УДК 517.9 : 519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛОГА

Аннотация. Для бипараболического эволюционного уравнения в частных производных и его дробно-дифференциального обобщения выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых краевых задач с нелокальными граничными условиями. Рассмотрены варианты прямой и обратной постановок задач. Математическая постановка обратной задачи предполагает поиск вместе с решением исходного интегро-дифференциального уравнения дробного порядка также его неизвестной правой части, функционально зависящей только от геометрической переменной.

Ключевые слова: бипараболическое эволюционное уравнение, дробно-дифференциальный аналог бипараболического уравнения, нелокальная краевая задача, обратная задача, биортогональные системы функций.

ВВЕДЕНИЕ

В классической математической теории теплопроводности, основанной на линейном уравнении теплопроводности параболического типа

$$L_1 u \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa^2 \Delta \right) u(x, t) = 0, \tag{1}$$

где u — температура, $x \in E_n$, Δ — оператор Лапласа, $\kappa > 0$ — физическая константа, предполагаются такие жесткие ограничения на процессы, как бесконечная скорость распространения возмущений и линейная зависимость потока от градиента поля, а также энергии от температуры [1–3]. Нарушение указанных условий не позволяет в рамках данной математической модели получить достаточно корректное описание динамики процессов тепломассопереноса и приводит к ряду известных парадоксов [2–4]. При этом некоторыми авторами для описания процессов с конечной скоростью было предложено гиперболическое уравнение, учитывающее релаксацию теплового потока [3, 4], однако (как отмечено в [5]) замена уравнения (1) уравнением гиперболического типа труднообъяснима с теоретико-групповой точки зрения, поскольку все нестационарные уравнения, в которые входят вторые производные по времени, неинвариантны относительно преобразований Галилея. Отсутствие у гиперболического уравнения теплопроводности соответствующих симметрийных свойств означает, что оно не отображает основных физических законов сохранения [5].

В связи с этим в работах [5, 6] указано на одно естественное обобщение уравнения (1)

$$Lu \equiv \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u = 0, \quad L_2 = L_1 L_1, \tag{2}$$

где α_1, α_2 — действительные параметры.

Последнее уравнение инвариантно относительно группы Галилея $G(1, 3)$, поэтому может быть использовано для описания процессов диффузионного типа, не зависящих от того, в каких инерциальных системах они наблюдаются [5, 6]. Согласно работе [5] уравнение (2) называется бипараболическим уравнением; при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ оно совпадает с классическим уравнением Фурье. Бипараболическое уравнение неоднократно использовалось при моделировании различных эволюционных процессов в естествознании, в частности для описания особенностей динамики деформируемых водонасыщенных пористых сред в процессе их фильтрационной консолидации под действием приложенных нагрузок [7–9].

Отметим также, что в настоящее время все большой интерес у исследователей вызывает теория процессов переноса во фрактальных средах. Это обусловлено тем фактом, что геофизические экспериментальные данные указывают на то, что геосреда нелинейна, блочна и нередко обладает фрактальными свойствами. Механизмы переноса в средах с фрактальной структурой являются аномальными [10]. Математический аппарат для моделирования особенностей процессов переноса в таких средах, основанный на теории интегро-дифференцирования дробного порядка [11–14], интенсивно развивается и применяется во многих новых областях [15–23]. В частности, в работе [23] предложен дробно-дифференциальный аналог бипараболического эволюционного уравнения (2), являющийся естественным обобщением классического бипараболического уравнения в частных производных и предназначенный для моделирования аномальной динамики тепловых и диффузионных процессов в сложных условиях протекания. В рамках данного подхода для введенного уравнения получены замкнутые решения ряда задач, в частности задачи типа Коши и краевой задачи на конечном промежутке. Кроме того, в [23] предложена новая (дробно-дифференциальная) математическая модель для описания аномальной динамики фильтрационных процессов в трещиновато-пористых средах, основанная на указанном аналоге бипараболического уравнения.

В настоящей работе кратко излагается методика получения замкнутых решений некоторых краевых задач с нелокальными граничными условиями (как в прямой, так и обратной постановках) для бипараболического эволюционного уравнения и его дробно-дифференциального обобщения.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в прямоугольнике $(0,1)\times(0,T)$ краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую бипараболическому уравнению

$$(L+\tau_r L^2)u(x,t)=0, \tag{3}$$

несамосопряженным граничным условиям

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=0,\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t),\ u_{xxx}(0,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{4}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u'_t(x,0)=0,\ x\in[0,1], \tag{5}$$

где $L=\dfrac{\partial}{\partial t}-\kappa^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L^2=LL$, κ^2, τ_r — вещественные параметры, $\varphi(x)$ — заданная функция.

