big|_{\tau=0}\equiv 0 \quad \forall v(x)\in L^2(\Omega). \tag{41}$$

Введемо функцію $\hat{p}(t,x)$ як узагальнений розв'язок другого рівняння системи (33). Оскільки $q_1^{-2}(t,x)\hat{z}(t,x)\in L^2(Q_T)$, то у просторі $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ існує єдиний розв'язок цього рівняння із системи (33). Тоді

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}J^0(\hat{u}^0+\tau v)|_{\tau=0}=|\gamma|\int_\Omega \hat{u}^0(x)v(x)dx+\int_\Omega\int_\Omega R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x_1)\,dx_1 v(x)dx-$$
$$-\int_\Omega\int_0^T C^0(t,x)\,\hat{p}(t,x)\,dt\cdot v(x)dx\equiv 0. \tag{42}$$

Звідси одержимо, що функція $\hat{u}^0(x)$ є розв'язком рівняння

$$|\gamma|\,\hat{u}^0(x)+\int_\Omega R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x_1)\,dx_1=\int_0^T C^0(t,x)\,\hat{p}(t,x)\,dt. \tag{43}$$

Доведемо далі, що виконується рівність (35). Оскільки

$$\sigma_0^2=d_1^2(\hat{z})+\int_{\Omega\times\Omega} R_0(x_1,x_2)\hat{u}^0(x_1)\hat{u}^0(x_2)dx_1dx_2+|\gamma|\int_\Omega(\hat{u}^0(x))^2\,dx\,, \tag{44}$$

то, враховуючи рівняння для $\hat{p}(t,x)$ системи (33), одержимо

$$d_1(\hat{z})=\int_\Omega \hat{z}(0,x)\,\hat{p}(0,x)dx+\int_{Q_T}\hat{z}(t,x)\,\hat{p}(t,x)dtdx=$$
$$=\int_{Q_T} l(t,x)\,\hat{p}(t,x)dtdx-\int_{Q_T}\hat{u}^0(x)C^0(t,x)\,\hat{p}(t,x)dtdx, \tag{45}$$

а згідно з (43) маємо

$$|\gamma|\int_\Omega(\hat{u}^0(x))^2\,dx+\int_{\Omega\times\Omega}R_0(x,x_1)\hat{u}^0(x)\hat{u}^0(x_1)\,dx_1dx=\int_{Q_T}\hat{u}^0(x)\,C^0(t,x)\,\hat{p}(t,x)\,dtdx.$$

Звідси одержимо, що

$$\sigma_0^2=\int_{Q_T} l(t,x)\,\hat{p}(t,x)dtdx, \tag{46}$$

що і доводить рівність (35). Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо функція $f_1(t,x)$ — відома і дорівнює $\bar{f}_1(t,x)$, тоді система рівнянь для визначення $\hat{u}^0(x)$ матиме вигляд

$$\begin{cases} L_0^+\,\hat{z}=-\dfrac{\partial\hat{z}}{\partial t}+A^0\,\hat{z}=l(t,x)-C^0(t,x)\hat{u}^0(x),\\ \hat{z}|_{\partial\Omega}=0,\quad \hat{z}(T,x)=0,\\ L_0\,\hat{p}=\dfrac{\partial\hat{p}}{\partial t}+A^0\,\hat{p}=0,\\ \hat{p}|_{\partial\Omega}=0,\quad \hat{p}(0,x)=q_0^{-2}(x)\hat{z}(0,x), \end{cases} \tag{47}$$

а також виконується рівність (34).

Приклад 1. Знайдемо розв'язок системи (47) у випадку, коли $R_0 = 0$, $q_0(x) = q_0$, $C^0(t,x) = C(t)$, а матриця $a^0(x)$ — симетрична.

Позначимо $\psi_k(x)$ узагальнені власні функції оператора L_0, а λ_k — власні числа. Будемо шукати функції $\hat{z}(t,x)$ та $\hat{p}(t,x)$ у вигляді

$$\hat{z}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(t)\psi_k(x), \quad \hat{p}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t)\psi_k(x). \tag{48}$$

Розкладемо функцію $l(t,x)$ у ряд

$$l(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)\psi_k(x). \tag{49}$$

Тоді для $z_k(t)$ і $p_k(t)$ будемо мати систему рівнянь

$$\begin{cases} -\dot{z}_k(t) + \lambda_k z_k(t) = l_k(t) - C(t)x_k, \ z_k(T) = 0, \\ \dot{p}_k(t) + \lambda_k p_k(t) = 0, \ \ p_k(0) = q_0^{-2} z_k(0), \end{cases} \tag{50}$$

де

$$x_k = \int_0^T C(\tau) p_k(\tau) d\tau. \tag{51}$$

Оскільки розв'язок першого рівняння системи (50) має вигляд

$$z_k(t) = z_{1k}(t) - x_k z_{2k}(t), \tag{52}$$

де $z_{ik}(t)$, $i = 1,2$, — розв'язки рівнянь

$$\dot{z}_{1k}(t) + \lambda_k z_{1k}(t) = l_k(t), \ z_k(T) = 0, \tag{53}$$

$$\dot{z}_{2k}(t) + \lambda_k z_{2k}(t) = C(t), \ z_{2k}(T) = 0, \tag{54}$$

то розв'язок другого рівняння системи (50) $p_k(t)$ матиме вигляд

$$p_k(t) = p_{1k}(t) - x_k p_{2k}(t), \tag{55}$$

де $p_{ik}(t)$, $i = 1,2$, — розв'язки рівнянь

$$\dot{p}_{1k}(t) + \lambda_k p_{1k}(t) = 0, \ \ p_{1k}(0) = q_0^{-2} z_{1k}(0), \tag{56}$$

$$\dot{p}_{2k}(t) + \lambda_k p_{2k}(t) = 0, \ \ p_{2k}(0) = q_0^{-2} z_{2k}(0), \tag{57}$$

