УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ. I

Аннотация. Решена задача сближения управляемых объектов на основе метода разрешающих функций. Предложены достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции разных типов. На их основе разработаны две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение дифференциальной игры в классе квазистратегий и контруправлений.

Ключевые слова: квазилинейная дифференциальная игра, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия, разрешающая функция.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются проблемы сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики на основе метода разрешающих функций [1]. Данный метод позволяет эффективно использовать современную технику многозначных отображений и их селекторов в обоснованиях игровых конструкций и получать содержательные результаты. В любых формах метода разрешающих функций главным является накопительный принцип, который применяется в текущем суммировании разрешающей функции для оценки качества игры первого игрока вплоть до достижения некоторого порогового значения.

В отличие от основной схемы метода разрешающих функций в статье исследуется случай, когда условие Понтрягина не имеет места. Следуя методике работы [2], вместо селектора Понтрягина, которого не существует, рассматривается некоторая функция сдвига и с ее помощью вводятся специальные многозначные отображения, порождающие верхние и нижние разрешающие функции двух типов. На основе этих функций получены достаточные условия разрешимости задачи сближения за некоторое гарантированное время.

Данная работа продолжает исследования [1, 2] и примыкает к публикациям [3–22].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается равенством

$$z(t)=g(t)+\int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau),v(\tau))d\tau,\ \ t\ge 0. \qquad (1)$$

Здесь $z(t)\in R^n$, функция $g(t)$, $g:R_+\to R^n$, измерима по Лебегу [8] и ограничена при $t>0$, матричная функция $\Omega(t,\tau)$, $t\ge\tau\ge 0$, измерима по t, а также суммируема по τ для каждого $t\in R_+$. Блок управления задается функцией $\varphi(u,v)$, $\varphi\colon U\times V\to R^n$, непрерывной по совокупности переменных на прямом произведении непустых компактов U и V; m, l, n — натуральные числа.

Управления игроков $u(\tau)$, $u\colon R_+\to U$, и $v(\tau)$, $v:R_+\to V$, являются измеримыми функциями времени.

Кроме процесса (1) задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Цели первого (u) и второго (v) игроков противоположны. Первый (преследователь) пытается вывести траекторию процесса (1) на терминальное множество (2) за кратчайшее время, а другой (убегающий) — максимально оттянуть момент попадания траектории на множество M^* или избежать встречи.

Примем сторону первого игрока, и если игра (1), (2) продолжается на интервале $[0, T]$, то управление первого игрока в момент t выберем на основе информации о $g(T)$ и $v_t(\cdot)$, т.е. в виде измеримой функции

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U, \tag{3}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t]\}$ — предыстория управления второго игрока к моменту t, или в виде контруправления

$$u(t) = u(g(T), \; v(\cdot)), \; t \in [0, T], \; u(t) \in U. \tag{4}$$

Если, в частности, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матричная экспонента, то полагаем, что управление $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реализует квазистратегию [6], а контруправление [3] $u(t) = u(z_0, v(\cdot))$ является проявлением стробоскопической стратегии Хайека [7].

Обозначим π оператор ортогонального проектирования из R^n в L. Положив $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$, рассмотрим многозначные отображения

$$W_0(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v), \; W_0(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W_0(t, \tau, v)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$. Будем предполагать, что многозначное отображение $W_0(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения на множестве $\Delta \times V$.

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W_0(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t, \tau)$ заключаем, что при любом фиксированном $t > 0$ вектор-функция $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ и непрерывной по $u \in U$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [8] при любом фиксированном $t > 0$ многозначное отображение $W_0(t, \tau, v)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Тогда в силу леммы 5 [1] многозначное отображение $W_0(t, \tau)$ — измеримое по τ, $\tau \in [0, t]$, замкнутозначное отображение.

Из условия Понтрягина и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что при любом $t > 0$ существует хотя бы один измеримый селектор Понтрягина $\gamma_0(t, \tau)$ такой, что $\gamma_0(t, \tau) \in W_0(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$. Введем функцию

$$\xi_0(t) = \xi(t, g(t), \gamma_0(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma_0(t, \tau) d\tau.$$

В силу предположений селектор Понтрягина $\gamma_0(t, \tau)$ — суммируемая по τ, $\tau \in [0, t]$, функция при любом $t > 0$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma_0(\cdot,\cdot))=\{t\ge 0:0\in M-\xi(t,g(t),\gamma_0(t,\cdot))\}. \qquad (5)$$

Если включение в фигурных скобках соотношения (5) не выполняется ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma_0(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие Понтрягина, для соответствующего селектора Понтрягина $\gamma_0(\cdot,\cdot)$ множество $\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma_0(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_0\in\mathrm{P}(g(\cdot),\gamma_0(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_0 с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Определим способ выбора управления преследователем.