Под решением задачи (3)–(5) будем понимать функцию $u(x,t)\in C^{(4,2)}_{x,t}(\Omega_T)$, удовлетворяющую уравнению (3) и условиям (4), (5), где

$$C^{(4,2)}_{x,t}(\Omega_T)=\{u(x,t): u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, u_t, u_{tx}, u_{txx}, u_{tt}\in C(\Omega_T)\},$$

$$\Omega_T=\{(x,t): 0\le x\le 1,\ 0<t\le T\}.$$

Решение рассматриваемой задачи ищем в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций [24]

$$X_0(x)=1,\ X_{2k-1}(x)=\cos(\lambda_k x),\ X_{2k}(x)=x\sin(\lambda_k x),\ \lambda_k=2\pi k\ (k=1,2,\dots). \tag{6}$$

Вместе с последовательностью

$$Y_0(x)=2(1-x),\ Y_{2k-1}(x)=4(1-x)\cos(\lambda_k x),\ Y_{2k}(x)=4\sin(\lambda_k x)\ (k=1,2,\dots) \tag{7}$$

эти системы образуют биортогональную на интервале $(0,1)$ систему функций и любую функцию из $L_2(0,1)$ можно разложить в биортогональный ряд [24, 25]. В частности, функция $u(x,t)$ разлагается в ряд вида

$$u(x,t)=u_0(t)X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k-1}(t)X_{2k-1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{2k}(t)X_{2k}(x), \tag{8}$$

где

$$u_0(t)=(u(x,t),Y_0(x)),\ \ u_{2k-1}(t)=(u(x,t),Y_{2k-1}(x)),$$

$$u_{2k}(t)=(u(x,t),Y_{2k}(x))\ \ (k=1,2,\ldots),$$

(f,g) — скалярное произведение в $L_2(0,1)$.

Разлагая функцию начальных условий задачи $\varphi(x)$ в биортогональный ряд

$$\varphi(x)=\varphi_0X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k-1}X_{2k-1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{2k}X_{2k}(x),$$

где $\varphi_k=(\varphi(x),Y_k(x))$ $(k=0,1,2,\ldots)$, и применяя формальную схему метода разделения переменных, получаем из (3)–(5) для определения искомых коэффициентов $u_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ такие последовательности задач Коши:

$$\tau_r\frac{\partial^2u_0(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u_0(t)}{\partial t}=0,\quad u_0(0)=\varphi_0,\quad u_0'(0)=0, \tag{9}$$

$$\mu_k\frac{\partial^2u_{2k}(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u_{2k}(t)}{\partial t}+\nu_ku_{2k}(t)=0,\ u_{2k}(0)=\varphi_{2k},\ \ u_{2k}'(0)=0\ \ (k=1,2,\ldots), \tag{10}$$

$$\mu_k\frac{\partial^2u_{2k-1}(t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u_{2k-1}(t)}{\partial t}+\nu_ku_{2k-1}(t)=g(u_{2k}(t)),$$

$$u_{2k-1}(0)=\varphi_{2k-1},\ \ u_{2k-1}'(0)=0\ \ (k=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Здесь

$$\mu_k=\frac{\tau_r}{1+2\tau_r\kappa^2\lambda_k^2},\quad \nu_k=\mu_k\kappa^2\lambda_k^2\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\lambda_k^2\right),$$

$$g(u_{2k}(t))=2\kappa^2\lambda_k(u_{2k}(t)+2\mu_ku_{2k}'(t))\ \ (k=1,2,\ldots).$$

На основании результатов работы [26] решения задач (9)–(11) можно записать в виде

$$u_0(t)=\varphi_0, \tag{12}$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}\rho_k(t)\ \ (k=1,2,\ldots), \tag{13}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}\rho_k(t)+R_k(t)\ \ (k=1,2,\ldots), \tag{14}$$

