

**НЕЧЕТКАЯ МАТЕМАТИКА ПРИ ОГРАНИЧЕННЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ  
НАЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ**

**Аннотация.** Рассмотрено решение задач в условиях неопределенности в форме нечеткой математики на основе методов и моделей теории нечетких множеств при ограниченных возможностях определения (назначения) функции принадлежности. Предложен метод решения задач подобного типа, состоящий в определении скрытых знаний в виде подмножеств упорядоченных пар, вычисленных с использованием сингулярной декомпозиции специальных (теплицевых, ганкелевых и др.) матриц, сформированных на основе универсального множества. Приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** нечеткое множество, тензорная декомпозиция, нечеткая математика, специальные матрицы.

**ВВЕДЕНИЕ**

Теория нечетких множеств (ТНМ) в настоящее время применяется как универсальный математический аппарат, сфера применения которого для решения задач в условиях неопределенности практически не ограничена [1]. Вместе с тем выявились определенные сложности и некорректности применения ТНМ, в частности, в условиях недостаточности информации, когда задание функции принадлежности (ФП) невозможно или сопряжено с трудностями. Аппарат теории грубых (или нечетких грубых) множеств расширил возможности решения задач в условиях неопределенности [2], хотя при этом появились новые проблемы.

Нечеткие переменные (НП), нечеткие числа (НЧ) — основные объекты ТНМ и их использование отражает неопределенность. Пределы нечеткости определяет эксперт, используя имеющиеся априорные знания о системе. Нечеткие числа во многом аналогичны вероятностным распределениям. В работе [3] приводится пример построения НЧ — аналога нормального вероятностного распределения путем использования теоремы свертки.

ТНМ фактически декларировала универсальность своих моделей и всеобщность их применения, хотя существует ряд процессов, не поддающихся содержательному (формальному) представлению в виде нечетких множеств (НМ) в силу их сложности или неизученности. Например, процесс применения ТНМ при изучении биомедицинских процессов сопряжен с рядом трудностей, главная из которых — пропуски или искажения данных, что не позволяет эксперту назначать функцию принадлежности. Синтез ТНМ и тензорных декомпозиций, приводящий практически к идеологии мягкой математики [4], как полагают многие специалисты, может быть в данном контексте весьма эффективным. В работе [5] определен новый класс задач, имеющих высокую семантическую подготовленность для использования аппарата ТНМ, но неполнота данных препятствует этому.

**СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ**

Одной из задач, решаемых интеллектуальными системами, является выделение скрытых знаний в составе исходного множества данных (ИМД), что предполагает учет многофакторных данных без предварительного выделения существенных (субъективно назначенных) факторов. Отметим, что теория нечетких множеств использует ИМД только для назначения универсального множества (УМ), на ко-

тором определяется НМ, а ФП назначается экспертно с минимальным использованием состава ИМД [6]. Наиболее сложным для ТНМ относительно методов построения главной характеристики НМ является функция принадлежности, хотя, как показано выше, процесс определения УМ также не так прост, в частности, если имеют место пропуски данных. Еще в 1965 г. один из ведущих специалистов в области ТНМ Р. Ягер [6, с. 259] констатировал следующее.

«Основной трудностью, мешающей интенсивному применению теории НМ при решении практических задач, является то, что ФП должна быть задана вне самой теории и, следовательно, ее адекватность не может быть проверена непосредственно средствами теории. В каждом известном методе построения ФП формулируются свои требования и обоснования к выбору именно такого построения».

Тем не менее, в работе [7], датированной 2014 г., снова появляются аналогичные утверждения, но в более строгой форме. А именно: теория НМ не имеет объективного каркаса и конструктивной методологии для описания и включения человеческой субъективности и поведения в оценивании сложного знания в конструкцию ФП (в том числе нечеткой), хотя НМ и нечеткая логика — это включение человеческой субъективности и приближенной природы причин в математическую теорию сложной и неопределенной информации.

Необходима (по мнению авторов [7]) большая работа в расширении семантики и философско-логических оснований НМ и мультимодальных аспектов нечеткой логики. Для начала отметим, что величинами истинности могут быть не только числа, но и Goguen's *L*-нечеткая теория множеств, предложившая обобщенную *L*-решетку вместо  $[0, 1]$ . Работы Zadeh, Dubois, Prade и других сторонников теории возможностей и модального логического метода в нечеткой семантике свидетельствуют о признании этой необходимости в содержании истинности.

Построение ФП принципиально является психологической проблемой, связанной с индивидуальным восприятием свойств объектов. Хотя многие методы построения ФП основаны на математической психологии [6], но, к сожалению, фундаментальные положения современных методов принятия решений на основе принципиально новых подходов к анализу личности, в частности аномалий рационального поведения, изложенных в работах Д. Канемана и А. Тверски [8], до настоящего времени в ТНМ не применяются, несмотря на хорошую подготовленность задач.

Феномен неопределенности имеет сложную природу. Описание его в конечном виде, как это сделано в ТНМ на основании модели нечеткости — одного из НЕ-факторов — подмножества упорядоченных пар, является одним из возможных методов. Во многих случаях, когда употребляются одновременно термины неопределенность и нечеткость, возникают противоречия и требуется дополнительное объяснение в контексте. Например, в работе [9] неопределенность соответствует недостатку знания об объекте, что обычно вызвано ограничениями наблюдения. Нечеткость — это тип неточности в характеристике классов, который в силу различных причин не может иметь или не иметь точно определенных границ. Нечеткость обычно присуща особенностям собственного географического феномена. Это значит, что рассматриваемый объект или феномен не может быть точно представлен, например граница шума и граница побережья.

Очевидно, для описания неопределенности рациональной может быть также асимптотическая методология, когда взаимодействуют три фактора: точность, локальность и простота [4] и соответственно три НЕ-фактора: неточность (один из ее видов — нечеткость), нелокальность (распределенность), сложность. (Но это предмет отдельного исследования.)

Актуально рассмотреть схему, в которой нечеткость формируется естественным (по крайней мере, для аудио-видео объектов) образом: объект → оператор

нечеткости (размытия) — теплицева, ганкелева или другая специальная матрица, действующий на объект  $\rightarrow$  сингулярная декомпозиция  $\rightarrow$  сумма rank-1 тензоров для представления (или восстановления) размытого (нечеткого) объекта. При этом методология принятия решений в условиях неопределенности, предложенная нобелевскими лауреатами Д. Канеманом и А. Тверски [8], предполагает обязательное использование основного (базового) метода и его альтернативы.

Хеометрика (одна из отраслей химии) достигла в последние 20–30 лет ощутимых результатов прежде всего благодаря анализу данных и получению информации, которой уделяется первостепенное значение. Именно в этой области знаний была показана необходимость исследования многомерных (многомодальных) данных и впервые сформулирована целесообразность многоканальных измерений при сравнительно небольшом количестве таких измерений, что весьма актуально и для ТНМ, но не реализовано.

