УДК 519.233.5

П.С. КНОПОВ, А.С. КОРХИН

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГРЕССИИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ В НЕПРЕРЫВНОМ ВРЕМЕНИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрена линейная регрессия с переключениями в непрерывном времени. Описан метод оценивания точек переключения и параметров регрессии с переключениями. Приведены примеры его использования.

Ключевые слова: регрессия, непрерывное время, переключения, параметры регрессии, оценивание.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Регрессия с переключениями с неизвестными точками переключения — вид регрессии, который часто используется в различных приложениях и поэтому представляет большой интерес. В работах [1–2] и других публикациях рассматривается регрессия с переключениями в дискретном времени, которая линейна относительно неизвестных ее параметров. Суть регрессии с переключениями состоит в том, что параметры регрессии постоянны не на интервале наблюдения, а на его подынтервалах, которые разделяются один от другого точками переключения.

Для построения регрессия с переключениями в непрерывном времени необходимо знать характер изменения независимой переменной $y(t)$ в окрестности точек переключения, который можно определить по ее математическому ожиданию $Ey(t)$. На рис. 1, 2 графически представлены возможные его изменения. Рис. 1 иллюстрирует переход от одного подынтервала времени постоянства параметров регрессии к другому подынтервалу, когда в окрестности точки переключения на малом отрезке времени длиной h^0 происходит резкое изменение $Ey(t)$. При этом параметры регрессии на соседних интервалах между собой не связаны. Такая ситуация возможна при переходе системы из одного установившегося режима в другой. Тогда h^0 представляет собой длительность переходного процесса. Случай, когда в точке переключения стыкуются тренды на соседних подынтервалах времени, показан на рис. 2. Существующая связь между параметрами регрессии на этих подынтервалах обеспечивает непрерывность функции $Ey(t)$. В обоих случаях $Ey(t)$ непрерывна в точке переключения.

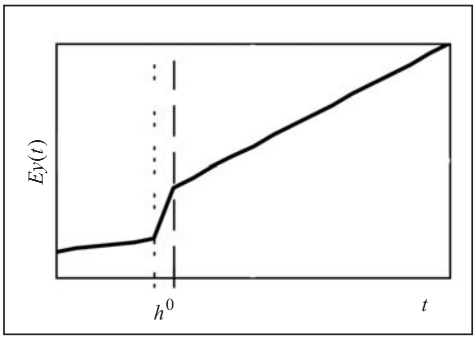

Рис. 1. График математического ожидания зависимой переменной при быстром переходе от одного режима работы к другому. Левая вертикальная линия соответствует точке переключения

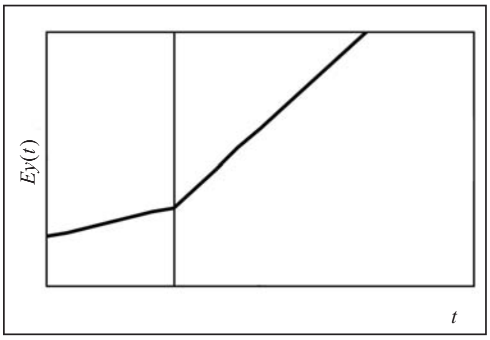

Рис. 2. График математического ожидания зависимой переменной при плавном переходе от одного режима работы к другому. Вертикальная линия соответствует точке переключения

В настоящей статье рассматривается построение регрессии в непрерывном времени с переключениями для ситуации, показанной на рис. 1. Регрессия линейна относительно неизвестных ее параметров:

$$y(t)=\mathbf{x}'(t)\alpha_{ti}^0+\mathbf{z}'(t)\beta^0+\varepsilon(t),\ t\in I_i^0,\ i=1,\ldots,k^0+1,\ t\in[0,T], \tag{1}$$

где штрих в индексе означает транспонирование, $\mathbf{x}_t\in\Re^n$ и $\mathbf{z}_t\in\Re^m$ — независимые переменные (регрессоры), $\alpha_{ti}^0\in\Re^n$ и $\beta^0\in\Re^m$ — истинные неизвестные величины параметров регрессии, $\varepsilon(t)$ — шум, k^0 — число точек переключения, T — длина интервала наблюдения $[0,T]$.

Параметры регрессии постоянны на $I_1^0=[0,t_1^0]$; $I_i^0=[t_{i-1}^0+h^0,t_i^0]$, $i=2,\ldots,k^0+1$, $t_{k^0+1}^0=T$:

$$\alpha_{ti}^0=\alpha_i^0=\mathrm{const}\ \text{для}\ t\in I_i^0,\ i=1,\ldots,k^0+1. \tag{2}$$

Точки переключения t_i^0, $i=1,\ldots,k^0$, и h^0 — неизвестные непрерывные величины.

Допущение 1. Стационарная случайная функция $\varepsilon(t)$, $t\ge 0$, имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию σ^2.

Частным случаем (1) является регрессия с постоянным на интервале наблюдения параметром α^0:

$$y(t)=\mathbf{x}'(t)\alpha^0+\varepsilon(t),\ 0\le t\le T. \tag{3}$$

Регрессия вида (3) являлась предметом исследования П.С. Кнопова [3, 4] и А.Я. Дороговцева [5]. Ей уделялось значительно меньше внимания, чем классической регрессии, у которой число наблюдений над переменными на интервале конечной длины также конечно. Такой вид регрессии является, очевидно, частным случаем (1) при $h^0=0$ и $t_1^0=t_2^0=\ldots=t_{k^0}^0=T$.

Предположим, что в (1) функции $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{z}(t)$ известны для $t\in[0,T]$. Тогда согласно допущению 1 получаем задачу оценивания параметров в регрессии (1)

$$S(\alpha,\beta,\mathbf{t})=$$
$$=\int_0^{t_1}(y(t)-\mathbf{x}'(t)\alpha_i-\mathbf{z}'(t)\beta)^2\,dt+\sum_{i=2}^{k+1}\int_{t_{i-1}+h}^{t_i}(y(t)-\mathbf{x}'(t)\alpha_i-\mathbf{z}'(t)\beta)^2\,dt\to\min, \tag{4}$$

где число точек переключений k задано, h — приближение для h^0, выбирается как малая величина; α_i, $i=1,\ldots,k+1$; β — варьируемые величины параметров регрессии, соответственно изменяющихся и неизменяющихся в точках переключения; t_i, $i=1,\ldots,k$, — варьируемые точки переключения — непрерывные величины; $t_{k+1}=T$; $\alpha=[\alpha_1'\ \alpha_2'\ \ldots\ \alpha_{k+1}']'$, $\mathbf{t}=[t_1\ t_2\ \ldots\ t_k]'$.

Относительно переменных в (1) примем следующие допущения.

Допущение 2. Зависимая переменная и регрессоры в (4) удовлетворяют условию Липшица для произвольных моментов времени t и θ:

$$|y(t)-y(\theta)|\le l|t-\theta|,\ \|\mathbf{x}(t)-\mathbf{x}(\theta)\|\le l|t-\theta|,\ \|\mathbf{z}(t)-\mathbf{z}(\theta)\|\le l|t-\theta|,\ t,\theta\in[0,T].$$

Допущение 3. Компоненты вектора $[\mathbf{x}'(t)\ \mathbf{z}'(t)]'$ — функции $x_j(t)$, $j=1,\ldots,n$, и $z_j(t)$, $j=1,\ldots,m$, линейно независимы для $t\in[0,T]$.