где

$$\rho_k(t)=\left[1+\tau_r\kappa^2\lambda_k^2\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)\right]e^{-\kappa^2\lambda_k^2t}, \tag{15}$$

$$R_k(t)=2\varphi_{2k}\kappa^2\lambda_k\left[t\rho_k(t)+\tau_r\left(1-e^{-\frac{t}{\tau_r}}\right)e^{-\kappa^2\lambda_k^2t}\right]\ (k=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Таким образом, формальное решение рассматриваемой задачи определяется соотношениями (8), (12)–(16). При этом на основании изложенного в [27] подхода нетрудно доказать равномерную сходимость встречающихся рядов и, таким образом, установить наличие классического решения указанной задачи: $u(x,t)\in C_{x,t}^{(4,2)}(\overline{\Omega}_T)$. Аналогично методике работы [27] доказывается также единственность полученного решения.

ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛОГА БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в прямоугольнике $(0,1)\times(0,T)$ краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую дробно-дифференциальному аналогу бипараболического уравнения [23]

$$(L_1+\tau_r L_1^2)u(x,t)=0, \tag{17}$$

граничным

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=0,\ u_{xx}(0,t)=u_{xx}(1,t),\ u_{xxx}(0,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{18}$$

и начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\ D_t^{(\alpha)}u(x,0)=0,\ x\in[0,1], \tag{19}$$

где $L_1=D_t^{(\alpha)}-\kappa^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, $L_1^2=L_1L_1$, $D_t^{(\alpha)}$ — оператор дробной производной Капуто–Герасимова [12–14] по переменной t порядка α $(0<\alpha<1)$.

Под решением задачи (17)–(19) будем понимать функцию $u(x,t)\in C_{x,t}^{(4,2\alpha)}(\Omega_T)$, удовлетворяющую уравнению (17) и условиям (18), (19), где

$$C_{x,t}^{(4,2\alpha)}(\Omega_T)=$$

$$=\{u(x,t): u, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, D_t^{(\alpha)}u, D_t^{(\alpha)}u_x, D_t^{(\alpha)}u_{xx}, D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}u\in C(\Omega_T)\}.$$

Аналогично изложенному выше решение рассматриваемой задачи ищем в виде биортогонального ряда (8). Тогда для определения искомых коэффициентов $u_k(t)$ $(k=0,1,2,\ldots)$ данного ряда из (17)–(19) получаем следующие последовательности задач:

$$\tau_r D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}u_0(t)+D_t^{(\alpha)}u_0(t)=0,\ u_0(0)=\varphi_0,\ D_t^{(\alpha)}u_0(0)=0, \tag{20}$$

$$\mu_k D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}u_{2k}(t)+D_t^{(\alpha)}u_{2k}(t)+\nu_k u_{2k}(t)=0,$$
$$u_{2k}(0)=\varphi_{2k},\ D_t^{(\alpha)}u_{2k}(0)=0, \tag{21}$$

$$\mu_k D_t^{(\alpha)}D_t^{(\alpha)}u_{2k-1}(t)+D_t^{(\alpha)}u_{2k-1}(t)+\nu_k u_{2k-1}(t)=G(u_{2k}(t)),$$
$$u_{2k-1}(0)=\varphi_{2k-1},\quad D_t^{(\alpha)}u_{2k-1}(0)=0, \tag{22}$$

где

$$G(u_{2k_k}(t))=2\kappa^2\lambda_k(u_{2k}(t)+2\mu_k D_t^{(\alpha)}u_{2k}(t))\ (k=1,2,\ldots).$$

Решения задач (20)–(22) можно получить с помощью операционного метода аналогично [23]. Опуская громоздкие выкладки, окончательно имеем

$$u_0(t)=\varphi_0, \tag{23}$$

$$u_{2k}(t)=\varphi_{2k}p_k^{(\alpha)}(t)\ (k=1,2,\ldots), \tag{24}$$

$$u_{2k-1}(t)=\varphi_{2k-1}p_k^{(\alpha)}(t)+r_k^{(\alpha)}(t)\ (k=1,2,\ldots), \tag{25}$$