Естественно желание использовать эти возможности в ТНМ, поскольку на сегодня это наиболее распространенная методология решения задач в условиях неопределенности. Наиболее распространенным в ТНМ, если иметь в виду НЕ-фактор неточность, являются многомерные одномодальные и двумодальные данные, в частности серия или несколько серий измерений, относящихся к одному объекту. В этом случае данные можно интерпретировать как вектор, которому сопоставляют интервал и с которым связывают ФП, как правило, треугольной или трапециевидной формы в зависимости от утверждения, формулируемого экспертом. Интервал выступает в роли УМ, на котором задается НМ.

В работах [10, 11] показано, что НМ  $\tilde{A} = \{x / \mu_{\tilde{A}}(x)\}$ ,  $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0; 1]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $\mathbb{R}$  — универсум, может быть представлено в виде тензорного (кронекерова) произведения компонент  $\mathbf{T}^{\tilde{A}} = (x \otimes \mu_{\tilde{A}}(x))^{n \times n}$ , где  $\otimes$  — символ тензорного произведения, что открывает новые дополнительные возможности анализа данных. Тензоры применяются в различных ветвях анализа данных: обработка сигналов и изображений, хеометрика, биометрика, квантовая физика и др. Тензоры особенно эффективны для данных, которые имеют не только огромные объемы, но также очень высокую изменчивость, например они пригодны для решения проблем в био- и нейронинформатике, где данные собираются в различных форматах и размерностях (редко табличных) в виде графов или сетей с многочисленными аспектами и высокой размерностью.

Рассмотрим представление нечеткости как наиболее изученного НЕ-фактора, для которого был предложен математический формализм. Таким формализмом является ФП. Классическое определение ФП нечеткого множества  $\tilde{A} = \{x / \mu_{\tilde{A}}(x)\}$  имеет вид  $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0; 1]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ; в случае анализа нечеткости необходимо представлять ФП однозначно. Однако до настоящего времени не существует способов выбора рациональной ФП. Результаты, полученные в конкретной задаче, как правило, уникальны и в общем случае не могут быть распространены на другую подобную задачу. Тем не менее, НМ — подмножество упорядоченных пар (ПмУП), в котором одна из компонент — УМ, представляющая собой интервал, является рациональным для применения во многих случаях. В работах [12, 13] показано, что, во-первых, только интервал достаточно универсален для того, чтобы выступать в качестве внутреннего представления. Остальные формы, по-видимому, могут использоваться только как внешние выражения для определенных типов ситуаций. Во-вторых, только три НЕ-фактора: неточность, недоопределенность и неоднозначность (включая и нечеткость) сходны по формальному представлению этих факторов, которые используют интервал значений, что упрощает анализ содержательных различий их прагматики.

Задача, поставленная авторами, сформулирована как перенос известных свойств и характеристик феномена нечеткости (размытия), наблюдаемых и изучаемых в процессе обработки аудио-визуальных сигналов (в частности, обработки оцифрованных изображений), на нечеткость, формально моделируемую с помощью НМ. В связи с этим необходимо показать:

— адекватность (эквивалентность) моделей нечеткости, использующих НМ с эвристически выбранной ФП, и ПмУП с вычисленной компонентой — аналогом ФП;

— возможное уменьшение неопределенности (в частности, интервальной, обусловленной выбором УМ) при использовании специальных матриц, моделирующих феномен размытия.

Отметим, что НМ в соответствии с определением [3] является подмножеством упорядоченных пар, где по умолчанию одна из компонент — ФП отображает явную значимость соответствующего значения второй компоненты — УМ, например в истинности определенного высказывания. Подмножество упорядоченных пар, вычисленное на основании размывания УМ с помощью специальных матриц и последующей сингулярной декомпозиции, отображает значимость только с точки зрения альтернативного метода наименьших квадратов.

Нечеткость как феномен реального мира проявляется визуально и на слух: нечеткость (размытость) изображений, нечеткость слышимости живых или воспроизводимых звуков и т.д. Именно эта реальность, данная в ощущениях, позволяет интуитивно использовать приобретенный опыт и неявные знания. Феномен нечеткости проявляется, в частности, визуально как расфокусировка и смещение: в первом случае — пиксель (бесконечно малая точка на изображении) трансформируется в пятно заметной величины, во втором случае он трансформируется в вектор. Отметим, что компоненты НМ — также векторы; компоненты одного из них (универсальное множество, на котором сформировано НМ) виртуально «видны» с разной степенью различимости, характеризуемой ФП. Формально НМ — это векторизованная матрица размера  $n \times 2$ ,  $\tilde{a} \triangleq (a \mu_i^a)_1^n$ ,  $a \in A$ .

Существует научный и практический интерес проанализировать возможность представления феномена нечеткости, не прибегая к понятию ФП как отображению значимости, располагая математическим аппаратом, который применяется в теории и практике обработки сигналов, и рассматривать полученный результат как предобработку, дополнительную к ТНМ, дающую возможности расширения класса решаемых задач в условиях неопределенности.

В ТНМ при формировании НМ принято, что УМ, на котором формируется НМ, задано необходимым количеством элементов. При необходимости оно может быть расширено, но участие каждого из этих элементов в реализации (например, утверждения, для которого сформировано НМ) субъективно назначено экспертом. При невозможности задать ФП или необходимости иметь альтернативное решение, не зависящее от субъективного (пусть даже априори правильно) решения эксперта, авторами статьи предложено заданное УМ преобразовывать в размытое, объективно формируемое в результате воздействия оператора (матрицы) размывания на элементы УМ. Оператором размывания выступает матрица Теплица или матрица Ганкеля, или их комбинации.

#### ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

**Применение специальных матриц для размывания объектов.** Модель размытых изображений в дискретном случае приближенно может быть описана выражением  $g = Hf + n$ , где  $g$  — размытое (нечеткое) изображение;  $H$  — опе-

ратор искажения, определяемый, например, при анализе изображений так называемой функцией протяженности точки (PSF, Point Spread Function) (свертка этой функции с изображением является причиной искажений);  $f$  — исходное (не размытое) изображение;  $n$  — аддитивный шум. Компонента  $Hf$  рассматривается как аналог НМ. Математически пространственно-инвариантное восстановление изображения моделируют как формулу свертки:  $y(s) = \int h(s-t)x(t) dt + e(s)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}^d$ ,  $d=1, 2, 3, \dots$ , где  $x$  и  $y$  — функции, представляющие истинные и нечеткие (размытые) наблюдаемые изображения соответственно,  $e$  — аддитивный шум,  $h(s-t)$  — функция (оператор), которая определяет процедуру нечеткости (размытия).