Преобразуем (4), записав его в таком виде:

$$S=S(\alpha,\beta,\mathbf{t})=\sum_{i=1}^{k+1}\left[\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i} y^2(t)dt-2\alpha'_i\left(\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)y(t)dt\right)-2\beta'\left(\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{z}(t)y(t)dt\right)+\right.$$

$$+\alpha'_i\left(\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)dt\right)\alpha_i+2\alpha'_i\left(\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)\mathbf{z}'(t)dt\right)\beta+$$

$$\left.+\beta'\left(\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{z}(t)\mathbf{z}'(t)dt\right)\beta\right], \tag{5}$$

где

$$H_i=\begin{cases} h, \text{если } i=2,\ldots k+1, \\ 0, \text{если } i=1, \end{cases} \quad t_0=0,\ t_{k+1}=T. \tag{6}$$

Введем матрицы и векторы:

$$\mathbf{A}_i=\mathbf{A}_i(t_i,t_{i-1})=\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)\mathbf{x}'(t)dt,\ (n\times n),\ i=1,\ldots,k+1;$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{t})=\mathrm{diag}(\mathbf{A}_i(t_i,t_{i-1})),\ i=1,\ldots,k+1,\ (n(k+1)\times n(k+1));$$

$$\mathbf{B}_i=\mathbf{B}_i(t_i,t_{i-1})=\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)\mathbf{z}'(t)dt,\ (n\times m),\ i=1,\ldots,k+1;$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{t})=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1(t_1,t_0)\\ \ldots\\ \mathbf{B}_{k+1}(t_{k+1},t_k)\end{bmatrix},\ (n(k+1)\times m);$$

$$\mathbf{C}_i=\mathbf{C}_i(t_i,t_{i-1})=\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{x}(t)y(t)dt,\ (n\times 1),\ i=1,\ldots,k+1;$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{t})=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1(t_1,t_0)\\ \ldots\\ \mathbf{C}_{k+1}(t_{k+1},t_k)\end{bmatrix},\ (n(k+1)\times 1);$$

$$\mathbf{D}=\sum_{i=1}^{k+1}\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{z}(t)y(t)dt,\ (m\times 1);$$

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{k+1}\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}\mathbf{z}(t)\mathbf{z}'(t)dt,\ (m\times m).$$

С учетом введенных обозначений из (5) получаем

$$S=(\alpha,\beta,\mathbf{t})=$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}\int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i}y^2(t)dt-2\sum_{i=1}^{k+1}\alpha'_i\mathbf{C}_i-2\beta'\mathbf{D}+\sum_{i=1}^{k+1}\alpha'_i\mathbf{A}_i\alpha_i+2\sum_{i=1}^{k+1}\alpha'_i\mathbf{B}_i\beta+\beta'\mathbf{E}\beta. \tag{7}$$

Отсюда следует

$$S(\alpha, \beta, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i} y^2(t)dt - 2\alpha' \mathbf{C}(\mathbf{t}) + \alpha' \mathbf{A}(\mathbf{t})\alpha + 2\alpha' \mathbf{B}(\mathbf{t})\beta - 2\beta' \mathbf{D} + \beta' \mathbf{E}\beta. \quad (8)$$

Положив $\delta = [\alpha' \;\; \beta']' \in \mathbb{R}^{(k+1)n+m}$, из (8) имеем

$$S(\delta, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i} y^2(t)dt - 2\delta' \mathbf{Q}(\mathbf{t}) + \delta' \mathbf{R}(\mathbf{t})\delta, \quad (9)$$

где

$$\mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{D}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)n+m}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\mathbf{t}) & \mathbf{B}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{B}'(\mathbf{t}) & \mathbf{E}(\mathbf{t}) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Матрица $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ квадратная и симметричная порядка $(n(k+1)+m)$.

Докажем вспомогательные утверждения, которые используются в дальнейшем.

Лемма 1. Необходимым и достаточным условием положительной определенности матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ является выполнение допущения 3.

Доказательство. Учитывая выражения для подматриц матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{t})$, приведенные выше, запишем ее в виде $\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \int_0^T \mathbf{X}(t)\mathbf{X}'(t)dt$, где $\mathbf{X}'(t)$ — матрица размера $(k+1)\times(n(k+1)+m)$,

$$\mathbf{X}'(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'(t) & \vdots & \mathbf{O}'_n & \vdots & \mathbf{O}'_{(k-1)n} & \vdots & \mathbf{z}'(t) \\ \mathbf{O}'_n & \vdots & \mathbf{x}'(t) & \vdots & \mathbf{O}'_{(k-1)n} & \vdots & \mathbf{z}'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \mathbf{O}'_{kn} & & \mathbf{x}'(t) & \vdots & \mathbf{z}'(t) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{O}_q$ — нулевой q-мерный вектор.

Пусть симметричная матрица $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ обратима и, следовательно, положительно определена. Тогда элементы i-й строки $\mathbf{X}_i(t)$, $i=1,\dots,k+1$, матрицы $\mathbf{X}'(t)$ линейно независимы для $t\in[0,T]$. Их независимость означает, что равенство

$$\mathbf{X}_i(t)\mathbf{a}_i = 0, \; i=1,\dots,k+1, \; t\in[0,T], \quad (12)$$

где $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^{n(k+1)+m}$ — произвольный вектор, будет выполняться только в случае, когда все компоненты $\mathbf{a}_i$ равны нулю.

Из равенств (12) с учетом (11) получаем

$$\mathbf{x}'(t)\mathbf{a}_{i\mathbf{x}} + \mathbf{z}'(t)\mathbf{a}_{i\mathbf{z}} = 0, \; t\in[t_{i-1}+H_i, t_i], \; i=1,\dots,k+1, \quad (13)$$

где векторы $\mathbf{a}_{i\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{a}_{i\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^m$ состоят из компонент $\mathbf{a}_i$.

Все компоненты вектора $[\mathbf{a}'_{i\mathbf{x}} \;\; \mathbf{a}'_{i\mathbf{z}_{i\mathbf{z}}}]'$ согласно сказанному выше равны нулю. Поэтому из условия (12) следует линейная независимость компонент вектора $[\mathbf{x}'(t) \;\; \mathbf{z}'(t)]'$ на всех отрезках $[t_{i-1+H_i}, t_i]$, $i=1,\dots,k+1$, постоянства параметров регрессии. Но концы этих отрезков могут принимать различные значения на $[0,T]$. Поэтому все равенства (13) будут выполняться, если компоненты $[\mathbf{x}'(t) \;\; \mathbf{z}'(t)]'$ будут линейно независимы на $[0,T]$. Таким образом, доказано, что из существования матрицы $\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{t})$ следует, что компоненты $[\mathbf{x}'(t) \;\; \mathbf{z}'(t)]'$ линейно независимы на $[0,T]$. Покажем теперь справедливость обратного утверждения.

Пусть компоненты вектора $[\mathbf{x}'(t)\ \ \mathbf{z}'(t)]'$ на $t \in [0, T]$ линейно независимы. Тогда будут справедливы равенства (13) только для нулевого вектора $[\mathbf{a}'_{i\mathbf{x}}\ \ \mathbf{a}'_{i\mathbf{z}}]'$. Отсюда следует выполнение условия (12) для нулевого вектора $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, которое означает линейную независимость элементов каждой строки матрицы $\mathbf{X}'(t)$. Лемма доказана.