где

$$p_k^{(\alpha)}(t)=(1+\tau_r\kappa^2\lambda_k^2)E_\alpha(-\kappa^2\lambda_k^2t^\alpha)-\tau_r\kappa^2\lambda_k^2E_\alpha\left(-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\lambda_k^2\right)t^\alpha\right), \tag{26}$$

$$r_k^{(\alpha)}(t) = 2\varphi_{2k}\kappa^2\lambda_k \times$$

$$\times\left\{t^{\alpha}\left[(1+\tau_r\kappa^2\lambda_k^2)E_{\alpha,\alpha+1}^2(-\kappa^2\lambda_k^2 t^{\alpha}) - \tau_r\kappa^2\lambda_k^2 E_{\alpha,\alpha+1}^2\left(-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\lambda_k^2\right)t^{\alpha}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\tau_r\left[E_{\alpha}(-\kappa^2\lambda_k^2 t^{\alpha}) - E_{\alpha}\left(-\left(\frac{1}{\tau_r}+\kappa^2\lambda_k^2\right)t^{\alpha}\right)\right]\right\}, \qquad (27)$$

где $E_{\alpha}(z)$ — стандартная функция Миттаг-Леффлера [12–14], $E_{\alpha,\beta}^{\gamma}(z)$ — обобщенная трехпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [19, 28, 29].

Таким образом, соотношения (8), (23)–(27) определяют формальное решение поставленной задачи (17)–(19). Для завершения процесса решения необходимо установить сходимость всех встречающихся рядов.

С учетом известной оценки для обобщенной функции Миттаг-Леффлера [28] имеем

$$\lambda^{\rho} t^{\alpha\rho} |E_{\alpha,\beta}^{\rho}(-\lambda t^{\alpha})| \le M \quad (t \ge 0,\ \lambda > 0), \qquad (28)$$

где $0<\alpha<2$, $\beta\in R$, $\rho=1,2$, $M=M(\alpha,\beta)>0$, получаем из (24), (26) следующую оценку:

$$|u_{2k}(t)| \le |\varphi_{2k}| \frac{M_1}{\lambda_k^2} \quad (k=1,2,\ldots,\ M_1>0,\ t\ge t_0>0). \qquad (29)$$

Далее, принимая во внимание (28), из соотношения (27) находим

$$|r_k^{(\alpha)}(t)| \le |\varphi_{2k}| \frac{M_2}{\lambda_k} \quad (k=1,2,\ldots,\ M_2>0,\ t\ge t_0>0). \qquad (30)$$

Тогда с учетом (29), (30) из соотношений (25) получаем оценку

$$|u_{2k-1}(t)| \le |\varphi_{2k-1}| \frac{M}{\lambda_k^2} + \varphi_{2k} \left|\frac{L}{\lambda_k}\right| \quad (k=1,2,\ldots,\ M, L>0,\ t\ge t_0>0). \qquad (31)$$

Наложив на функцию $\varphi(x)$ дополнительные ограничения в виде

$$\varphi(x)\in C^5[0,1],\ \varphi'(0)=\varphi'''(0)=0,\ \varphi(0)=\varphi(1),\ \varphi''(0)=\varphi''(1),\ \varphi^{(4)}(0)=\varphi^{(4)}(1),$$

пятикратным интегрированием по частям в выражении $\varphi_{2k}=(\varphi(x), Y_{2k}(x))$ получим соотношение $\varphi_{2k}=\dfrac{4}{\lambda_k^5}(\varphi^{(5)}(x), Y_{2k}(x))$ $(k=1,2,\ldots)$.

Отсюда имеем $\varphi_{2k}=O\left(\dfrac{1}{\lambda_k^5}\right)$ $(k\to\infty)$. При этом для φ_{2k-1} справедлива такая же оценка: $\varphi_{2k-1}=O\left(\dfrac{1}{\lambda_k^5}\right)$ $(k\to\infty)$. С учетом этих оценок и соотношений (29), (31) на основании мажорантного признака Вейерштрасса заключаем, что ряды в (8) сходятся абсолютно и равномерно в области Ω_T и функция $u(x,t)$ непрерывна в этой области $u(x,t)\in C(\Omega_T)$. Аналогично устанавливается и равномерная сходимость рядов из производных $u(x,t)$. Например, для производной 4-го порядка по геометрической переменной

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^4 u_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k}(t)[\lambda_k^4 X_{2k}(x) - 4\lambda_k^3 X_{2k-1}(x)] \qquad (32)$$