Структура функции  $h(s-t)$ , которая определяет феномен нечеткости (размытия), зависит от допущений, сделанных вне объекта исследования и влияющих на процесс нечеткости (размытия) и наиболее часто представляемых в виде матрицы. Поскольку реальных значений при восстановлении изображения обычно не знают, вводятся искусственные граничные условия, в соответствии с которыми в качестве матриц нечеткости (размытия) используют многоуровневые структуры типа матрицы Топлица, матрицы Ганкеля, циркулянтной матрицы или комбинации этих матриц. Не касаясь теории специальных матриц, которая изложена в работе [14], укажем, что при заданном векторе  $\mathbf{x} = \{x_i\}$ ,  $i=1, 5$ , топицева матрица (Т-матрица) и ганкелева матрица, порожденные данным вектором, в нотации MatLab имеют вид

$$\mathbf{T}^x = \text{toeplitz}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & x_2 \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^x = \text{hankel}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 \\ x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Одним из подходов к использованию матрицы (оператора) нечеткости предложено использовать некоторое приближение Т-матрицы с помощью кронекерова произведения (КП) и процедуры сингулярной декомпозиции. Реально рассматривают процедуру  $[\mathbf{u} \ \mathbf{s} \ \mathbf{v}] = \text{svd}(\mathbf{K}) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{T}^T$ . Матрица  $\mathbf{K}$  в дальнейшем может быть декомпозирована в КП меньших матриц. В [15, 16] показано, что для общей (блочной) матрицы справедливо равенство

$$\left\| \mathbf{K} - \sum_{k=1}^r (\mathbf{A}_k \otimes \mathbf{B}_k) \right\|_F = \left\| \hat{\mathbf{K}} - \sum_{k=1}^r (\hat{\mathbf{a}}_k \otimes \hat{\mathbf{b}}_k) \right\|_F,$$

где  $\hat{\mathbf{a}}_k = \text{vec}(\hat{\mathbf{A}}_k)$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_k = \text{vec}(\hat{\mathbf{B}}_k)$ ,  $\otimes$  — символ КП,  $\|\cdot\|_F$  — фробениусова норма. Для матрицы  $\mathbf{X}$  размера  $m \times n$  имеем  $\|\mathbf{X}\|_F = (\text{trace}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}^T))^{1/2}$ . Лучшая аппроксимация КП достигается вычислением SVD для матрицы  $\mathbf{K}$ . Отметим, что для любого НМ  $\tilde{a} \triangleq \{a / \mu_i^a\}$ ,  $a \in A$ ,  $\mu_i^a \rightarrow [0, 1]$ ,  $i=1, n$ , — процедура сингулярной декомпозиции КП ( $a \otimes \mu_i^a$ ) компонент НМ позволяет получить векторы  $a$ ,  $\mu_i^a$  практически без искажений.

**Тензорные декомпозиции.** Одним из возможных решений задач в условиях неопределенности является использование тензорных декомпозиций; основные положения этой методологии рассмотрены в [17–19]. Тензорный анализ (прежде всего динамический) позволяет обнаруживать скрытые структуры сложных данных и выполнять определенные обобщения, охватывая связь мультилинейности и мультиаспектности. Известно, что факторный анализ — анализ латентных переменных (LVA) состоит

в том, чтобы разложить на составные части матрицу данных  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I \times J}$  в фактор-матрицы  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_R] \in \mathbb{R}^{I \times R}$  и  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_R] \in \mathbb{R}^{J \times R}$ :

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{D}\mathbf{B} + \mathbf{E} = \sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^T + \mathbf{E} = \sum_{r=1}^R \lambda_r \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r + \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{D} = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_R)$  — масштабированная (нормализованная) матрица; столбцы  $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$  представляют неизвестный источник сигналов (факторы или латентные переменные в зависимости от заданий); столбцы  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$  представляют связанные векторы смешивания (или фактор-загрузки);  $\mathbf{E}$  — шум, обусловленный немоделируемой частью данных или ошибкой модели. Иначе говоря, модель (2) допускает скрытые компоненты  $\mathbf{b}_r$  ( $r=1, 2, \dots, R$ ).

Сингулярная декомпозиция (рис. 1) является уникальной благодаря ортогональности ограничений:  $\mathbf{A} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T = \sum_{r=1}^R s_{rr} \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T$ ;  $\mathbf{U}, \mathbf{V}$  — ортогональны;  $\mathbf{S}$  —

диагональ,  $\text{sum}(\mathbf{v}(:, 1)^2) = 1$ . Это позволяет подмножество упорядоченных пар  $\{\text{abs}(\mathbf{u}(:, 1) * s(1, 1)), \text{abs}(\mathbf{v}(:, 1))\}$  после соответствующей нормализации рассматривать как аналог НМ.

Отметим, что интерпретация SVD зависит от приложения; SVD-процедура эффективна для сокращения размерности,

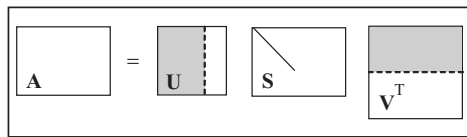


Рис. 1. Сингулярная декомпозиция матрицы

эффективна для сокращения размерности, получения лучших rank- $R$  аппроксимаций через усечение SVD и других приложений, в частности формирования ПМУП.

Учитывая, что НМ  $\tilde{A} = \{a / \mu^a\}$ ,

$\mu^a \rightarrow [0, 1]$ ,  $a \in A$ , представлено в виде матрицы размера  $n \times 2$ , конкретно  $(a_1 \mu^{a_1}; \dots; a_n \mu^{a_n})$ , или эквивалентно в виде тензорной модели (кронекерова произведения)  $\tilde{A} \mathbf{T} = \tilde{A}(:, 1) \otimes \tilde{A}(:, 2)$ , поиск ближайшего НМ сводится к поиску ближайшего КП с дальнейшим вычислением ПМУП. Решение этой задачи выполнено в соответствии с работами [20, 21].

Допустим, что задана матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с размерами  $m = m_1 m_2$ ,  $n = n_1 n_2$ . Для целочисленной факторизации ближайшее КП (БКП) предусматривает минимизацию  $\phi(B, C) = \|A - B \otimes C\|_F$ , где  $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$  и  $C \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$ . Решение данной проблемы БКП возможно с использованием сингулярной декомпозиции перестановочной матрицы  $\mathbf{A}$ . Оптимальные значения векторов  $B$  и  $C$  вычисляются в виде  $\text{vec}(B_{\text{opt}}) = (\sigma_1)^{1/2} \mathbf{U}(:, 1)$ ,  $\text{vec}(C_{\text{opt}}) = (\sigma_1)^{1/2} \mathbf{V}(:, 1)$ . Если  $B_{\text{opt}}$  и  $C_{\text{opt}}$  — решения БКП и  $\alpha \neq 0$ , то  $\alpha B_{\text{opt}}$  и  $(1/\alpha) C_{\text{opt}}$  — также оптимальные решения. Отметим, что в работе рассматривается конкретная модификация БКП:  $\min \phi(B, C) = \|A - B \otimes C\|_F = \|A - \text{vec}(B) \otimes \text{vec}(C)\|_F$ , где  $\text{vec}(B) \in \mathbb{R}^m$  представляет УМ,  $\text{vec}(C) \rightarrow [0, 1]$  представляет ФП.