Задача оценивания параметров регрессии δ и точек переключения $\mathbf{t}$ сводится к решению следующей задачи:

$$S(\delta, \mathbf{t}) \to \min, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} g_i(\mathbf{t}) = t_{i-1} - t_i \le -\theta_i - h = -\bar{\theta}_i,\ i = 1, \ldots, k+1,\ t_0 = 0,\ t_{k+1} = T; \\ t_1 \ge 0,\ t_k \le T, \end{gathered} \tag{15}$$

где $S(\delta, \mathbf{t})$ задается формулой (9); $\theta_i \ge 0$, $\bar{\theta}_i > 0$, $i = 1, \ldots, k+1$, — заданные величины.

Определим необходимые условия минимума задачи (14), (15). Для этого сформируем функцию Лагранжа для указанной задачи:

$$L(\delta, \mathbf{t}) = S(\delta, \mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{k+1} \Lambda_i (g_i(\mathbf{t}) + \bar{\theta}_i).$$

Необходимые условия минимума для задачи (14), (15):

$$\nabla S(\delta, \mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{k+1} \Lambda_i \nabla (g_i(\mathbf{t}) + \theta_i) = \mathbf{O}_{n(k+1)+m+k},$$

$$\Lambda_i (g_i(\mathbf{t}) + \theta_i) = 0,\ \Lambda_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, k+1. \tag{16}$$

Поскольку

$$\nabla S(\delta, \mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \nabla_\delta S(\delta, \mathbf{t}) \\ \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t}) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где ∇_δ и $\nabla_{\mathbf{t}}$ — символы градиента функции по δ и $\mathbf{t}$ соответственно, то первое равенство в (16) можно разделить на две системы уравнений:

$$\nabla_\delta S(\delta, \mathbf{t}) = \mathbf{O}_{n(k+1)+m}, \tag{18}$$

$$\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t}) + \sum_{i=1}^{k+1} \Lambda_i \nabla_{\mathbf{t}} g_i(\mathbf{t}) = \mathbf{O}_k. \tag{19}$$

Из (9) и (18) получаем

$$\delta = \delta(\mathbf{t}) = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{t}) \mathbf{Q}(\mathbf{t}), \tag{20}$$

где $\delta(\mathbf{t}) = [\alpha'(\mathbf{t})\ \ \beta'(\mathbf{t})]'$; $\alpha(\mathbf{t}) = [\alpha'_1(\mathbf{t}) \ldots \alpha'_{k+1}(\mathbf{t})]'$, $\alpha_i(\mathbf{t})$ и $\beta(\mathbf{t})$ — оценки метода наименьших квадратов соответственно α_i^0, $i = 1, \ldots, k+1$, и β^0 для фиксированного $\mathbf{t}$.

Определим теперь градиент $\nabla_t S(\delta, \mathbf{t})$. Согласно (4) и введенной в (11) матрицы $\mathbf{X}'(t)$, имеющей строки $\mathbf{X}_i(t)$, $i = 1, \ldots, k+1$, выражение для функции цели запишем в виде

$$S(\delta, \mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{k+1} \int_{t_{i-1}+H_i}^{t_i} (y(t) - \mathbf{X}_i(t)\delta)^2\, dt. \tag{21}$$

Отсюда с учетом (6) получаем выражения для компонент градиента $\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta, \mathbf{t})$:

$$\frac{\partial S(\delta, \mathbf{t})}{\partial t_i} = (y(t_i) - \mathbf{X}_i(t_i)\delta)^2 - (y(t_i + h) - \mathbf{X}_{i+1}(t_i + h)\delta)^2,\ i = 1, \ldots, k. \tag{22}$$

Подставив в это выражение формулу для δ из (20), получим

$$\frac{\partial S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})}{\partial t_i}=(y(t_i)-\mathbf{X}_i(t_i)\delta(\mathbf{t}))^2-(y(t_i+h)-\mathbf{X}_{i+1}(t_i+h)\delta(\mathbf{t}))^2, \quad (23)$$
$$i=1,\ldots,k.$$

Из (19) и (23) получаем преобразованное необходимое условие минимума (16)

$$\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})+\sum_{i=1}^{k+1}\Lambda_i\nabla_{\mathbf{t}}g_i(\mathbf{t})=\mathbf{O}_k,\ \Lambda_i(g_i(\mathbf{t})+\bar{\theta}_i)=0, \quad (24)$$
$$\Lambda_i\geq 0,\ i=1,\ldots,k+1.$$

Задача (14), (15) представляет собой задачу нелинейной оптимизации с ограничениями-неравенствами. Для ее решения используем подход, который основан на идее решения задачи нелинейной оптимизации с помощью вспомогательной задачи квадратичного программирования и метода штрафных функций [6]. Этот подход ранее применялся для оценивания параметров нелинейной регрессии [7]. Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. Если справедливо допущение 2, то градиент по $\mathbf{t}$ функции $S(\delta,\mathbf{t})$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L>0$:

$$\|\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta^{(1)},\mathbf{t}^{(1)})-\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta^{(2)},\mathbf{t}^{(2)})\|\leq L[\|\delta^{(1)}-\delta^{(2)}\|+\|\mathbf{t}^{(1)}-\mathbf{t}^{(2)}\|],$$
$$\delta^{(1)},\ \delta^{(2)}\in\mathbb{R}^{n(k+1)+m},\ \mathbf{t}^{(1)},\ \mathbf{t}^{(2)}\in\Omega_{\mathbf{t}}, \quad (25)$$

где $\Omega_{\mathbf{t}}$ — область в k-мерном векторном пространстве, задаваемая ограничениями (15).

Доказательство. Компонента i вектора $\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta,\mathbf{t})$ функции $\partial S(\delta,\mathbf{t})/\partial t_i$ согласно (22) является дифференцируемой функцией $y_i=y(t_i)$; $\mathbf{X}_i=\mathbf{X}_i(t_i)$; $\mathbf{X}_{i+1,i}=\mathbf{X}_{i+1}(t_i)$; $\partial S(\delta,\mathbf{t})/\partial t_i=\psi_i(y_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_{i+1,i},\delta)$. Тогда вектор $\Psi=\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta,\mathbf{t})$ можно трактовать как дифференцируемую вектор-функцию аргументов $y_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_{i+1,i},\delta,\ i=1,\ldots,k$:

$$\Psi(\delta;\ y_1,\ldots,y_k;\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_k;\ \mathbf{X}_{2,1},\ \mathbf{X}_{3,2},\ldots,\mathbf{X}_{k+1,k}),\ i=1,\ldots,k+1. \quad (26)$$

Поэтому она удовлетворяет условию Липшица:

$$\|\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta^{(1)},\mathbf{t}^{(1)})-\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta^{(2)},\mathbf{t}^{(2)})\|^2=\|\Psi(\delta^{(1)};y_1^{(1)},\ldots,y_k^{(1)};\mathbf{X}_1^{(1)},\ldots,\mathbf{X}_k^{(1)};$$
$$\mathbf{X}_{21}^{(1)},\ldots,\mathbf{X}_{k+1,k}^{(1)})-\Psi(\delta^{(2)};y_1^{(2)},\ldots,y_k^{(2)};\mathbf{X}_1^{(2)},\ldots,\mathbf{X}_k^{(2)};\ \mathbf{X}_{21}^{(2)},\ldots,\mathbf{X}_{k+1,k}^{(2)}\|^2\leq$$
$$\leq L_1\left[\sum_{i=1}^{k}\|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}\|+\sum_{i=1}^{k}\|\mathbf{X}_i^{(1)}-\mathbf{X}_i^{(2)}\|+\right. \quad (27)$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\|\mathbf{X}_{i+1,i}^{(1)}-\mathbf{X}_{i+1,i}^{(2)}\|+\sum_{i=1}^{k+1}\|\delta^{(1)}-\delta^{(2)}\|\right].$$

Здесь $y_i^{(l)}=y(t_i^{(l)}),\mathbf{X}_i^{(l)}=\mathbf{X}_i(t_i^{(l)})$, $\mathbf{X}_{i+1,i}^{(l)}=\mathbf{X}_{i+1}(t_i^{(l)})$, $i=1,\ldots,k$; $l=1,2$; $L_1>0$.