имеем (с учетом (29), (31)) следующие оценки:

$$\lambda_k^4 |u_{2k-1}(t)| \le \frac{\lambda_k^4}{\lambda_k^5}\left(\frac{C_1}{\lambda_k^2}+\frac{C_2}{\lambda_k}\right) \le \frac{C}{\lambda_k^2} \quad (k=1,2,\ldots,\ C>0), \tag{33}$$

$$\lambda_k^3 |u_{2k}(t)| \le \lambda_k^3 \frac{N}{\lambda_k^7} = \frac{N}{\lambda_k^4},\ \lambda_k^4 |u_{2k}(t)| \le \frac{N}{\lambda_k^3} \quad (k=1,2,\ldots,\ N>0). \tag{34}$$

Из оценок (33), (34) следует равномерная сходимость рядов в соотношении (32) и справедливость включения $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} \in C(\Omega_T)$.

Отметим также, что найденное выше решение рассматриваемой задачи единственно, поскольку, если существуют два различных решения u_1, u_2 данной задачи, для $u = u_1 - u_2$ имеем задачу вида (17)–(19) при $\varphi(x) \equiv 0$ $(x \in [0,1])$. Тогда $\varphi_k = (\varphi(x), Y_k(x)) = 0$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ и из соотношений (23)–(25), (27) получаем, что $u_0(t) = u_k(t) = 0$ $(0 < t \le T,\ k = 1,2,\ldots)$. При этом с учетом соотношения (8) имеем $u(x,t) \equiv 0$. Таким образом, решение задачи единственно.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО АНАЛОГА БИПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим в области $(0,1)\times(0,T)$ задачу определения правой части $f(x)$ для дробно-дифференциального аналога бипараболического эволюционного уравнения

$$(L_1 + \tau_r L_1^2) U(x,t) = f(x) \tag{35}$$

и его решения $U(x,t)$, удовлетворяющего условиям

$$U(0,t) = U(1,t),\quad U_x(0,t) = 0,\ U_{xx}(0,t) = U_{xx}(1,t),\ U_{xxx}(0,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{36}$$

$$U(x,0) = \varphi(x),\quad D_t^{(\alpha)} U(x,0) = 0,\ U(x,T) = h(x),\ x \in [0,1], \tag{37}$$

где $\varphi(x), h(x)$ — заданные функции начальных и конечных условий.

Под решением обратной задачи (35)–(37) будем понимать пару функций $\{U(x,t), f(x)\}$, где $U(x,t) \in C_{x,t}^{(4,2\alpha)}(\Omega_T)$, $f(x) \in C[0,1]$, удовлетворяющих уравнению (35) и краевым условиям (36), (37).

Решение рассматриваемой задачи ищется в виде разложений в биортогональные ряды:

$$U(x,t) = U_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U_{2k}(t) X_{2k}(x), \tag{38}$$

$$f(x) = f_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} X_{2k}(x), \tag{39}$$

где $f_k = (f(x), Y_k(x))$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ и системы $X_k(x), Y_k(x)$ $(k = 0,1,2,\ldots)$ определяются согласно (6), (7) соответственно.

Разложив в биортогональные ряды также функции начальных и конечных условий $\varphi(x)$ и $h(x)$,

$$\begin{bmatrix} \varphi(x) \\ h(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ h_0 \end{bmatrix} X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \varphi_{2k-1} \\ h_{2k-1} \end{bmatrix} X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \varphi_{2k} \\ h_{2k} \end{bmatrix} X_{2k}(x), \tag{40}$$

где $\varphi_k = (\varphi(x), Y_k(x))$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, из (35)–(37) с учетом соотношений (40) получаем такие последовательности задач:

$$\tau_r D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} U_0(t) + D_t^{(\alpha)} U_0(t) = f_0,\ U_0(0) = \varphi_0,\ D_t^{(\alpha)} U_0(0) = 0, \tag{41}$$

$$\mu_k D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} U_{2k}(t) + D_t^{(\alpha)} U_{2k}(t) + \nu_k U_{2k}(t) = \frac{\mu_k}{\tau_r} f_{2k},\ U_{2k}(0) = \varphi_{2k},$$

$$D_t^{(\alpha)} U_{2k}(0) = 0 \ \ (k = 1, 2, \dots), \tag{42}$$

$$\mu_k D_t^{(\alpha)} D_t^{(\alpha)} U_{2k-1}(t) + D_t^{(\alpha)} U_{2k-1}(t) + \nu_k U_{2k-1}(t) = \frac{\mu_k}{\tau_r} f_{2k-1} + G(U_{2k}(t)),$$

$$U_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1}, \ \ D_t^{(\alpha)} u_{2k-1}(0) = 0 \ \ (k = 1, 2, \dots), \tag{43}$$