Обратное значение матрицы  $\mathbf{A}$  определяется как  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T$  (проверка  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ ). Учитывая, что  $\mathbf{\Sigma}$  является диагональной матрицей, инверсия  $\mathbf{\Sigma}^{-1}$  также будет диагональю со значениями  $1/\sigma_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Ранее отмечалась целесообразность представления  $\mathbf{A}$  в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_N] \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_N^T \end{bmatrix} = \mathbf{u}_1 \sigma_1 \mathbf{v}_1^T + \dots + \mathbf{u}_N \sigma_N \mathbf{v}_N^T = \sum_{i=1}^N \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T,$$

соответственно  $\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$ . Таким образом, нечеткому множеству  $\tilde{x} \triangleq \{x / \mu^x\}$ ,

$\mu^x \rightarrow [0, 1]$ ,  $x \in X$ , соответствует тензорная модель в виде кронекерова произведения  $\mathbf{T}^x = x \otimes \mu^x$ , сингулярная декомпозиция которого позволяет вычислить на основании значений  $\{\sigma_i \mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i\}$  ближайшее (в смысле Ф-нормы) к  $\tilde{x}$  подмножество упорядоченных пар, на основании значений  $\{(1/\sigma_i) \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i\}$  — подмножество упорядоченных пар, ближайшее (в смысле Ф-нормы) к  $\tilde{x}^{-1}$ . Если учитывать, что тензорные декомпозиции могут быть применены к подмножеству начальных данных или к восстановленному (на основе УМ) начальному (исходному) множеству данных, то можно заметить эффективность такого подхода:

— появляется возможность дополнительного контроля принятия решений на основе экспертно сформированного НМ;

— в случае невозможности сформировать экспертную ФП (НМ) используют подмножества упорядоченных пар.

**Конструирование 2D-тензоров на основе УМ и их декомпозиция.** Следует оговорить, что случай, когда ИМД задано с пропусками данных, в работе не рассматривается. Предполагается, что ИМД задано в виде массива данных, который можно структурировать в виде квадратной матрицы. Для нее может быть определен интервал значений  $\mathbf{I} = [\max(), \min()]$ , который принимается в качестве УМ, где формируется НМ. В соответствии с постановкой задачи ее решение предполагает реализацию двух шагов:

1) представление УМ (интервала значений) в виде 2D-тензора и использование процедуры `reshape(x, n, n)`, где  $\mathbf{x}$  — вектор УМ размера  $1 \times m$ ,  $m = n^2$ ;

2) конструирование на главной диагонали 2D-тензора из п. 1) теплицевой матрицы,  $\mathbf{T}^x = \text{toeplitz}(\text{diag}(\cdot))$  (погружение главной диагонали в Т-матрицу); отметим, что Т-матрица может быть построена также на УМ, рассматриваемом как вектор.

Для 2D-тензора  $\mathbf{T}^x$  выполняется процедура сингулярной декомпозиции  $[\mathbf{u} \ \mathbf{s} \ \mathbf{v}] = \text{svd}(\mathbf{T}^x)$ , вычисляется ПМУП  $\{\text{abs}(\mathbf{u}(:, 1)) * s(1, 1), \text{abs}(\mathbf{v}(:, 1))\}$ , которое в дальнейшем используется как аналог НМ. На рис. 2 приведена визуальная иллюстрация конструирования 2D-тензоров на основе УМ и их декомпозиции.

Отметим, что НМ и вычисленные ПМУП рассматриваются в виде матриц размера  $n \times 2$ , т.е.

$$\tilde{x} \triangleq \{x / \mu^x\} = \left( \underbrace{fs(:, 1)}_x \ \underbrace{fs(:, 2)}_{\mu^x} \right).$$

Следует отметить, что КП компонент НМ  $\mathbf{T}^{fs} = \{fs(:, 1) \otimes fs(:, 2)\}$ , представляющее 2D-тензор — матрицу размера  $n \times n$ , после сингулярной декомпозиции  $[\mathbf{u} \ \mathbf{s} \ \mathbf{v}] = \text{svd}(\mathbf{T}^{fs})$  позволяет получить ПМУП, компоненты которого совпадают с компонентами исходного НМ. Это вытекает из свойств ближайшего кронекерова произведения [20]. Таким образом, имеется возможность использовать объект  $\{fs(:, 1) \otimes fs(:, 2)\}$  без ограничений при решении задач в условиях неопределенности и существенно расширить класс задач, решаемых в условиях неопределенности. (Подробно эти вопросы рассмотрены в работах [10, 11].)

Процедура создания тензор-данных от низкоразмерных исходных данных известна как тензоризация [22]. Предложены способы генерации тензор-данных, в частности реорганизация низкомерных структур данных. Например, одномер-

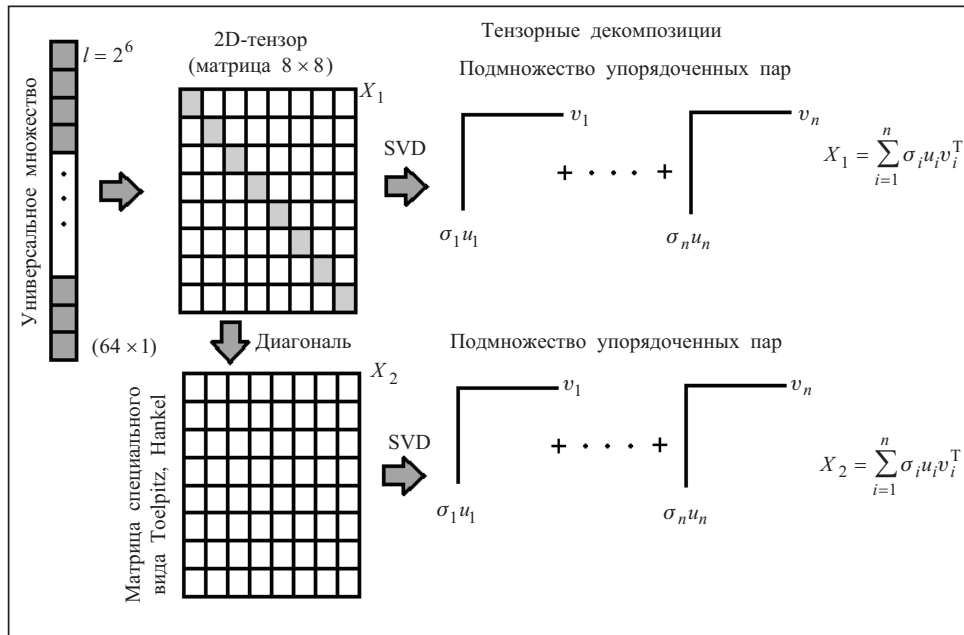


Рис 2. Конструирование 2D-тензоров на основе УМ и их декомпозиции: представление УМ (вектор  $64 \times 1$ ) в виде 2D-тензора (матрица  $8 \times 8$ ); специальная тензоризация вектора (УМ) или диагонали 2D-тензора (оператор размывания) и их представление в виде ПМУП

ный сигнал может быть перестроен в rank-1 матрицу или тензор (многомерный массив), т.е. представлен в виде многомерного тензора  $2 \times 2 \times \dots \times 2$ . Универсальное множество в виде вектора  $x$  размера  $1 \times n$ ,  $n = m^2$ , может быть с помощью процедуры  $T^x = \text{reshape}(x, m, m)$  перестроено в 2D-тензор  $T^x$  размера  $m \times m$ . Сингулярная декомпозиция 2D-тензорной модели УМ приводит к его представлению в виде подмножества упорядоченных пар, одна из его компонент близка к характеристической функции [23].

#### ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основная цель исследования состоит в том, чтобы показать возможность выделения скрытых знаний с помощью универсального множества, на котором сформировано НМ (или некоторого подмножества универсального множества, используемого как параметры в составе ФП), но при этом их можно использовать в виде подмножества упорядоченных пар, аналогичного НМ (но не совпадающего с ним) в случае невозможности задания ФП, если имеет место «информационный голод».

Схема исследования:

- тензоризация и размывание универсального множества через формирование специальных матриц (матрицы Теплица, Ганкеля);
- декомпозиция этих матриц с использованием SVD в совокупность rank-1 матриц, аппроксимирующих исходную (сформированную) матрицу и рассматриваемых в качестве подмножеств упорядоченных пар;
- реализация математических операций по правилам нечеткой математики для стандартных НМ.

Основные задачи, решением которых достигаются поставленные цели:

- выбор критериев оценки близости (эквивалентности) стандартного НМ (нечеткого числа), принятого в виде ФП, в частности треугольной или трапециевидной формы:  $\tilde{x}_{\text{trimf}/\text{trap}} \triangleq \{x / \mu^x\}$ ,  $x \in X = \{x\}$ ,  $\mu^x \rightarrow [0, 1]$ ,  $X$  — универсальное множество, и в виде ПМУП, вычисляемых на основе сингулярных декомпозиций тензоризованного УМ;



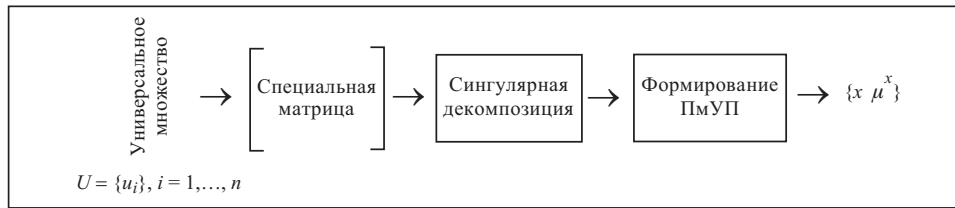


Рис. 3. Принципиальная схема моделирования нечеткости на основании УМ

— формирование на основе универсального множества 2D-тензора специальной (теплицевой или ганкелевой) матрицы:  $\{x\} \rightarrow \{\mathbf{T}^x, \mathbf{H}^x\}$ ,  $\mathbf{T}^x = \text{toeplitz}(x)$ ,  $\mathbf{H}^x = \text{hankel}(x)$  соответственно;

— сингулярная декомпозиция 2D-тензора  $\mathbf{T}^x$  (или  $\mathbf{H}^x$ ) и нормализация:

$$[\mathbf{u} \ \mathbf{s} \ \mathbf{v}] = \text{svd}((\mathbf{T}^x)^T) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left( \text{sort} \left( \underbrace{\text{abs}(s(1,1) * \mathbf{u}(:,1)) * \max(\text{abs}(\mathbf{v}(:,1)))}_{P_x}, \underbrace{\text{abs}(\mathbf{v}(:,1)) / \max(\text{abs}(\mathbf{v}(:,1)))}_{P_{\mu^x}}} \right) \right);$$

— формирование из первой компоненты rank-1 разложения тензора ПМУП  $\{P_x \ P_{\mu^x}\}$ , обладающего свойствами  $P_{\mu^x} \rightarrow [0,1]$ ,  $P_x \otimes P_{\mu^x} \approx \mathbf{T}^x$  (или  $P_x \otimes P_{\mu^x} \approx \mathbf{H}^x$ ) (рис. 3);

— реализации операций стандартной нечеткой математики (принцип нечеткого расширения)  $(\tilde{\mathbf{a}} *_{f} \tilde{\mathbf{b}})$ ,  $\tilde{\mathbf{a}} \triangleq \{\mathbf{a} / \mu^a\}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} \triangleq \{\mathbf{b} / \mu^b\}$ ;  $A = \{\mathbf{a}\}$ ,  $B = \{\mathbf{b}\}$ , где  $*_{f} \in \{+, -, *, /\}$  для стандартно (эвристически) сформированных НМ и вычисленных ПМУП  ${}^t\tilde{x} \triangleq \{P_x / P_{\mu^x}\}$ ,  $x \in X$ ,  $P_{\mu^x} \rightarrow [0,1]$ ;

— сравнительная оценка результатов на основании сформированных критериев эквивалентности (фробениусовы нормы и дефадзифицированные значения);

— объединение формальных и неформальных методов, например учет приоритета некоторых элементов УМ, в частности когда некоторый заранее определенный элемент является главной диагональю T-матрицы. Так, T-матрица для  $\mathbf{x} = \{x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5\}$ , имеющая вид (1), при условии, что элемент  $x_3$  принимается в качестве главной диагонали T-матрицы, приобретает вид

$$\mathbf{T}^{x_3} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & 0 \\ x_5 & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ 0 & x_5 & x_4 & x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & x_5 & x_4 & x_3 \end{pmatrix}; \quad (3)$$

объект  $\mathbf{T}^{x_3}$  имеет новые свойства по сравнению с (1). Сингулярная декомпозиция  $\mathbf{T}^{x_3}$  в виде (3) позволяет получить ПМУП в более конструктивной форме, чем при использовании  $\mathbf{T}^x$  в виде (1).

#### ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ T-МАТРИЦАМИ. ФОРМИРОВАНИЕ ПМУП БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭВРИСТИЧЕСКИ НАЗНАЧЕННЫХ ФП

Покажем, что стандартное НМ, выбранное эвристически на основании опыта и неявных знаний эксперта, является эквивалентным некоторому ПМУП, вычисленному на основании сингулярной декомпозиции 2D-тензора (теплицевой матрицы), сформированного на УМ. Пусть УМ, на котором сформировано НМ, задано в виде  $\{x\} = [1.55 \ 2.67 \ 2.84 \ 3.64 \ 4.19]$ , ФП для нечеткого множества  $\tilde{x}_{\text{trimf}}$  в нотации MatLab принята в форме  $\mu^x = \text{trimf}(x, [\min(x) \ \text{mean}(x) \ \max(x)])$ . Теплицева матрица для УМ имеет вид

$$\mathbf{tx} = \text{toeplitz}(x) = \begin{pmatrix} 1.55 & 2.67 & 2.84 & 3.64 & 4.19 \\ 2.67 & 1.55 & 2.67 & 2.84 & 3.64 \\ 2.84 & 2.67 & 1.55 & 2.67 & 2.84 \\ 3.64 & 2.84 & 2.67 & 1.55 & 2.67 \\ 4.19 & 3.64 & 2.84 & 2.67 & 1.55 \end{pmatrix}.$$

Представление УМ T-матрицей с последующей сингулярной декомпозицией дало следующие результаты: критерии близости исходного  $\text{HM}_{\text{trimf}()}$  и ПмУП, полученного на основании T-матрицы УМ, практически совпадают (колонки 1, 3: 7.07 и 6.96 (фробениусова норма) и 2.95 и 2.97 (дефадзифицированное значение); усеченное НМ и усеченная T-модель УМ также имеют практически совпадающие критериальные параметры (табл. 1).