тобто

$$p_{1k}(0) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} z_{1k}(0), \quad p_{2k}(0) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} z_{2k}(0). \tag{58}$$

Звідси та з (55) одержимо

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t} q_0^{-2} (z_{1k}(0) - x_k z_{2k}(0)), \tag{59}$$

а згідно з (51)

$$x_k = \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \cdot q_0^{-2} (z_{1k}(0) - x_k z_{2k}(0)), \tag{60}$$

отже, $x_k = b_k z_k(0)$, де

$$b_k = \left(1 + \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \cdot q_0^{-2} z_{2k}(0)\right)^{-1} \cdot \int_0^T C(t) e^{-\lambda_k t} dt \cdot q_0^{-2} z_{1k}(0).$$

Тоді з рівностей (34) і (51) отримаємо, що

$$\hat{u}^0(x) = |\gamma|^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)\psi_k(x),$$

при цьому
$$\hat{c}^0 = \int_{\Omega} \hat{z}(0, x)\bar{f}_0(x)dx. \tag{61}$$

Отже, знайдено функцію $\hat{u}^0(x)$ та константу $\hat{c}^0$ для цього випадку.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціонала від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами. Невизначеність тут представлено через наявність невідомих функцій у правій частині рівняння, у початковій умові та у спостереженні. Спершу обґрунтовано існування гарантованої лінійної середньоквадратичної оцінки вихідної задачі. Оскільки нелінійність оператора спостереження і наявність швидко коливних коефіцієнтів не дають змоги знайти оцінку функціоналу від розв'язку вихідної задачі, тому здійснено перехід від розв'язку усередненої задачі до оцінки функціонала. Основним результатом роботи є доведення того, що оцінка задачі з усередненими параметрами є наближеною гарантованою середньоквадратичною оцінкою вихідної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. Київ: КГУ, 1985. 83 с.
2. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary value problem. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2002. Vol. 34 (5–8). P. 52–63.
3. Nakonechnyi A.G., Podlipenko Yu.K., Zaitsev Yu.A. Minimax prediction estimation of solutions of initial-boundary-value problems for parabolic equations with discontinuous coefficients based on imperfect data. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2000. Vol. 36, N 6. P. 845–854.
4. Zhuk S., Nakonechnii O. Minimax state estimates for abstract Neumann problems. *Minimax Theory and its Applications*. 2018. Vol. 3, N 1. P. 1–21.
5. Kapustian O., Nakonechnyi O., Podlipenko Yu. Minimax estimation of solutions of the first order linear hyperbolic systems with uncertain data. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 2019 (in print).
6. Luz M., Moklyachuk M. Minimax-robust filtering problem for stochastic sequences with stationary increments and cointegrated sequences. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 2014. Vol. 2. P. 176–199.
7. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271, Iss. 1. P. 69–85.
8. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. Москва: Физматлит, 1993. 464 с.
9. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Москва: Наука, 1984. 352 с.
10. Kapustian O.A., Sobchuk V.V. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 2018. Vol. 6, N 2. P. 233–239.
11. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. Optimal bounded control synthesis for a parabolic boundary-value problem with fast oscillatory coefficients. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1999. Vol. 31, Iss. 12, P. 33–44.
12. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. Москва: Наука, 1976. 391 с.
13. Denkiwski Z., Mortola S. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1993. Vol. 78. P. 365–391.
14. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972. 588 с.

Надійшла до редакції 06.03.2019

А.Г. Наконечный, Е.А. Капустян, А.А. Чикрий

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ГАРАНТИРОВАННЫЕ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С БЫСТРО КОЛЕБЛЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

Аннотация. Рассмотрена задача минимаксного оценивания функционала от решения параболической задачи с быстро колеблющимися коэффициентами. К решению этой задачи применен традиционный минимаксный подход из-за наличия неизвестных функций в правой части уравнения и в начальном условии. Доказано существование гарантированной линейной среднеквадратичной оценки исходной задачи. Найдено приближенное решение исходной задачи с использованием теории усреднения и методов построения приближенного синтеза для распределенных систем. Доказано, что оценка задачи с усредненными параметрами является приближенной гарантированной среднеквадратичной оценкой исходной задачи.

Ключевые слова: гарантированные среднеквадратичные оценки, уравнение параболического типа, быстро колеблющиеся коэффициенты, наблюдение, приближенные оценки, оператор типа суперпозиции.

O.G. Nakonechnyi, O.A. Kapustian, A.O. Chikrii

APPROXIMATE GUARANTEED MEAN SQUARE ESTIMATES OF FUNCTIONALS ON SOLUTIONS OF PARABOLIC PROBLEMS WITH FAST OSCILLATING COEFFICIENTS UNDER NONLINEAR OBSERVATIONS

Abstract. The paper deals with the problem of minimax estimation of a functional on the solution of parabolic problem with rapidly oscillating coefficients. To solve this problem, the traditional minimax approach is used because of the presence of unknown functions on the right-hand side of the equation and in the initial condition. The existence of a guaranteed linear mean square estimate of the original problem is proved. An approximate solution of the original problem is found with the use of the averaging theory and the approximate synthesis methods for distributed systems. The main result of the work is to prove that the estimation of the problem with averaged parameters is an approximate guaranteed mean square estimation of the original problem.

Keywords: guaranteed mean-square estimates, parabolic equations, fast oscillating coefficients, observations, approximate estimates, superposition type operator.

Наконечний Олександр Григорович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com.

Капустян Олена Анатоліївна,
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, заступник декана Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: olena.kap@gmail.com.

Чикрій Аркадій Олексійович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: g.chikrii@gmail.com.