Рассмотрим для $\tau\in[0,\mathrm{P}_0]$, $\upsilon\in V$ многозначное отображение

$$U_0(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathrm{P}_0,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma_0(\mathrm{P}_0,\tau)=0\}.$$

В силу свойств параметров процесса (1) отображение $U_0(\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] многозначное отображение $U_0(\tau,\upsilon)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_0(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1]. Положим управление первого игрока равным $u_0(\tau)=u_0(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}]$.

Учитывая формулу (1), получаем

$$\pi z(\mathrm{P}_0)=\xi(\mathrm{P}_0,g(\mathrm{P}_0),\gamma(\mathrm{P}_0,\cdot))+\int_0^{\mathrm{P}_0}(\pi\Omega(\mathrm{P}_0,\tau)\varphi(u_0(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\mathrm{P}_0,\tau))d\tau. \qquad (6)$$

Тогда, с учетом закона выбора управления первым игроком, из соотношение (6) следует

$$\pi z(\mathrm{P}_0)\in\xi(\mathrm{P}_0,g(\mathrm{P}_0),\gamma(\mathrm{P}_0,\cdot))+M-\xi(\mathrm{P}_0,g(\mathrm{P}_0),\gamma(\mathrm{P}_0,\cdot))=M,$$

поэтому $z(\mathrm{P}_0)\in M^*$.

Пусть $\gamma(t,\tau)$, $\gamma:\Delta\to L$, $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$, — некоторая, почти всюду ограниченная измеримая по t и суммируемая по τ, $\tau\in[0,T]$, для каждого $t>0$ функция, которую назовем функцией сдвига. Введем функцию

$$\xi(t)=\xi(t,g(t),\gamma(t,\cdot))=\pi g(t)+\int_0^t\gamma(t,\tau)d\tau.$$

В силу предположений селектор $\gamma(t,\tau)$ является суммируемой по τ, $\tau\in[0,t]$, функцией при любом $t>0$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)=\{\alpha\ge 0:[\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U,\upsilon)-\gamma(t,\tau)]\cap\alpha[M-\xi(t)]\ne\varnothing\}. \qquad (7)$$

Условие 1. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta\times V$.

Если это условие выполнено, то, следуя работе [1], введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*(t,\tau,\upsilon)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\},$$

$$\alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\},\ \tau\in[0,t],\ \upsilon\in V.$$

Можно показать [1], что многозначное отображение (7) замкнутозначно, $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо по совокупности (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$.

Пусть $V(0,t)$ — совокупность измеримых функций $\upsilon(\tau)$, $\tau \in [0,t]$, со значениями из V. Поскольку при фиксированном t функции $\alpha^*(t,\tau,\upsilon)$ и $\alpha_*(t,\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримы по совокупности (τ,υ), $\tau \in [0,t]$, $\upsilon \in V$, они суперпозиционно измеримы [1], т.е. $\alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ и $\alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau))$ измеримы по τ, $\tau \in [0,t]$, при любой измеримой функции $\upsilon(\cdot) \in V(0,t)$.

Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1. Рассмотрим при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0,t]$, $t>0$, компактнозначное многозначное отображение

$$U_*(\tau,\upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon) - \gamma(t,\tau) \in \alpha_*(t,\tau,\upsilon)[M - \xi(t)]\}. \qquad (8)$$

В силу свойств параметров процесса (1) и нижней разрешающей функции $\alpha_*(t,\tau,\upsilon)$ компактнозначное отображение (8) $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0,t]$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W_*(t,\tau,\upsilon) = \pi\Omega(t,\tau)\varphi(U_*(\tau,\upsilon),\upsilon) - \gamma(t,\tau), \quad W_*(t,\tau) = \bigcap_{\upsilon \in V} W_*(t,\tau,\upsilon) \qquad (9)$$

на множествах $\Delta \times V$ и Δ соответственно, где $\Delta = \{(t,\tau) : 0 \le \tau \le t < \infty\}$.