В табл. 1 (колонка 5) приведен случай, когда элемент  $x_3 \in \{x\}$  принят в качестве элемента главной диагонали специальной матрицы: Ф-норма и дефадзифицированные значения ПмУП равны 6.94 и 3.07 соответственно. В колонке 1 для исходной  $\text{HM}_{\text{trimf}()}$  имеем значения 7.07 и 2.95. Отметим, что данный результат более конструктивный по сравнению с результатом, представленным в колонке 3.

На основании данных табл. 1 можно сделать следующие выводы.

— Назначение ФП при формировании НМ полностью зависит от опыта исследователя, так как именно его представление неопределенности было решающим аргументом в пользу выбора той или иной ФП. При этом вопрос о возможности уменьшения неопределенности за счет понимания и опыта исследователя не ставится; представление УМ в виде 2D-тензора после преобразования в теплицеву матрицу — модель феномена естественной нечеткости, позволяет сократить интервал неопределенности, сохраняя при этом близость с параметрами НМ, сформированного экспертом (в качестве параметров близости приняты Ф-норма и дефадзифицированное значение ПмУП).

— Полученные ПмУП в виде rank-1 тензора и НМ, являющиеся практически эквивалентными, позволяют по-новому проанализировать ФП и объективно оценить ее значимость.

Следует отметить, что при моделировании неопределенности в виде теплицевой матрицы имеем существенное уменьшение длины интервала неопределенности (длины интервалов в колонках 1 и 5 существенно различны: [1.55, 4.19] и [1.90, 3.77]), что может быть серьезным преимуществом при принятии решений в условиях неопределенности.

Представим УМ в виде стандартной матрицы  $5 \times 5$  и в виде стандартной и модифицированной T-матриц размера  $5 \times 5$ , реализовав процедуры, приведенные в табл. 2.

Результаты вычислений Ф-нормы:  $x$ -УМ (вектор  $1 \times 25$ );  $\mathbf{tx}$  — матрицированный вектор УМ (матрица  $5 \times 5$ );  $\mathbf{tt}$  — теплицева матрица ( $5 \times 5$ ), сформирован-

**Таблица 1**

Исходное $\text{HM}_{\text{trimf}()}$	Усеченное $\text{HM}_{\text{trimf}()}$	ПмУП после сингулярной декомпозиции T-моделей		
		Исходная модель	Усеченная модель	Исходная модель при $x_3$ на главной диагонали
1	2	3	4	5
$\begin{pmatrix} 1.55 & 0 \\ 2.67 & 0.79 \\ 2.84 & 0.90 \\ 3.64 & 0.46 \\ 4.19 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.55 & 0 \\ 2.84 & 0.90 \\ 4.19 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.71 & 0.85 \\ 2.88 & 0.91 \\ 2.88 & 0.91 \\ 3.18 & 1.00 \\ 3.18 & 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2.71 & 0.85 \\ 2.88 & 0.91 \\ 3.18 & 1.00 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.90 & 0.50 \\ 2.64 & 0.70 \\ 2.85 & 0.76 \\ 3.47 & 0.92 \\ 3.77 & 1.00 \end{pmatrix}$
Ф-норма				
7.07	5.37	6.96	5.32	6.94
Дефадзифицированные значения				
2.95	2.95	2.97	2.94	3.07

**Таблица 2**

$x = [3 : 1 / 4 : 9],$ $tx = \text{reshape}(x, 5, 5)$	$x1 = \text{diag}(tx) =$ $= [3.00 \ 4.50 \ 6.00 \ 7.50 \ 9.00],$ $tt = \text{toeplitz}(x1)$	Модифицированная Т-матрица; элемент $x1(3)$ выбран в качестве главной диагонали
$tx =$ $= \begin{pmatrix} 3.00 & 4.25 & 5.50 & 6.75 & 8.00 \\ 3.25 & 4.50 & 5.75 & 7.00 & 8.25 \\ 3.50 & 4.75 & 6.00 & 7.25 & 8.50 \\ 3.75 & 5.00 & 6.25 & 7.50 & 8.75 \\ 4.00 & 5.25 & 6.50 & 7.75 & 9.00 \end{pmatrix}$	$tt =$ $= \begin{pmatrix} 3.00 & 4.50 & 6.00 & 7.50 & 9.00 \\ 4.50 & 3.00 & 4.50 & 6.00 & 7.50 \\ 6.00 & 4.50 & 3.00 & 4.50 & 6.00 \\ 7.50 & 6.00 & 4.50 & 3.00 & 4.50 \\ 9.00 & 7.50 & 6.00 & 4.50 & 3.00 \end{pmatrix}$	$tt3 =$ $= \begin{pmatrix} 6.00 & 7.50 & 9.00 & 0 & 0 \\ 7.50 & 6.00 & 7.50 & 9.00 & 0 \\ 9.00 & 4.50 & 6.00 & 7.50 & 9.00 \\ 0 & 3.00 & 4.50 & 6.00 & 7.50 \\ 0 & 0 & 3.00 & 4.50 & 6.00 \end{pmatrix}$

**Таблица 3**

ПмУП		
$\text{Tab\_pup\_tx} = \begin{pmatrix} 3.78 & 0.86 \\ 5.12 & 0.89 \\ 6.46 & 0.93 \\ 7.80 & 0.96 \\ 9.15 & 1.00 \end{pmatrix}$	$\text{Tab\_pup\_tt} = \begin{pmatrix} 5.35 & 0.82 \\ 5.65 & 0.86 \\ 5.65 & 0.86 \\ 6.57 & 1.00 \\ 6.57 & 1.00 \end{pmatrix}$	$\text{Tab\_pup\_tt3} = \begin{pmatrix} 4.51 & 0.42 \\ 5.57 & 0.62 \\ 6.93 & 0.67 \\ 7.44 & 0.94 \\ 7.99 & 1.00 \end{pmatrix}$
Ф-нормы и дефадзифицированные значения		
$n\_pmup = 15.21$ $s\_pup\_tx = 6.56$	$n\_pmup = 13.52$ $s\_pup\_tx = 6.00$	$n\_pmup = 14.88$ $s\_pup\_tx = 6.74$

ная на векторе УМ ( $x1 = x(1 : 5 : 25)$ );  $tt3$  — модифицированная теплицева матрица, элемент  $x1(3)$  выбран в качестве главной диагонали

$$\begin{matrix} \text{norm}(x, 'fro') & \text{norm}(tx, 'fro') & \text{norm}(tt, 'fro') & \text{norm}(tt3, 'fro') \\ 31.32 & 31.32 & 28.46 & 29.05 \end{matrix}$$

Все рассмотренные объекты близки по норме.

Формирование ПмУП для рассмотренных матричных моделей путем сингулярной декомпозиции дало результаты, приведенные в табл. 3.