Согласно допущению 2

$$\|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}\|\leq l\|t_i^{(1)}-t_i^{(2)}\|,\ \|\mathbf{X}_i^{(1)}-\mathbf{X}_i^{(2)}\|\leq\frac{l}{2}\|t_i^{(1)}-t_i^{(2)}\|,$$
$$\|\mathbf{X}_{i+1,i}^{(1)}-\mathbf{X}_{i+1,i}^{(2)}\|\leq\frac{l}{2}\|t_i^{(1)}-t_i^{(2)}\|,\ t_i^{(1)},t_i^{(2)}\in\Omega_{\mathbf{t}},$$

где $t_i^{(1)}$ и $t_i^{(2)}$, $i=1,\ldots,k$, — компоненты соответственно $\mathbf{t}^{(1)}$ и $\mathbf{t}^{(2)}$.

Из приведенных неравенств и (27) получаем утверждение леммы (25), в котором L — константа, зависящая от L_1 и l.

2. АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ И ЕГО СХОДИМОСТЬ

2.1. Основные положения алгоритма. Задачу (14), (15) решим итеративно. На каждой итерации будем определять шаги изменения оцениваемых величин δ и $\mathbf{t}$, полученных на предыдущей итерации, решая вспомогательную задачу квадратичного программирования.

Обозначим приращения векторов δ и $\mathbf{t}$ соответственно $\mathbf{d}$ и τ. Функция цели на основании [6] имеет вид

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{d}\|^2+\frac{1}{2}\|\tau\|^2+\mathbf{d}'\nabla_\delta S(\delta,\mathbf{t})+\tau'\nabla_\mathbf{t} S(\delta,\mathbf{t})\to\min. \tag{28}$$

В силу ограничений на τ, вытекающих из (15), имеем

$$g_1(\mathbf{t}+\tau)=-t_1-\tau_1=g_1(\mathbf{t})-\tau_1\le-\bar\theta_1,$$

$$g_{k+1}(\mathbf{t}+\tau)=t_k+\tau_k=g_{k+1}(\mathbf{t})+\tau_k-T\le-\bar\theta_{k+1},$$

$$g_i(\mathbf{t}+\tau)=t_{i-1}+\tau_{i-1}-t_i-\tau_i=g_i(\mathbf{t})+\tau_{i-1}-\tau_i\le-\bar\theta_i,\ i=2,\ldots,k, \tag{29}$$

где τ_i, $i=1,\ldots,k$, — компоненты τ.

Задача (28), (29) разбивается на две задачи. Первая задача:

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{d}\|^2+\mathbf{d}'\nabla_\delta S(\delta,\mathbf{t})\to\min. \tag{30}$$

Согласно (9) имеем $\nabla_\delta S(\delta,\mathbf{t})=2(\mathbf{R}(\mathbf{t})\delta-\mathbf{Q}(\mathbf{t}))$. Положим $\delta=\delta(\mathbf{t})$. Тогда согласно (20) $\nabla_\delta S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})$ — нулевой вектор. Поэтому из (30) имеем

$$\mathbf{d}=\mathbf{O}_{n(k+1)}. \tag{31}$$

Вторая задача, вытекающая из (28), имеет ограничения (29) и функцию цели, которая при $\delta=\delta(\mathbf{t})$ имеет вид $\frac{1}{2}\|\tau\|^2+\tau'\nabla_\mathbf{t} S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})\to\min$. Добавив к ней независящую от τ константу $\|\nabla_\mathbf{t} S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})\|^2$, получим

$$\frac{1}{2}\|\tau+\nabla_\mathbf{t} S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})\|^2\to\min. \tag{32}$$

Чтобы исключить возможные большие по модулю приращения точек переключения, введем ограничения

$$\tau_l\le a,\ -\tau_l\le a,\ l=1,\ldots,k, \tag{33}$$

где $a>0$ — заданная величина.

В случае отсутствия ограничений (29), (33) из выражения (32) следует $\tau=-\nabla_\mathbf{t} S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})$, что означает изменение $\mathbf{t}$ в направлении антиградиента функции цели в задаче оценивания (14).

Рассмотрим теперь основные шаги алгоритма. Пусть начальное значение вектора точек переключений $\mathbf{t}_0$ задано, а начальная величина вектора параметров регрессии равна $\delta(\mathbf{t}_0)$. Уточнение точек переключений происходит итеративно:

$$\mathbf{t}_{j+1}=\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j,\ j=0,1,2,\ldots, \tag{34}$$

где τ_j — решение задачи (29), (32), (33); γ_j — шаговый множитель, который выбирается из условия

$$S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)-S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)\le-\eta\gamma_j\|\tau_j\|^2,\ \eta\in(0,1). \tag{35}$$

В (35) все величины известны, кроме шагового множителя; $\gamma_j = 2^{-v_j}$, где v_j — максимальное число в последовательности $v = 0, 1, 2, \ldots$, для которой удовлетворяется это неравенство.

В качестве критерия остановки итерационного процесса вычислений, как и в задачах оптимизации, можно использовать близость на соседних итерациях векторов точек переключений или функции цели.

Исследуем сходимость предложенного алгоритма. Для этого нам понадобится следующий результат.

Лемма 3. Пусть $\mathbf{t}_0 \in \Omega_{\mathbf{t}}$. Тогда величины $\mathbf{t}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, определяемые формулой (34), где $0 \le \gamma_j \le 1$, также принадлежат множеству $\Omega_{\mathbf{t}}$.

Доказательство. Пусть для некоторого $j \ge 0$, $\mathbf{t}_j \in \Omega_{\mathbf{t}}$ получено решение вспомогательной задачи (29), (32), (33) τ_j такое, что сумма $\mathbf{t}_j + \tau_j$ удовлетворяет ограничениям

$$t_{1j} + \tau_{1j} \ge \bar{\theta}_1, \tag{36}$$

$$t_{kj} + \tau_{kj} \le T - \bar{\theta}_{k+1}, \tag{37}$$

$$t_{i+1,\,j} - t_{ij} + (\tau_{i+1,\,j} - \tau_{ij}) \ge \bar{\theta}_{i+1}, \ i = 1, \ldots, k-1. \tag{38}$$

Покажем, что тогда $\mathbf{t}_{j+1} \in \Omega_{\mathbf{t}}$. Имеем выражение для компонент $\mathbf{t}_{j+1}$:

$$t_{i,\,j+1} = t_{ij} + \gamma\tau_{ij}, \ i = 1, \ldots, k, \ 0 \le \gamma \le 1. \tag{39}$$