Условие 2. Многозначное отображение $W_*(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ заключаем, что при любом фиксированном $t>0$ вектор-функция $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)$ будет $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau,\upsilon) \in [0,t] \times V$ и непрерывной по $u \in U_*(\tau,\upsilon)$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [8] при любом фиксированном $t>0$ многозначное отображение $W_*(t,\tau,\upsilon)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau,\upsilon) \in [0,t] \times V$. Тогда в силу леммы 5 [1] многозначное отображение $W_*(t,\tau)$ — измеримое по τ, $\tau \in [0,t]$, замкнутозначное отображение.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \\ = \left\{ t \ge 0 : 0 \in M - \xi(t, g(t), \gamma(t,\cdot)), \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t)} \int_0^t \alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau))d\tau \le 1 \right\}. \qquad (10)$$

Если включение в фигурных скобках соотношения (10) не выполняется ни для каких $t \ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1, 2, множество M выпукло, для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $\mathrm{P}_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_* \in \mathrm{P}_*(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент P_* с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, \mathrm{P}_*]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau)$ такой, что $\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau) \in W_*(\mathrm{P}_*,\tau)$, $\tau \in [0,\mathrm{P}_*]$. Поэтому для $\tau \in [0,\mathrm{P}_*]$ имеем $\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau) \in$ $\in \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*)]$. Следовательно, справедливо включение

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} \gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau)d\tau \in \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0),\mathrm{P}_*} \int_0^{\mathrm{P}_*} \alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))[M - \xi(\mathrm{P}_*)]d\tau,$$

которое с учетом свойств опорных функций можно записать в виде

$$\left(\int_0^{\mathrm{P}_*}\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau)d\tau,\psi\right)\le\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0),\mathrm{P}_*}C\left(\int_0^{\mathrm{P}_*}\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(\mathrm{P}_*)]d\tau,\psi\right)=$$

$$=\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0),\mathrm{P}_*}\int_0^{\mathrm{P}_*}\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,\upsilon(\tau))d\tau C(M-\xi(\mathrm{P}_*),\psi)\le C(M-\xi(\mathrm{P}_*),\psi).$$

Здесь учтены условия соотношения (10) и свойства опорных функций $C(X,\psi)$ [9]. Таким образом, имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}_*}\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau)d\tau\in M-\xi(\mathrm{P}_*). \qquad (11)$$

Рассмотрим при $\upsilon\in V,\ \tau\in[0,\mathrm{P}_*]$ компактнозначное многозначное отображение

$$U_*(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(\mathrm{P}_*,\tau)=\gamma_*(\mathrm{P}_*,\tau)\}. \qquad (12)$$

В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $U_*(\tau,\upsilon)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon\in V,\ \tau\in[0,\mathrm{P}_*]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] многозначное отображение $U_*(\tau,\upsilon)$ содержит $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1].

Положим управление первого игрока $u_*(\tau)=u_*(\tau,\upsilon(\tau)),\ \tau\in[0,\mathrm{P}_*]$. С учетом формулы (1) получаем

$$\pi z(\mathrm{P}_*)=\xi(\mathrm{P}_*)+\int_0^{\mathrm{P}_*}(\pi\Omega(\mathrm{P}_*,\tau)\varphi(u_*(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\mathrm{P}_*,\tau))d\tau. \qquad (13)$$

Тогда из соотношений (11)–(13) вытекает включение

$$\pi z(\mathrm{P}_*)\in\xi(\mathrm{P}_*)+M-\xi(\mathrm{P}_*)=M$$

и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*)\in M^*$, что завершает доказательство теоремы.

КВАЗИСТРАТЕГИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим множество

$$T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=$$
$$=\left\{t\ge 0:\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0,t)}\int_0^t\alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\ge 1,\ \inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0,t)}\int_0^t\alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau))d\tau<1\right\}. \qquad (14)$$

Если при некотором $t>0$ имеем $\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t],\ \upsilon\in V$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (14) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (14) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 3. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1, 2, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (3).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта $V,\ \tau\in[0,T]$.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t)=1-\int_0^t\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau-\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t,T)}\int_t^T\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau,\ t\in[0,T].$$

По определению T имеем

$$h(0)=1-\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0,T)}\int_0^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\int_0^T \alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\le 1-\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(0,T)}\int_0^T \alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_*\in(0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $\upsilon_{t_*}(\cdot)=\{\upsilon(s): s\in[0,t_*]\}$.