На основании данных табл. 3 можно сделать следующие выводы.

— Прослеживается близость полученных параметров. Хотя результат моделирования нечеткости стандартной Т-матрицей недостаточно конструктивный, однако интервал неопределенности существенно мал; результат может быть использован в качестве предварительной оценки.

— Результат моделирования нечеткости модифицированной Т-матрицей практически совпадает с результатом представления УМ в форме стандартной матрицы, но длина интервала неопределенности для модифицированной Т-матрицы (4.51÷7.99) существенно меньше аналогичной величины для стандартной матрицы (3.78÷9.15). Нетрудно увидеть, насколько эффективна такая модель нечеткости.

Отметим следующие факты. ПмУП во всех случаях вычислены без привлечения ФП. Практическое совпадение полученных результатов свидетельствует о том, что, во-первых, экспертное назначение ФП рационально, во-вторых, вычисленные ПмУП эквивалентны ФП, в-третьих, все сформированные ФП относятся к утверждению «приблизительно 5». Другими словами, применение любого ПмУП не вносит существенной погрешности. ПмУП представляет собой скрытые знания, полученные в результате тензорной декомпозиции на основе сравнительно строгих формальных моделей.

Рассмотрим арифметические операции над ПмУП, сформированными в результате сингулярной декомпозиции теплицевой матрицы, основанной на УМ или параметрах ФП. Если НМ  $\tilde{a} \triangleq \{a / \mu^a\}$ ,  $\mu^a \rightarrow [0, 1]$ ,  $a \in A$ ;  $\tilde{b} \triangleq \{b / \mu^b\}$ ,

$\mu^b \rightarrow [0, 1]$ ,  $b \in B$ , представлены в виде  $n \times 2$  матриц  $\mathbf{T}^a = \begin{pmatrix} a_1 & \mu^{a_1} \\ \vdots & \vdots \\ a_n & \mu^{a_n} \end{pmatrix}$ ,

$\mathbf{T}^b = \begin{pmatrix} b_1 & \mu^{b_1} \\ \vdots & \vdots \\ b_n & \mu^{b_n} \end{pmatrix}$ , то результат операции  $\tilde{c} = \tilde{a} *_{f} \tilde{b}$ , где  $*_{f} \in \{+, -, *, /\}$ , вы-

числяется как  $\tilde{c} \Rightarrow \mathbf{T}^c = (\mathbf{T}^a(:, 1) *_{f} \mathbf{T}^b(:, 1), \min(\mathbf{T}^a(:, 2), \mathbf{T}^b(:, 2)))$ . Так, при сравнении результатов операции  $(\tilde{y}2 \triangleq \tilde{S}_{\text{trapmf}}) + (\tilde{y}3 \triangleq \tilde{S}_{\text{trimf}})$  и операции ПМУП<sub>у2</sub> + ПМУП<sub>у3</sub> имеем:

$$(\tilde{y}2 \triangleq \tilde{S}_{\text{trapmf}}) + (\tilde{y}3 \triangleq \tilde{S}_{\text{trimf}}) = \begin{pmatrix} 3.00 & 0 \\ 4.25 & 1.00 \\ 5.50 & 1.00 \\ 6.75 & 0.63 \\ 8.00 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.00 & 0 \\ 3.50 & 0.50 \\ 5.00 & 1.00 \\ 6.50 & 0.50 \\ 8.00 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.00 & 0 \\ 7.75 & 0.50 \\ 10.50 & 1.00 \\ 13.25 & 0.50 \\ 16.00 & 0 \end{pmatrix},$$

при Ф-норме результат 25.07, дефадзифицированное значение результата 10.50;

$$\text{ПМУП}_{у2} + \text{ПМУП}_{у3} = \begin{pmatrix} 4.98 & 0.81 \\ 5.05 & 0.82 \\ 5.27 & 0.86 \\ 5.63 & 0.91 \\ 6.16 & 1.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.36 & 0.75 \\ 4.44 & 0.77 \\ 4.70 & 0.81 \\ 5.14 & 0.89 \\ 5.79 & 1.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.34 & 0.75 \\ 9.49 & 0.77 \\ 9.97 & 0.81 \\ 10.77 & 0.89 \\ 11.95 & 1.00 \end{pmatrix},$$

при Ф-норме результат 23.27, дефадзифицированное значение результата 10.41.

Эквивалентность приведенных операций очевидна.

Аналогичные результаты были получены при реализации всех арифметических операций, включая и ганкелевы матрицы. Объем статьи не позволяет привести их полностью. Следует отметить, что результаты относительно ПМУП были получены только на основании информации сингулярных декомпозиций размытых (с помощью теплицевой матрицы) значений УМ без использования ФП.

Таким образом, существует возможность параллельного назначения ПМУП, в значительной мере свободного от недостатков, присущих ФП, так как процедура формирования ПМУП, во-первых, в значительной степени формализована, во-вторых, позволяет выявить скрытые знания, содержащиеся в ИМД, на основе тензорных декомпозиций. Параллельное использование НМ, сформированного эвристически, и ПМУП, сформированного практически формальными методами, позволяет существенно повысить эффективность решения задач в условиях неопределенности.

Объем статьи не позволил привести результаты моделирования интервальной неопределенности (в данном случае универсального множества, на котором формируется НМ) с помощью блочных теплицевых матриц, ганкелевых матриц, теплицевых + ганкелевых матриц и других матриц. Во всех случаях имеет место подтверждение концепции, что в условиях невозможности задания по тем или иным причинам функции принадлежности моделирование феномена размытия интервала значений с помощью специальных матриц может служить серьезным инструментом в процессе решения разнообразных задач в условиях неопределенности. Процедура принятия решения в настоящее время в теории НМ может быть эффективно дополненной методологией Д. Канемана и А. Тверски, основанной на использовании аномалий рационального поведения [8].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен новый метод формирования подмножеств упорядоченных пар, обладающих свойствами НМ, не требующий эвристического назначения ФП. По-

казано, что в ряде случаев применение НМ, сформированного с использованием эвристически назначенной ФП, и ПМУП, вычисленного с использованием моделей нечеткости в виде теплицевых матриц, дают, в частности, при решении задач нечеткой математики близкие или совпадающие результаты.

2. Разработан метод формирования ПМУП, использующий формальные и неформальные методы, в частности назначение главной диагонали специальных матриц, существенно повышающий эффективность предложенных моделей. В качестве критерия близости НМ и ПМУП предложено использовать близость по норме и дефадифицированные значения.