Вначале рассмотрим выполнение первого ограничения в (29). Согласно условию $\mathbf{t}_j \in \Omega_{\mathbf{t}}$ имеем $t_{1j} \ge \bar{\theta}_1$. Из этого неравенства, а также формул (39) и (36) следует для $0 \le \gamma \le 1$

$$t_{1,\,j+1} = t_{1j} + \gamma\tau_{1j} \ge \begin{cases} t_{1j} \ge \bar{\theta}_1, \text{если } \tau_{1j} \ge 0, \\ t_{1j} + \tau_{1j} \ge \bar{\theta}_1, \text{если } \tau_{1j} < 0. \end{cases} \tag{40}$$

Перейдя к $(k+1)$-му ограничению, аналогично получаем из (37) и неравенства $t_{kj} \le T - \bar{\theta}_{k+1}$, которое справедливо, так как $\mathbf{t}_j \in \Omega_{\mathbf{t}}$,

$$t_{k,\,j+1} = t_{kj} + \gamma\tau_{kj} \le \begin{cases} t_{kj} \le T - \bar{\theta}_{k+1}, \text{если } \tau_{kj} \le 0, \\ t_{kj} + \tau_{kj} \le T - \bar{\theta}_{k+1}, \text{если } \tau_{kj} > 0. \end{cases} \tag{41}$$

Таким образом, $t_{1,\,j+1}$ и $t_{k,\,j+1}$ удовлетворяют соответственно первому и k-му ограничениям в (29).

Рассмотрим теперь любое ограничение с индексом i $(2 \le i \le k)$ в (29). Из условия леммы 3, где $\mathbf{t}_j \in \Omega_{\mathbf{t}}$, имеем $t_{i+1,\,j} - t_{ij} \ge \bar{\theta}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$. Учитывая это неравенство и (38), получаем из (39)

$$\begin{gathered} t_{i+1,\,j+1} - t_{i,\,j+1} = t_{i+1,\,j} - t_{ij} + \gamma(\tau_{i+1,\,j} - \tau_{ij}) \ge \\ \ge \begin{cases} t_{i+1,\,j} - t_{ij} \ge \bar{\theta}_{i+1}, \text{ если } (\tau_{i+1,\,j} - \tau_{ij}) \ge 0, \\ t_{i+1,\,j} - t_{ij} + (\tau_{i+1,\,j} - \tau_{ij}) \ge \bar{\theta}_{i+1}, \text{ если } (\tau_{i+1,\,j} - \tau_{ij}) < 0. \end{cases} \end{gathered} \tag{42}$$

Из (40)–(42) вытекает, что все компоненты $\mathbf{t}_{j+1}$ удовлетворяют ограничениям (29). Следовательно, $\mathbf{t}_{j+1} \in \Omega_{\mathbf{t}}$, если $\mathbf{t}_j \in \Omega_{\mathbf{t}}$. Но j — произвольно, а согласно условию леммы 3 $\mathbf{t}_0 \in \Omega_{\mathbf{t}}$. Таким образом, лемма 3 доказана.

Теорема 1. Пусть допущения 2, 3 выполняются. Тогда процесс вычислений по алгоритму оценивания (29), (32)–(34) имеет следующие свойства:

1) $\lim\limits_{j\to\infty} \tau_j = \mathbf{O}_k;$ (43)

2) в любой предельной точке $\hat{\mathbf{t}}$ последовательности $\mathbf{t}_j$, $j = 0, 1, \ldots$, выполняются ограничения (15) и необходимые условия минимума задачи (14), (15).

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение теоремы. Используя формулу Тейлора, для $\theta \in [0, 1]$ получаем

$$S(\delta_j + \gamma \mathbf{d}_j, \mathbf{t}_j + \gamma\tau_j) = S(\delta_j, \mathbf{t}_j) + \gamma(\mathbf{d}_j, \nabla S_\delta(\delta_j, \mathbf{t}_j)) + \gamma(\tau_j, \nabla S_{\mathbf{t}}(\delta_j, \mathbf{t}_j)) +$$
$$+\gamma(\mathbf{d}_j, \nabla_\delta S(\delta_j + \vartheta\gamma\mathbf{d}_j, \mathbf{t}_j + \vartheta\gamma\tau_j) - \nabla_\delta S(\delta_j, \mathbf{t}_j)) +$$
$$+\gamma(\tau_j, \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta_j + \vartheta\gamma d_j, \mathbf{t}_j + \vartheta\gamma\tau_j) - \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta_j, \mathbf{t}_j)),$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Пусть $\delta_j = \delta(\mathbf{t}_j)$. Тогда согласно (31) $\mathbf{d}_j = \mathbf{O}_{n(k+1)}$, что обеспечивает упрощение предыдущего равенства

$$S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j + \gamma\tau_j) = S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) + \gamma(\tau_j, \nabla S_{\mathbf{t}}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)) +$$
$$+\gamma(\tau_j, \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j + \vartheta\gamma\tau_j) - \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)), \ \vartheta \in [0, 1]. \quad (44)$$

Применив к полученному равенству формулу (25), в которой $\delta^{(1)} = \delta^{(2)} = \delta(\mathbf{t}_j)$, $\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{t}_j$, $\mathbf{t}^{(2)} = \mathbf{t}_j + \gamma\tau_j$, получим

$$S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j + \gamma\tau_j) \le S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) + \gamma(\tau_j, \nabla S_{\mathbf{t}}(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)) + \gamma^2 L \|\tau_j\|^2. \quad (45)$$

Найдем необходимые и достаточные условия минимума вспомогательной задачи (29), (32), (33) на j-м шаге, которым удовлетворяет ее решение τ_j. Для этого сформируем функцию Лагранжа указанной задачи

$$l(\tau) = \frac{1}{2}\tau'\tau + \tau'\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) + \frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)\|^2 + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)(g_i(\mathbf{t}_j + \tau) + \bar{\theta}_i) +$$
$$+\sum_{l=1}^{k} \mu_l^+(\mathbf{t}_j)(\tau_l - a) - \sum_{l=1}^{k} \mu_l^-(\mathbf{t}_j)(\tau_l + a),$$

где $\lambda_i(\mathbf{t}_j)$, $i = 1, \ldots, k+1$; $\mu_l^+(\mathbf{t}_j)$, $\mu_l^-(\mathbf{t}_j)$, $l = 1, \ldots, k$, — множители Лагранжа.

Из первого условия минимума имеем равенство нулю градиента $l(\tau)$ в точке $\tau = \tau_j$:

$$\tau_{lj} + (\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j))_l + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)(\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j))_l + \mu_l^+(\mathbf{t}_j) - \mu_l^-(\mathbf{t}_j) = 0, \quad (46)$$
$$l = 1, \ldots, k,$$

где $(\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j))_l$ и $(\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j))_l$ — l-е компоненты градиентов соответственно $\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$ и $\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j)$.