Промежутки времени $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ назовем «активным» и «пассивным» соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них.

На «активном» промежутке $\tau\in[0,t_*)$ рассмотрим компактнозначное отображение

$$U^*(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\ \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in\alpha^*(T,\tau,\upsilon)[M-\xi(T)]\},\ \tau\in[0,t_*). \tag{15}$$

Из построения отображения $\mathfrak{A}(T,\tau,\upsilon)$ следует, что многозначные отображения $U^*(\tau,\upsilon)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1) и верхней разрешающей функции $\alpha^*(T,\tau,\upsilon)$ компактнозначное отображение $U^*(\tau,\upsilon)$ при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,t_*)$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] в каждом из них существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u^*(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $u^*(\tau)=u^*(\tau,\upsilon(\tau))$.

Рассмотрим «пассивный» промежуток $[t_*,T]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_*(T,\tau)$ такой, что $\gamma_*(T,\tau)\in W_*(T,\tau)$, $\tau\in[t_*,T]$. Поэтому для $\tau\in[t_*,T]$ имеем $\gamma_*(T,\tau)\in\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(T)]$. Следовательно, справедливо включение

$$\int_{t_*}^T \gamma_*(T,\tau)d\tau\in\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t_*,T)}\int_{t_*}^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(T)]d\tau. \tag{16}$$

На «пассивном» промежутке $[t_*,T]$ рассмотрим компактнозначное отображение

$$U_*(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(T,\tau)=\gamma_*(T,\tau)\}. \tag{17}$$

Многозначные отображения $U_*(\tau,\upsilon)$ имеют непустые образы. В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $U_*(\tau,\upsilon)$ при $\upsilon\in V$, $\tau\in[t_*,T]$ $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] существует хотя бы один $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримый селектор $u_*(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1]. Положим управление первого игрока на «пассивном» промежутке равным $u_*(\tau)=u_*(\tau,\upsilon(\tau))$.

Учитывая формулу (1), при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T)=\xi(T)+\int_0^{t_*}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u^*(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^T(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(T,\tau))\,d\tau. \tag{18}$$

Из (15)–(18) следуют соотношения

$$\pi z(T)\in\xi(T)+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(T)]d\tau+\int_0^{t_*}\gamma_*(T,\tau)d\tau\subset$$

$$\subset\xi(T)+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(T)]d\tau+\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t_*,T)}\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))[M-\xi(T)]d\tau=$$

$$=\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau-\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t_*,T)}\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))\,d\tau\right]+$$

$$+\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))Md\tau+\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t_*,T)}\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))Md\tau=$$

$$=\left[\int_0^{t_*}\alpha^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau+\inf_{\upsilon(\cdot)\in V(t_*,T)}\int_{t_*}^{T}\alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\right]M=M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M можно подтвердить использованием аппарата опорных функций [9].

Для случая $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ достаточно применить теорему 2.

СТРОБОСКОПИЧЕСКАЯ СТРАТЕГИЯ СБЛИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 1. Рассмотрим при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,t]$, $t>0$, компактнозначное многозначное отображение

$$U^*(\tau,\upsilon)=\{u\in U:\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(t,\tau)\in\alpha^*(t,\tau,\upsilon)[M-\xi(t)]\}. \qquad (19)$$

В силу свойств параметров процесса (1) и верхней разрешающей функции $\alpha^*(t,\tau,\upsilon)$ компактнозначное отображение (19) $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,t]$.

Рассмотрим многозначные отображения

$$W^*(t,\tau,\upsilon)=\pi\Omega(t,\tau)\varphi(U^*(\tau,\upsilon),\upsilon)-\gamma(t,\tau),\ W^*(t,\tau)=\bigcap_{\upsilon\in V}W^*(t,\tau,\upsilon) \qquad (20)$$

на множествах $\Delta\times V$ и Δ соответственно, где $\Delta=\{(t,\tau):0\le\tau\le t<\infty\}$.

Условие 3. Многозначное отображение $W^*(t,\tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

С учетом предположений о матричной функции $\Omega(t,\tau)$ заключаем, что при любом фиксированном $t>0$ вектор-функция $\pi\Omega(t,\tau)\varphi(u,\upsilon)$ будет $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримой по $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$ и непрерывной по $u\in U^*(\tau,\upsilon)$. Поэтому на основании теоремы о прямом образе [8] при любом фиксированном $t>0$ многозначное отображение $W^*(t,\tau,\upsilon)$ имеет замкнутые значения и является $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримым по $(\tau,\upsilon)\in[0,t]\times V$. Тогда в силу леммы 5 [1] многозначное отображение $W^*(t,\tau)$ будет измеримым по τ, $\tau\in[0,t]$, замкнутозначным отображением.