3. Приведены примеры решения задач нечеткой математики для вычисленных (без применения ФП) подмножеств упорядоченных пар на основе стандартных правил ТНМ, подтверждающие эффективность предложенного метода:

- дополнительный канал проверки и контроля результата операции;
- возможность выполнения операций нечеткой математики (и логики)

в условиях невозможности назначения ФП;

— интервал определения подмножества упорядоченных пар вписан в интервал универсального множества.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hanss M. Applied fuzzy arithmetic. An introduction with engineering applications. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. 260 p.
2. Dubois D., Prade H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets. *International Journal of General Systems*. 1990. Vol. 17, Iss. 2–3. P. 191–209.
3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. Пер. с франц. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.
4. Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И. Асимптотическая математика и синергетика: Путь к целостной простоте. Москва: Либроком, 2009. 304 с.
5. Asara E., Dunlavy D.M., Kolda T.G., Morup M. Scalable tensor factorizations for incomplete data. arXiv:1005.2197v1 [math.NA] 12 May 2010. 34 p.
6. Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Под ред. Р.Р. Ягера. Москва: Радио и связь, 1986. 406 с.
7. Burstein G., Negoita C.-V., Kranz M. Kabbalah logic and semantic foundations for a postmodern fuzzy set and fuzzy logic theory. *Applied Mathematics*. 2014. Vol. 5, N 9. P. 1375–1385. <http://dx.doi.org/10.4236/am.2014.59129>.
8. Канеман Д., Словик П., Тверски А. Принятие решений в неопределенности: Правила и предубеждения. Пер. с англ. Харьков: Изд-во Института прикладной психологии «Гуманитарный Центр», 2005. 632 с.
9. Zhang Qiuju, Blok C.A., Tang Xinming. Animated representation of uncertainty and fuzziness in dutch spatial planning maps. *ISPRS 2008: Proceedings of the XXI Congress: Silk Road for Information from Imagery (the International Society for Photogrammetry and Remote Sensing)*. 3–11 July, Beijing, China. Comm. II, ThS6. Beijing: ISPRS, 2008. P. 1043–1048.
10. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Тензорные модели НМ-гранул и их применение для решения задач нечеткой арифметики. *Искусственный интеллект*. 2013. № 2. С. 18–31.
11. Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю., Минаева Ю.И. Кронекеровы (тензорные) модели нечетко-множественных гранул. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 4. С. 42–52.
12. Нариньяни А.С. Недоопределенность в системах представления и обработки знаний. *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика*. 1986. № 5. С. 3–28.
13. Нариньяни А.С. НЕ-факторы и инженерия знаний: от наивной формализации к естественной прагматике. *Сборник трудов IV Национальной конференции по искусственному интеллекту. КИИ-94* (Рыбинск, сентябрь 1994 г.). 1994. Т. 1. С. 9–18.
14. Gray R.M. Toeplitz and circulant matrices: A review. Department of electrical engineering Stanford University. Stanford 94305, USA. 98 p. URL: [https://www.ic.tu-berlin.de/fileadmin/fg121/SourceCoding\\_WS12/selected-readings/Gray\\_2005.pdf](https://www.ic.tu-berlin.de/fileadmin/fg121/SourceCoding_WS12/selected-readings/Gray_2005.pdf).
15. Hansen P.Ch., Nagy J.G., O’Leary D.P. Deblurring images: matrices, spectra, and filtering. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. 145 p. URL: <http://www2.imm.dtu.dk/~pch/HNO/>.
16. Ke Ye, Lek-Heng Lim. Every matrix is a product of Toeplitz matrices. *Found. Comput. Math*. 2016. Vol. 16, Iss. 3. P. 577–598. <https://doi.org/10.1007/s10208-015-9254-z>.

17. Cichocki A., Mandic D., De Lathauwer L., Zhou G., Zhao Q., Caiafa C., Phan A.-H. Tensor decompositions for signal processing applications (From two-way to multiway component analysis). *IEEE Signal Processing Magazine*. 2015. Vol. 32, Iss. 2. P. 145–164.
18. Kolda T., Bader B. Tensor decompositions and applications. *SIAM Review*. 2009. Vol. 51, N 3. P. 455–500.
19. Mørup M. Applications of tensor (multiway array) factorizations and decompositions in data mining. *Wiley Interdisc. Rev.: Data Mining and Knowledge Discovery*. 2011. Vol. 1, N 1. P. 24–40.
20. Van Loan C.F., Pitsianis N. Approximation with Kronecker products. In: *Linear Algebra for Large Scale and Real-Time Applications. NATO ASI Series (Series E: Applied Sciences)*. Moonen M.S., Golub G.H., De Moor B.L.R. (Eds). Kluwer Academic Publishers, 1993. P. 293–314.
21. Van Loan C. The ubiquitous Kronecker products. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2000. Vol. 123. P. 85–100.
22. Irani M., Anandan P. Factorization with Uncertainty. Department of computer science and applied mathematics. The Weizmann Institute of Science, Rehovot 76100, Israel Microsoft Corporation, One Microsoft Way, Redmond, WA 98052, USA.
23. Klir G.J., Bo Yuan. Fuzzy sets and logic: theory and applications. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall PTR, 1995. 592 p.

Надійшла до редакції 22.06.2018

**Ю.М. Мінаєв, О.Ю. Філімонова, Ю.І. Мінаєва, Г.О. Філімонов**  
**НЕЧІТКА МАТЕМАТИКА ЗА ОБМЕЖЕНИХ МОЖЛИВОСТЕЙ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ НАЛЕЖНОСТІ**

**Анотація.** Розглянуто розв’язування задач в умовах невизначеності у формі нечіткої математики на підставі методів і моделей теорії нечітких множин за обмежених можливостей визначення функції належності. Запропоновано метод розв’язання задач подібного типу, який полягає у визначенні прихованих знань у вигляді підмножин упорядкованих пар, обчислених з використанням сингулярної декомпозиції спеціальних (теплицевих, ганкелевих та ін.) матриць, сформованих на основі універсальної множини. Наведено приклади, що ілюструють ефективність запропонованого методу.

**Ключові слова:** нечітка множина, тензорна декомпозиція, нечітка математика, спеціальні матриці.

**Yu.N. Minaev, O.Yu. Filimonova, J.I. Minaeva, G.A. Filimonov**  
**FUZZY MATHEMATICS UNDER LIMITED POSSIBILITIES OF ASSIGNMENT OF MEMBERSHIP FUNCTIONS**

**Abstract.** We consider solution of problems under uncertainty in the form fuzzy of mathematics on the basis of methods and models of fuzzy set theory under limited possibilities of definition (assignment) of membership functions. We propose a method to solve such kind of problems, which defines hidden knowledge as subsets of ordered pairs computed with the use of singular value decomposition of special (Toeplitz, Hankel, and other’s) matrices formed on the basis of universal set. We present examples that illustrate the efficiency of the proposed method.

**Keywords:** fuzzy set, tensor decomposition, fuzzy mathematics, special matrices.

**Минаєв Юрій Николаевич,**  
 доктор техн. наук, професор, професор кафедри Інститута інформаційних комп’ютерних технологій Національного авіаційного університету, Київ, e-mail: min\_14@ukr.net.

**Філімонова Оксана Юрьевна,**  
 кандидат техн. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету будівництва і архітектури, e-mail: filimonova1209@ukr.net.

**Минаєва Юлія Ивановна,**  
 кандидат техн. наук, доцент, доцент кафедри Київського національного університету будівництва і архітектури, e-mail: jumin@bigmir.net.

**Філімонов Георгій Александрович,**  
 аспірант Київського національного університету будівництва і архітектури, e-mail: georgfill93@gmail.com.