Второе условие минимума вспомогательной задачи в этой же точке:

$$\lambda_i(\mathbf{t}_j)(g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j) + \bar{\theta}_i) = 0, \ \lambda_i(\mathbf{t}_j) \ge 0, \quad i = 1, \ldots, k+1;$$
$$\mu_l^+(\mathbf{t}_j)(\tau_{lj} - a) = 0, \ \mu_l^-(\mathbf{t}_j)(\tau_{lj} + a) = 0, \ \mu_l^+(\mathbf{t}_j) \ge 0,$$
$$\mu_l^-(\mathbf{t}_j) \ge 0, \ l = 1, \ldots, k. \quad (47)$$

Умножим l-е равенство в (46) на τ_{lj} и из полученного выражения определим

$$\tau_{lj}(\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j))_l = \tag{48}$$
$$= -\tau_{lj}^2 - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)\tau_{lj}(\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j))_l - \mu_l^+(\mathbf{t}_j)\tau_{lj} + \mu_l^-(\mathbf{t}_j)\tau_{lj}, l = 1, \ldots, k.$$

Из второй строки в (47) следует

$$\mu_l^+(\mathbf{t}_j)\tau_{lj} = \mu_l^+(\mathbf{t}_j)a \geq 0, \; \mu_l^-(\mathbf{t}_j)\tau_{lj} = -\mu_l^-(\mathbf{t}_j)a \leq 0, \; l = 1, \ldots, k.$$

Учитывая полученные неравенства, из (48) имеем

$$\tau_{lj}\nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)_l \leq -\tau_{lj}^2 - \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)\tau_{lj}(\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j))_l, \; l = 1, \ldots, k.$$

Суммируя в отдельности в данной системе неравенств их левые и правые части, получаем неравенство в матричном виде

$$\tau'_j \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) \leq -\tau'_j\tau_j - \tau'_j \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j). \tag{49}$$

Преобразуем (49). Для этого представим левые части ограничений (29) на j-м шаге через их градиенты. Имеем $g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j) = \tau'_j \nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j) + g_i(\mathbf{t}_j)$, $i = 1, \ldots, k+1$. Использовав это выражение и первую строку в (47), получим

$$\tau'_j \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)\nabla g_i(\mathbf{t}_j + \tau_j) + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j) g_i(\mathbf{t}_j) + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)\bar{\theta}_i = 0.$$

С учетом данного равенства формула (49) примет вид

$$\tau'_j \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) \leq -\tau'_j\tau_j + \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)(g_i(\mathbf{t}_j) + \bar{\theta}_i).$$

Отсюда, так как согласно (15) $g_i(\mathbf{t}_j) + \bar{\theta}_i \leq 0$, а множители Лагранжа $\lambda_i(\mathbf{t}_j) \geq 0$, следует $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i(\mathbf{t}_j)(g_i(\mathbf{t}_j) + \bar{\theta}_i) \leq 0$. Окончательно имеем $\tau'_j \nabla_{\mathbf{t}} S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) \leq -\tau'_j\tau_j$. С учетом данного неравенства из (45) вытекает

$$S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j + \gamma\tau_j) \leq S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) - \gamma\|\tau_j\|^2 + \gamma^2 L\|\tau_j\|^2 =$$
$$= S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) - \gamma\|\tau_j\|^2 (1 - \gamma L).$$

Потребуем, чтобы $1 - \gamma L \geq \eta$, где $\eta \in (0, 1)$. Отсюда и из полученного выше неравенства следует (35). Из определения η имеем ограничение на шаговый множитель

$$0 \leq \gamma \leq (1 - \eta)/L. \tag{50}$$

Другое ограничение на шаговый множитель имеется в условии леммы 3: $0 \leq \gamma \leq 1$. Объединив оба ограничения в одно, получим

$$0 \leq \gamma \leq \min(1, (1 - \eta)/L). \tag{51}$$

Данное неравенство будет всегда выполняться после конечного числа дроблений γ пополам, начиная с единицы. Поэтому всегда найдется такое γ, удовлетворяющее (51), для которого будет справедливым неравенство (35). Так как

$S(\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)\le S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)$, то из (35) следует $S(\delta(\mathbf{t}_{j+1}),\mathbf{t}_{j+1})=$ $=S(\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)<S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)$. Это неравенство означает убывание функции $S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)$ с ростом *j*. При этом согласно лемме 3 все точки $\mathbf{t}_j$ принадлежат $\Omega_{\mathbf{t}}$. Из компактности и ограниченности этого множества и непрерывности функции $S(\delta(\mathbf{t}),\mathbf{t})$ на $\Omega_{\mathbf{t}}$ следует, что она ограничена на этом множестве. Таким образом, для правой части неравенства (35) получаем предел

$$\lim_{j\to\infty}\gamma\|\tau_j\|^2=0. \tag{52}$$

Согласно (51) шаговый множитель $\gamma>\frac{1}{2}\min\left(1,\ \frac{1-\eta}{L}\right)>0$. Тогда из (52) следует (43). Из (43) и (34) вытекает, что последовательность $\{\mathbf{t}_j\}$, $j=0,1,\ldots$, имеет предел $\hat{\mathbf{t}}$:

$$\lim_{j\to\infty}\mathbf{t}_j=\hat{\mathbf{t}}. \tag{53}$$

2. Докажем второе утверждение теоремы. Из (43) следует, что существуют величина $\xi>0$, для которой $a-\xi>0$, и номер шага алгоритма оценивания j_0, начиная с которого будет выполняться неравенство $|\tau_l|\le a-\xi>0$, $l=1,\ldots,k$. Тогда согласно (47) для $j>j_0$ $\mu_l^+(\mathbf{t}_j)=\mu_l^-(\mathbf{t}_j)=0$, $l=1,\ldots,k$. Отсюда и из (46) для $j>j_0$ следует $\tau_{lj}+(\nabla S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j))_l+\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(\mathbf{t}_j)(\nabla g_i(\mathbf{t}_j+\tau_j))_l=0$, $l=1,\ldots,k$.

Запишем эти равенства в матричном виде

$$\tau_j+\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)+\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i(\mathbf{t}_j)\nabla g_i(\mathbf{t}_j+\tau_j)=\mathbf{O}_k,\ j>j_0. \tag{54}$$

Таким образом, после большого числа шагов алгоритма необходимое и достаточное условие минимума вспомогательной задачи будет зависеть только от ограничений (29):

$$g_i(\mathbf{t}+\tau)=t_{i-1}+\tau_{i-1}-t_i-\tau_i=g_i(\mathbf{t})+\tau_{i-1}-\tau_i\le-\overline{\theta}_i.$$

Обозначим $\Theta\in\mathbb{R}^{k+1}$ вектор их правых частей. Его компоненты $\vartheta_i=-\overline{\theta}_i$, $i=1,2,\ldots,k+1$. Решение $\tau_j=\tau_j(\Theta)$ вспомогательной задачи (29), (32), (33) будет ограниченным, что обеспечивает ограничение сверху оптимального значения функции цели

$$s(\tau_j(\Theta))=\frac{1}{2}\tau_j'(\Theta)\tau_j(\Theta)+\tau_j'(\Theta)\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)+\frac{1}{2}\|\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)\|^2.$$

Тогда множители Лагранжа вспомогательной задачи $\lambda_i(\mathbf{t}_j)=\partial s(\tau_j(\Theta))/\partial\vartheta_i\ge$ ≥ 0, $i=1,2,\ldots,k+1$, которые ограничены снизу, будут ограничены также сверху для $\mathbf{t}_j\in\Omega_{\mathbf{t}}$, где ϑ_i — компонента Θ. Отсюда следует существование предела у множителей Лагранжа, соответствующих ограничениям (29):

$$\lim_{j\to\infty}\lambda_i(\mathbf{t}_j)=\lambda_i,\ i=1,\ldots,k+1. \tag{55}$$

Переходя в (54) к пределу при $j\to\infty$, с учетом (43), (53) и (55) получаем

$$\nabla_{\mathbf{t}}S(\delta(\hat{\mathbf{t}}),\hat{\mathbf{t}})+\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\nabla g_i(\hat{\mathbf{t}})=\mathbf{O}_k. \tag{56}$$

При $j\to\infty$ из первой строки в (47) согласно (53) и (55) имеем

$$\lambda_i(g_i(\hat{\mathbf{t}})+\overline{\theta}_i)=0,\ \lambda_i\ge 0,\ i=1,\ldots,k+1. \tag{57}$$

Выражения (56) и (57) при $\mathbf{t}=\hat{\mathbf{t}}$, $\Lambda_i=\lambda_i$, $i=1,\ldots,k+1$, совпадают с (24) — необходимыми условиями минимума задачи (14), (15), что доказывает второе утверждение. Теорема доказана.