Теорема 4. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1–3, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t)} \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(t,T)} \int_t^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau, \ t \in [0, T].$$

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,T)} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau > 0, \ h(T) = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,T)} \int_0^T \alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим «активный» промежуток $[0, t_*)$. Из условия 3 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma^*(T, \tau)$ такой, что $\gamma^*(T, \tau) \in W^*(T, \tau)$, $\tau \in [0, t_*)$. Поэтому для $\tau \in [0, t_*)$ имеем $\gamma^*(T, \tau) \in \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)]$. Следовательно, справедливо включение

$$\int_0^{t_*} \gamma^*(T, \tau) d\tau \in \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t_*)} \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)] d\tau. \tag{21}$$

Рассмотрим «пассивный» промежуток $[t_*, T]$. Из условия 2 и теоремы об измеримом выборе селектора [8] вытекает, что существует хотя бы один измеримый селектор $\gamma_*(T, \tau)$ такой, что $\gamma_*(T, \tau) \in W_*(T, \tau)$, $\tau \in [t_*, T]$. Поэтому для $\tau \in [t_*, T]$ имеем $\gamma_*(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)]$. Следовательно, справедливо включение

$$\int_{t_*}^{T} \gamma_*(T, \tau) d\tau \in \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(t_*,T)} \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)] d\tau. \tag{22}$$

Обозначим

$$\widetilde{\gamma}(T, \tau) = \begin{cases} \gamma^*(T, \tau), & \tau \in [0, t_*), \\ \gamma_*(T, \tau), & \tau \in [t_*, T]. \end{cases}$$

Тогда с учетом равенства $h(t_*) = 0$ и соотношений (21), (22) имеем

$$\int_0^T \widetilde{\gamma}(T, \tau) d\tau = \int_0^{t_*} \gamma^*(T, \tau) d\tau + \int_{t_*}^T \gamma_*(T, \tau)\, d\tau \in$$

$$\in \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t_*)} \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)] d\tau + \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(t_*,T)} \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M - \xi(T)] d\tau =$$

$$= \left[\inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t_*)} \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau + \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(t_*,T)} \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \right] M -$$

$$- \left[\inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0,t_*)} \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau + \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(t_*,T)} \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau \right] \xi(T) d\tau = M - \xi(T).$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$0 \in M - \xi(T) - \int_0^T \widetilde{\gamma}(T, \tau) d\tau. \tag{23}$$

Рассмотрим при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, T]$ компактнозначное многозначное отображение

$$\widetilde{U}(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) - \widetilde{\gamma}(T, \tau) = 0\}. \qquad (24)$$

В силу свойств параметров процесса (1) компактнозначное отображение $\widetilde{U}(\tau, \upsilon)$ $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримо [1] при $\upsilon \in V$, $\tau \in [0, T]$. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] многозначное отображение $\widetilde{U}(\tau, \upsilon)$ содержит $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-измеримый селектор $\widetilde{u}(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [1].

Положим управление первого игрока $\widetilde{u}(\tau) = \widetilde{u}(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. Принимая во внимание формулу (1), получаем

$$\pi z(T) = \xi(T) + \int_0^T \widetilde{\gamma}(T, \tau) d\tau + \int_0^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\widetilde{u}(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau) - \widetilde{\gamma}(T, \tau)) d\tau. \qquad (25)$$

Тогда из соотношений (23)–(25) вытекает

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \widetilde{\gamma}(T, \tau) d\tau + M - \xi(T) - \int_0^T \widetilde{\gamma}(T, \tau) d\tau = M$$

и, следовательно, $z(T) \in M^*$. Для случая $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \in M$ достаточно применить теорему 2.

Положим $\delta^* = \inf\limits_{\upsilon(\cdot) \in V[0, t]} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau$, $\delta_* = \inf\limits_{\upsilon(\cdot) \in V[0, t]} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau$,

где $V[0, t]$ — множество селекторов компакта V на промежутке $[0, t]$.