где

$$G(U_{2k}(t)) = 2\kappa^2 \lambda_k (U_{2k}(t) + 2\mu_k D_t^{(\alpha)} U_{2k}(t)) \ \ (k = 1, 2, \dots).$$

При этом из условия $U(x,T) = h(x)$ $(x \in [0,1])$ с учетом (38), (40) находим

$$U_0(T) = h_0, \ \ U_k(T) = h_k \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{44}$$

Решения задач (41)–(43) отыскиваем с помощью операционного метода [13, 14]. В результате получаем

$$U_0(t) = \varphi_0 + f_0 \frac{t^{2\alpha}}{\tau_r} E_{\alpha, 2\alpha+1}\left(-\frac{t^\alpha}{\tau_r} \right), \tag{45}$$

$$U_{2k}(t) = u_{2k}(t) + f_{2k} \Theta_k^{(\alpha)}(t) \ \ (k = 1, 2, \dots), \tag{46}$$

$$U_{2k-1}(t) = u_{2k-1}(t) + f_{2k-1} \Theta_k^{(\alpha)}(t) \ \ (k = 1, 2, \dots), \tag{47}$$

где $u_{2k}(t), u_{2k-1}(t)$ задаются соотношениями (24)–(27), а функция $\Theta_k^{(\alpha)}(t)$ определяется равенством

$$\Theta_k^{(\alpha)}(t) = t^\alpha \left[E_{\alpha,\alpha+1}(-\kappa^2 \lambda_k^2 t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha+1}\left(-\left(\frac{1}{\tau_r} + \kappa^2 \lambda_k^2 \right) t^\alpha \right) \right]$$

(здесь $E_{\alpha,\beta}(z)$ — двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера [28, 29]).

Из условий (44) с учетом соотношений (45)–(47) находим неизвестные коэффициенты разложения искомой функции $f(x)$ в виде

$$f_0 = \frac{(h_0 - \varphi_0)\tau_r}{T^{2\alpha} E_{\alpha,2\alpha+1}\left(-\dfrac{T^\alpha}{\tau_r} \right)}, \ \ f_k = \frac{h_k - u_k(T)}{\Theta_k^{(\alpha)}(T)} \ \ (k = 1, 2, \dots). \tag{48}$$

Таким образом, формальное решение рассматриваемой задачи определяется соотношениями (38), (39), (45)–(48).

Наложим на функцию $h(x)$ $(x \in [0,1])$ те же ограничения, что и выше для функции $\varphi(x)$ $(x \in [0,1])$. Тогда из соотношений (48) с учетом (28) получаем оценки $f_{2k}, f_{2k-1} = O\left(\dfrac{1}{\lambda_k^3} \right)$ $(k \to \infty)$, из которых следует абсолютная и равномерная сходимость на отрезке $[0,1]$ рядов в разложении (39), а также непрерывность функции $f(x)$ при $x \in [0,1]$. Далее, из соотношений (46), (47) с учетом (29), (31) устанавливаем справедливость при $t \ge t_0 > 0$ следующих соотношений:

$$|U_{2k-1}(t)| \le \frac{L_1}{\lambda_k^5}, \ |U_{2k}(t)| \le \frac{L_2}{\lambda_k^5} \ \ (k = 1, 2, \dots, \ L_1, L_2 > 0). \tag{49}$$

Из оценок (49) непосредственно вытекает абсолютная и равномерная сходимость в области Ω_T рядов в соотношении (38). Следовательно, имеем