Метод определения шагового множителя как максимальной величины γ, которая удовлетворяет неравенству (35), не является единственным. Другой метод следует из (35) и заключается в использовании неравенства

$$S(\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)-S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)\le -\eta\gamma_j\|\tau_j\|^2,\ \eta\in(0,1), \tag{58}$$

которое следует из (35), так как $S(\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)\le S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)$.

Шаговый множитель γ_j в (58), как и в (35), находится последовательным делением единицы пополам до тех пор, пока не удовлетворится (58). Основное отличие метода получения шагового множителя с помощью (58) состоит в том, что при каждом дроблении единицы необходимо находить оценки параметров регрессии $\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j)$, что согласно (20) требует обращение матрицы, порядок которой равен числу оцениваемых параметров регрессии. Поэтому использование (58) целесообразно, если размерность матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ в (20) невелика, чтобы ее обращение не было узким местом всех вычислений на каждом шаге решения задачи оценивания (14), (15).

2.2. Описание алгоритма оценивания. 1. Задать начальные приближения для точек переключения – вектор $\mathbf{t}_0\in\Omega_{\mathbf{t}}$ и положительные величины η, h. Положить $j=0$.

2. Вычислить $\delta(\mathbf{t}_j)$ и $S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)$.

3. Найти решение τ_j вспомогательной задачи (29), (32), (33).

4. Если выполняется условие прекращения итерационного процесса ввиду близости на соседних итерациях вектора точек переключений или функции цели и выполняются необходимые условия минимума (24) задачи (14) , (15), то останов. В противном случае переход к шагу 5.

5. Определить шаговый множитель γ_j из условий (35) или (58).

6. Положить $\mathbf{t}_{j+1}=\mathbf{t}_j+\gamma_j\tau_j$. Переход к шагу 7.

7. Положить $j=j+1$ и перейти к шагу 2.

Согласно теореме 1 алгоритм оценивания сходится к локальному минимуму задачи (14), (15). Для нахождения глобального минимума необходимо начинать вычисления из разных начальных точек.

Если останов произошел при невыполненных необходимых условиях минимума, то норма градиента функции цели достаточно велика. Поэтому можно минимизировать функцию цели последовательно по всем точкам переключения, чтобы получить новую начальную точку для получения оценок точек переключения и параметров регрессии с меньшей суммой квадратов остатков. Для этого можно использовать описанный алгоритм, в котором формулы (34) и (58) следует изменить следующим образом.

Пусть оптимизация функции цели проводится по t_q. Тогда точки переключения уточняются по формуле

$$t_{i,\,j+1}=t_{ij}+\gamma_j p_i\tau_{ij},\ i=1,\ldots,k,\ j=0,1,2,\ldots, \tag{59}$$

а шаговый множитель на j-й итерации должен удовлетворять условию

$$S(\delta(\mathbf{t}_j+\gamma_j\mathbf{p}\tau_j),\mathbf{t}_j+\gamma_j\mathbf{p}\tau_j)-S(\delta(\mathbf{t}_j),\mathbf{t}_j)\le -\eta\gamma_j\left(\sum_{i=1}^{k}p_i\tau_{ij}^2\right), \tag{60}$$

где $p_i=0,\ i=1,\ldots,k,\ i\ne q,\ p_q=1$; $\mathbf{p}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\ldots,p_k)$ — диагональная матрица порядка k.

Из (59), (60) следуют соответственно (34) и (58). Для повышения точности одномерной минимизации вместо (60) надо решить задачу минимизации функции цели по t_q.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Суть эксперимента заключается в определении эффективности нахождения локального минимума функции цели задачи оценивания для регрессии (1) при числе точек переключения $k = k^0$, что исключало влияние на оценивание k^0. Рассматривался частный случай (1), когда

$$y(t) = \mathbf{x}'(t)\alpha_{ti}^0 + \varepsilon(t),\ t \in I_i^0,\ i = 1, \dots, k^0 + 1,\ t \in [0, T],$$
$$T = 20,\ h^0 = 0.1,\ k^0 = 3. \tag{61}$$

В (61) $n = 2$; $\mathbf{x}'(t) = [1\ t]'$; $\varepsilon(t) = \sin(10t + \varphi)$, где φ — случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$; точки переключения: $t_1^0 = 5.9$, $t_2^0 = 9.9$, $t_3^0 = 14.9$. Согласно (2) параметры регрессии: $\alpha_{t1}^0 = \alpha_1^0 = [5\ 0.5]'$, $t \in [0, 5.9]$; $\alpha_{t2}^0 = \alpha_2^0 = [-2.05\ 2]'$, $t \in [6, 9.9]$; $\alpha_{t3}^0 = \alpha_3^0 = [29.75\ -1]'$, $t \in [10, 14.9]$, $\alpha_{t4}^0 = \alpha_4^0 = [0.85\ 1]'$, $t \in [15, 20]$.

Математическое ожидание $Ey(t)$ представляет собой линейный сплайн:

$$Ey(t) = \begin{cases} 5 + 0.5t, \text{ если } 0 \le t \le 5.9, \\ 110.05 + 20t, \text{ если } 5.9 \le t \le 6, \\ -2.05 + 2t, \text{ если } 6 \le t \le 9.9, \\ -180.25 + 20t, \text{ если } 9.9 \le t \le 10, \\ 29.75 - 1t, \text{ если } 10 \le t \le 14.9, \\ -134.15 + 10t, \text{ если } 14.9 \le t \le 15, \\ 0.85 + 1t, \text{ если } 15 \le t \le 20. \end{cases} \tag{62}$$

В (62) первая, третья, пятая и седьмая прямые – линии регрессии $\mathbf{x}'(t)\alpha_i^0$, $i = 1, \dots, 4$, а вторая, четвертая и шестая прямые задаются на отрезках длиной h^0; их угловые коэффициенты по модулю на порядок больше, чем у линий регрессии. Уровень шума в регрессии (61) определялся отношением $\sigma / \bar{y} = 0.052$, где $\bar{y} = T^{-1} \int_0^T y(t)dt = 13.55$, $\sigma^2 = 0.5$ — дисперсия $\varepsilon(t)$. Таким образом, уровень шума можно считать средним. В задаче оценивания использовались только ограничения (15), где $\theta_i = 3$, $i = 1, \dots, 4$.