Лемма 1 [21]**.** Функции $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)$ и $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, t]$, и имеют место равенства

$$\delta^* = \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) d\tau, \ \delta_* = \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau. \qquad (26)$$

Условие 4. Многозначное отображение $W_0(t, \tau, \upsilon)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$.

Теорема 5. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнены условия 1, 4, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot, \cdot)$ множество $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не пусто и $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тогда игра может быть закончена в момент T с использованием управления вида (4).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\tau)$ — произвольный измеримый селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$.

Рассмотрим вначале случай $\xi(T, g(T), \gamma(T, \cdot)) \notin M$. В силу леммы 1 введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) d\tau - \int_t^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau, \ t \in [0, T].$$

По определению T с учетом соотношений (26) леммы 1 имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) d\tau = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0, T)} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) d\tau = 1 - \inf_{\upsilon(\cdot) \in V(0, T)} \int_0^T \alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s): s\in[0, t_*]\}$.

Рассмотрим при $v \in V$ компактнозначные многозначные отображения

$$U^*(\tau, v)=\{u\in U: \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \tau\in[0,t_*), \tag{27}$$

$$U_*(\tau, v)=\{u\in U: \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)\in$$
$$\in \inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]\},\ \tau\in[t_*,T]. \tag{28}$$

В силу условия 4 и свойств параметров процесса (1) компактнозначные отображения $U^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, и $U_*(\tau,v)$, $\tau\in[t_*,T]$, имеют непустые образы и $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримы [1]. Поэтому по теореме об измеримом выборе селектора [8] в каждом из них существует хотя бы по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-измеримому селектору $u^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, и $u_*(\tau,v)$, $\tau\in[t_*,T]$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями [1]. Положим управление первого игрока на «активном» промежутке равным $u^*(\tau)=u^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$, а на «пассивном» — равным $u_*(\tau)=u_*(\tau,v(\tau))$, $[t_*,T]$.

С учетом формулы (1) при выбранных управлениях получаем

$$\pi z(T)=\xi(T)+\int_0^{t_*}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u^*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau+$$
$$+\int_{t_*}^{T}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau. \tag{29}$$

Из соотношений (27)–(29) получаем следующее выражение:

$$\pi z(T)\in\xi(T)+\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]d\tau+\int_{t_*}^{T}\inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]d\tau=$$
$$=\xi(T)\left[1-\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau-\int_{t_*}^{T}\inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau\right]+$$
$$+\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)Md\tau+\int_{t_*}^{T}\inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)Md\tau=$$
$$=\left[\int_0^{t_*}\inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau+\int_{t_*}^{T}\inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)d\tau\right]M=M.$$

Здесь учтено равенство $h(t_*)=0$, а переход при интегрировании многозначных отображений с множеством M можно подтвердить применением аппарата опорных функций [9].

Для случая $\xi(T,g(T),\gamma(T,\cdot))\in M$ положим управление первого игрока на всем промежутке $[0,T]$ равным $u_*(\tau)=u_*(\tau,v(\tau))$. Тогда в силу соотношения (28) получим

$$\int_0^{T}(\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau))d\tau\in\int_0^{T}\inf_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)[M-\xi(T)]d\tau.$$

Следовательно, имеем

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \inf_{v \in V} \alpha_*(T, \tau, v) d\tau [M - \xi(T)] \subset M + M - \xi(T) = M.$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} \mathfrak{A}(t, \tau, v), \; (t, \tau) \in \Delta.$$

Условие 5. Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

Если это условие выполнено, то отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ порождает верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t, \tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}, \; \alpha_*(t, \tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau)\}, \; \tau \in [0, T], \; v \in V.$$

Можно показать [1], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau)$ замкнутозначно, измеримо по τ, а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по переменной τ при фиксированном t.

Лемма 2. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5 и многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ на множестве $\Delta \times V$ компактнозначно. Тогда имеют место неравенства

$$\inf_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \leq \alpha_*(t, \tau), \; (t, \tau) \in \Delta, \tag{30}$$

$$\inf_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) \geq \alpha^*(t, \tau), \; (t, \tau) \in \Delta. \tag{31}$$

При этом если выполнено условие 4, то в соотношениях (30) и (31) имеет место равенство.

Доказательство. Легко проверить, что на множестве $\Delta \times V$ справедливо включение $\mathfrak{A}(t, \tau, v) \supset \mathfrak{A}(t, \tau)$. Поэтому для каждого $v \in V$ имеем

$$\alpha^*(t, \tau, v) \geq \alpha^*(t, \tau), \; \alpha_*(t, \tau, v) \leq \alpha_*(t, \tau), \; (t, \tau) \in \Delta,$$

откуда следует справедливость соотношений (30), (31).