$U(x, t) \in C(\Omega_T)$. Факт наличия единственности решения рассматриваемой задачи устанавливается аналогично изложенному выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для бипараболического эволюционного уравнения в частных производных и его дробно-дифференциального обобщения выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых краевых задач с нелокальными граничными условиями. Рассмотрены как прямая, так и обратная нелокальные задачи для дробно-дифференциального аналога стандартного бипараболического уравнения. При этом математическая постановка обратной задачи предполагает поиск вместе с решением исходного уравнения дробного порядка также его неизвестной правой части, функционально зависящей только от геометрической переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Москва: Наука, 1964. 488 с.
2. Карташов Э.И. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высш. школа, 1979. 415 с.
3. Лыков А.В. Тепломассообмен. Москва: Энергия, 1978. 479 с.
4. Cattaneo G. Sur une forme de l'equation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *Compte Rendus*. 1958. Vol. 247, N 4. P. 431–433.
5. Фущич В.И., Галицын А.С., Полубинский А.С. О новой математической модели процессов теплопроводности. *Украинский математический журнал*. 1990. Т. 42, № 2. С. 237–245.
6. Фущич В.И. О симметрии и частных решениях некоторых многомерных уравнений математической физики. *Теоретико-алгебраические методы в задачах математической физики*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 4–22.
7. Булавацький В.М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації. *Допов. НАН України*. 1997. № 8. С. 13–17.
8. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of filtrational consolidation of soil under motion of saline solutions on the basis of biparabolic model. *Journal of Automation and Information Science*. 2003. Vol. 35, N 8. P. 13–22.
9. Bulavatsky V.M., Skopetsky V.V. Generalized mathematical model of the dynamics of consolidation processes with relaxation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 5. P. 646–654.
10. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
11. Djrbashian M.M. Harmonic analysis and boundary-value problems in the complex domain. Basel: Springer Basel AG, 1993. 255 p.
12. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: theory and applications. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 p.
13. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
14. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
15. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
16. Caputo M. Models of flux in porous media with memory. *Water Resources Research*. 2000. Vol. 36. P. 693–705.
17. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. Москва: Физматлит, 2003. 272 с.
18. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шибанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления. Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2012. 135 с.
19. Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann–Liouville time fractional derivative. *Journal of Physics A*. 2011. Vol. 44. P. 5–52.
20. Tomovski Z., Sandev T., Metzler R., Dubbeldam J. Generalized space-time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative. *Physica A*. 2012. Vol. 391. P. 2527–2542.
21. Furati K.M., Iyiola O.S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion. *Applied Mathematics and Computation*. 2014. Vol. 249. P. 24–31.

22. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modelling of the fractional differential dynamics of the relaxation process of convective diffusion under conditions of planed filtration. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 886–895.
23. Bulavatsky V.M. Fractional differential analog of biparabolic evolution equation and some its applications. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 5. P. 737–747.
24. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
25. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
26. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. К.: Наук. думка, 2005. 283 с.
27. Калиев И.А., Сабитова М.М. Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам. *Сибирский журнал индустриальной математики*. 2009. Т. 12, № 1 (37). С. 89–97.
28. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.
29. Kilbas A.A., Saigo M., Saxena R.K. Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators. *Integral Transforms and Special Functions*. 2004. Vol. 15, N 1. P. 31–49.

Надійшла до редакції 01.10.2018

В.М. Булавацький

ДЕЯКІ НЕЛОКАЛЬНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІПАРАБОЛІЧНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ТА ЙОГО ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОГО АНАЛОГА

Анотація. Для біпараболічного еволюційного рівняння з частинними похідними та його дробово-диференційного узагальнення виконано постановки та одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач з нелокальними граничними умовами. Розглянуто варіанти прямої та оберненої постановок задач. Математична постановка оберненої задачі передбачає пошук разом з розв'язком вихідного інтегро-диференційного рівняння дробового порядку також його невідомої правої частини, яка функціонально залежить лише від геометричної змінної.

Ключові слова: біпараболічне еволюційне рівняння, дробово-диференційний аналог біпараболічного рівняння, нелокальна крайова задача, зворотня задача, біортогональні системи функцій.

V.M. Bulavatsky

SOME NONLOCAL BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR BIPARABOLIC EVOLUTION EQUATION AND ITS FRACTIONAL DIFFERENTIAL ANALOGUEE

Abstract. For biparabolic evolution partial differential equation and its fractional differential generalization, statements are made and closed form solutions of some boundary-value problems with nonlocal boundary conditions are obtained. Variants of direct and inverse problem statements are considered. The mathematical formulation of the inverse problem involves the search together with the solution of the original integro-differential equation of fractional order also its unknown right-hand side that depends functionally only on the geometric variable.

Keywords: biparabolic evolution equation, fractional-differential analogue of biparabolic equation, nonlocal boundary value problem, inverse problem, biorthogonal systems of functions.

Булавацкий Владимир Михайлович,
доктор техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: v_bulav@ukr.net.