Поскольку точки переключения отстоят одна от другой достаточно далеко, то можно ожидать, что для рассматриваемой задачи в точке минимума функции цели ограничения (15) будут неактивными. Тогда вместо необходимых условий минимума (24) получим условия

$$|(\nabla_t S(\delta(\mathbf{t}), \mathbf{t}))_i| < 0.01, \quad i = 1, 2, 3, \tag{63}$$

согласно которым допускается изменение точки переключения в третьем знаке после запятой, что означает высокую точность оценивания. Критерий прекращений итераций:

$$|S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j) - S(\delta(\mathbf{t}_{j-1}), \mathbf{t}_{j-1})| \le 0.005. \tag{64}$$

Результаты расчета для разных начальных точек и $h = 0.2$ приведены в табл. 1, 2, где j — номер итерации; v_j — число дроблений шага на j-й итерации; p_i, $i = 1, 2, 3$, — величины, введенные в (59), (60). Согласно табл. 2 вы-

Таблица 1

Номер итерации, j	Точки переключения	$S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	$-(\nabla S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)'$	v_j	$p_i,\ i = 1,2,3$
0	3; 12; 17	21.656	2.643; –1.748; –1.894	0	1; 1; 1
1	5.643; 10.252; 15.106	10.261	0.135; –1.647; –1.526	2	1; 1; 1
2	5.677; 9.84; 14.724	9.721	0.469; –0.948; 2.7	4	1; 1; 1
3	5.706; 9.781; 14.893	9.588	0.459; 0.886; –0.903	4	1; 1; 1
4	5.735; 9.836; 14.837	9.565	–0.183; –0.846; –0.2	4	1; 1; 1
5	5.724; 9.783; 14.825	9.546	0.025; 0.709; 0.012	5	1; 1; 1
6	5.725; 9.805; 14.825	9.544	0.014; -0.33; 0.02	5	1; 1; 1
7	5.725; 9.795; 14.826	9.542	0,0085; 0,0016; 0,002		Останов по (63) и (64)

Таблица 2

Минимизация по точкам переключеня	Номер итерации, j	Точки переключения	$S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)$	$-(\nabla S(\delta(\mathbf{t}_j), \mathbf{t}_j)'$	v_j	p_i, $i = 1,2,3$
t_1	0	8, 12, 17	24.074	–0.191; 2.082; –1.894	4	
	1	7.988; 12; 17	24.071	0,0087; 2.068; –1.894		1; 0; 0
t_2	1	7.988; 12; 17	24.071	0,0087; 2.068; –1.894	4	0; 1; 0
	2	7.988; 12.129; 17	23.967	0.142; –0.445; –1.686	4	0; 1; 0
	3	7.988; 12.101; 17	23.961	0.114; 0.069; –1.714	3	0; 1; 0
t_3	1	7.988; 12.101; 17	23.961	0.114; 0.069; –1.714	0	0; 0; 1
	2	7.988; 12.11; 15.296	22.29	0.122; 0.72; –2.57	1	0; 0; 1
	3	7.988; 12.11; 14.011	21.832	0.122; –0.655; –0.562	3	0; 0; 1
	4	7.988; 12.11; 13.941	21.79	0.122; –0.61; –0.278	4	0; 0; 1
	5	7.988; 12.11; 13.924	21.789	0.122; –0.597; 0.104	4	0; 0; 1
	6	7.988; 12.11; 13.931	21.788	0.122; –0.602; –0.067		0; 0; 1
$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$	1	7.988; 12.11; 13.931	21.788	0.122; –0.602; –0.067	0	1; 1; 1
	2	8.161; 11.161; 14.161	19.575	3.635; 6.023; –0.175	1	1; 1; 1
	3	5.746; 8.746; 14.248	15.504	0.347; –2.547; 3.659	1	1; 1; 1
	4	5.573; 9.093; 13.344	13.315	0.303; –10.296; –1.244	2	1; 1; 1
	5	5.497; 10.692; 14.63	10.672	0.427; –0.468; –0.681	2	1; 1; 1
	6	5.39; 10.809; 14.8	10.371	–1.885; 0.026; –0.386	4	1; 1; 1
	7	5.739;9.805;13.565	10.299	0.483; 0.012 ;0.096	4	1; 1; 1
	8	5.467;10.805;14.82	10.297	0.179;0.013; –0.028	4	1; 1; 1
	9	5.467;10.803;14.819	10.297	–0,003; 0.012; –0,0073	4	1; 1; 1
	10	5.467;10.802;14.819	10.297	–0,0025; 0.011; –0,0073	4	1; 1; 1
Останов по (63) и (64)	11	5.467; 10.801; 14.819	10.297	–-0,0029; 0,0091; –0,0000	5	1; 1; 1

бранная начальная точка привела на первом шаге к его большому дроблению. Поэтому последовательной минимизацией по t_1, t_2 и t_3 была получена новая начальная точка с меньшей функцией цели. Средняя погрешность оценивания точек переключения, определяемая по формуле $\Delta = \left((k^0)^{-1} \sum_{i=1}^{k^0} | \hat{\mathbf{t}}_i - \mathbf{t}_i^0 | / \mathbf{t}_i^0 \right) 100\%$, где $k^0 = 5$, равна 1.5% (табл. 1) и 5.66% (табл. 2).

Чтобы оценить влияние выбора h на точность оценивания точек переключения Δ (в процентах), были проведены расчеты с одной и той же начальной точкой, как в табл. 1. В результате для $h = 0.3$ имеем $\Delta = 5$; для $h = 0.2$ имеем $\Delta = 1.5$; для $h = 0.05$ имеем $\Delta = 0.56$.

Таким образом, предложенный метод позволяет использовать градиентные методы для оценивания точек переключений линейных регрессий с переключениями в непрерывном времени, когда их параметры на разных интервалах времени не связаны между собой. Вычислительный эксперимент показал удовлетворительную точность оценивания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garcia R., Perron P. An analysis of the real interest rate under regime shifts. *Review of Economics and Statistics*, 1996, Vol. 78, N. 1. P. 111–125.
2. Bai J., Perron P. Estimating and testing linear models with multiple structural changes. *Econometrica.* 1998. Vol. 66, N 1. P. 47–78.
3. Кнопов П.С. Асимптотические свойства некоторых классов М-оценок *Кибернетика и системный анализ*. 1997. № 4. С. 10–27.
4. Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. Метод эмпирических средних в задачах стохастического программирования. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 6. С. 3–18.
5. Дороговцев А.Я. Теория оценок параметров случайных процессов. Киев: Вища школа, 1982. 192 с.
6. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. Москва: Наука, 1983. 136 с.
7. Knopov P.S., Korkhin A.S. Regression analysis under a priori parameter restrictions. New York: Springer, 2012. 250 p.

Надійшла до редакції 25.04.2019

П.С. Кнопов, А.С. Корхін

МЕТОД ПОБУДОВИ РЕГРЕСІЇ З ПЕРЕМИКАННЯМ У НЕПЕРЕРВНОМУ ЧАСІ З НЕВІДОМИМИ ТОЧКАМИ ПЕРЕМИКАНЬ

Анотація. Розглянуто лінійну регресію з перемиканнями у неперервному часі. Описано метод оцінювання точок перемикання і параметрів регресії з перемиканнями. Наведено приклади його використання.

Ключові слова: регресія, неперервний час, перемикання, параметри регресії, оцінювання.

P.S. Knopov, A.S. Korkhin

SWITCHING REGRESSION CONSTRUCTION METHOD IN CONTINUOUS TIME WITH UNKNOWN SWITCHING POINTS

Abstract. Linear switching regression in continuous time is considered. A method for estimating switching points and regression parameters is described. Examples of its use are given.

Keywords: regression, switching, regression parameters, evaluation.

Кнопов Павел Соломонович,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат наук, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: knopov1@yahoo.com.

Корхин Арнольд Самуилович,
доктор физ.-мат. наук, профессор Приднепровской академии строительства и архитектуры, Днипро, e-mail: as.korkhin@gmail.com.