Если выполнено условие 4, то многозначное отображение $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ принимает выпуклые значения на множестве $\Delta \times V$ и $\mathfrak{A}(t, \tau, v) = [\alpha_*(t, \tau, v), \alpha^*(t, \tau, v)]$. Поэтому $\alpha_*(t, \tau, v) \leq \inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) \leq \alpha^*(t, \tau, v)$, $(t, \tau) \in \Delta$, $v \in V$, и справедливо условие 2. Следовательно, имеем $\inf\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$, $\inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) \in$ $\in \mathfrak{A}(t, \tau, v)$ при всех $(t, \tau, v) \in \Delta \times V$. Таким образом, $\inf\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v) \in \mathfrak{A}(t, \tau)$, $\inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v) \in \mathfrak{A}(t, \tau)$, откуда вытекает, что в соотношениях (30) и (31) имеет место равенство.

Рассмотрим множество

$$\Theta(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau) d\tau \geq 1, \; \int_0^t \alpha_*(t, \tau) d\tau < 1 \right\}. \tag{32}$$

Если при некотором $t > 0$ $\alpha^*(t, \tau) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (32) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \Theta(g(t), \gamma(\cdot,\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках данного соотношения. В случае, когда неравенства в соотношении (32) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 6. Пусть для конфликтно-управляемого процесса (1), (2) выполнено условие 5, множество M выпукло, для некоторой функции сдвига $\gamma(\cdot,\cdot)$ множество $\Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ не пусто и $\Theta \in \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$. Тогда $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) \supset \supset \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$ и игра может быть закончена в момент Θ с использованием управления вида (4). Если при этом справедливо условие 4, то $T(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot)) = = \Theta(g(\cdot), \gamma(\cdot,\cdot))$.

Доказательство с учетом леммы 2 можно провести по схеме доказательства теоремы 5, заменив условие 4 условием 5, а функции $\inf\limits_{v \in V} \alpha^*(t, \tau, v)$ и $\inf\limits_{v \in V} \alpha_*(t, \tau, v)$ — функциями $\alpha^*(t, \tau)$ и $\alpha_*(t, \tau)$ соответственно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена проблема сближения управляемых объектов в игровых задачах динамики. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие Понтрягина не выполняется. Введены верхние и нижние разрешающие функции разных типов и на их основе предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение конфликтно-управляемого процесса в классе квазистратегий и контруправлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
2. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
4. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
5. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
7. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
8. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
9. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
11. Chikrii A. A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
12. Chikrii A. A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.
13. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On group pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.

14. Chikrii A.A., Dzyubenko K.G. Bilinear Markov processes of searching for moving targets. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2001. Vol. 33, N 5–8. P. 62–74.

15. Chikrii A. A., Eidelman S. D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Journal Computers and Mathematics with Applications*. New York: Pergamon, 2002. Vol. 44. P. 835–851.

16. Chikrii A. A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and Its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.

17. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.

18. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical Sciences*. 1996. Vol. 80, N 3. P. 1489–1518.

19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.

20. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.

21. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.

22. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Dordrecht; Boston; London: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.

Надійшла до редакції 28.03.2019

Й.С. Раппопорт

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ. I

Анотація. Розв'язано задачу зближення керованих об'єктів на основі методу розв'язувальних функцій. Запропоновано достатні умови закінчення гри за скінченний гарантований час у випадку, коли умова Понтрягіна не виконується. Введено верхні і нижні розв'язувальні функції різних типів. На їхній основі розроблено дві схеми методу розв'язувальних функцій, що забезпечують завершення диференціальної гри в класі квазістратегій і контркерувань.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

I.S. Rappoport

SUFFICIENT APPROACHING CONDITIONS FOR CONTROLLED OBJECTS IN THE GAME DYNAMIC PROBLEMS. I

Abstract. The problem of approach of control objects is solved on the basis of the method of resolving functions. Sufficient conditions for game ending in a final guaranteed time are proposed in the case when the Pontryagin condition is not satisfied. The upper and lower resolving functions of different types are introduced and used to develop two schemes of the method of resolving functions that ensure the completion of the differential game in the class of quasi-strategies and counter-controls.

Keywords: quasilinear differential game, multivalued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.