УДК 519.816

В.Ф. ИРОДОВ, Р.В. БАРСУК, Г.Я. ЧЕРНОМОРЕЦ

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ ЭВОЛЮЦИОННОМ ПОИСКЕ С БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ ВЫБОРА

Аннотация. Рассмотрена задача многокритериальной оптимизации, в которой вместо оптимизируемых функций использованы бинарные отношения выбора. Для решения такой задачи предложен алгоритм эволюционного случайного поиска, в котором вместо функции выбора в виде предпочтения используется функция выбора в виде блокировки. Проанализирована сходимость предлагаемых эволюционных алгоритмов и для нее сформулированы достаточные условия. Сопоставлены результаты предложенного эволюционного поиска и известных эволюционных алгоритмов для одной тестовой задачи.

Ключевые слова: эволюционный поиск, многокритериальная оптимизация, бинарные отношения выбора.

ВВЕДЕНИЕ

В теории принятия решений особенно важны бинарные отношения выбора [1]. Вычислительные методы теории принятия решений, в которых задачи поиска последних формулируются в терминах бинарных отношений, рассмотрены в [2]. Здесь также приведено обобщение задач нелинейного программирования с помощью бинарных отношений выбора в задачи обобщенного математического программирования.

В настоящее время интенсивно развиваются эволюционные и генетические алгоритмы для задач поиска решений, например, в [3–5] они применяются для решения задач многокритериальной оптимизации. В эволюционных алгоритмах при решении указанных задач рассматривается оптимизация действительных функций, а не бинарных отношений выбора, что безусловно минимизирует возможность использования подобных алгоритмов в задачах теории принятия решений.

Алгоритм эволюционного поиска с несколькими ветвями эволюции решений реализован в [6, 7], для решений с бинарными отношениями выбора — в [8, 9]. Наконец, в [10] показана возможность использования подобных алгоритмов для поиска максимальных, а не наибольших элементов по отношению выбора при наличии нескольких критериев.

Далее рассматривается построение эволюционных алгоритмов для поиска максимальных элементов по многокритериальному бинарному отношению выбора.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ С БИНАРНЫМИ ОТНОШЕНИЯМИ ВЫБОРА

Обозначим $x = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, $x \in \Omega$, совокупность параметров принятия решений. На множестве Ω определены бинарные отношения выбора $R_{s1}, R_{s2}, \ldots, R_{s\xi}, \ldots, R_{s\eta}$. Запись $xR_{s\xi}\, y$ означает, что элемент x предпочтительнее y.

Рассмотрим совместное бинарное отношение вида

$$xR_s\, y \Leftrightarrow (xR_{s1}\, y) \wedge (xR_{s2}\, y) \wedge \ldots \wedge (xR_{s\xi}\, y). \tag{1}$$

Для отношений $R_{s\xi}$ предполагаем, что любые два элемента: x, y, из Ω сопоставимы, т.е. имеет место $(xR_{s\xi}\, y) \vee (yR_{s\xi}\, x)$ $\forall x, y \in \Omega$.

Полагаем, что $R_{s\xi}$ являются отношениями нестрогого порядка со свойствами рефлексивности $xR_{s\xi}x \ \forall x \in \Omega$, транзитивности $(xR_{s\xi}y) \wedge (yR_{s\xi}z) \Rightarrow xR_{s\xi}z$ $\forall x, y, z \in \Omega$ и антисимметричности $(xR_{s\xi}y) \wedge (yR_{s\xi}x) \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in \Omega$.

Для совместного отношения R_S (1) будем считать, что в общем случае не все элементы x, y из множества Ω сопоставимы по этому отношению, т.е.

$$\exists x, y \in \Omega, \ (x\overline{R_s}y) \wedge (y\overline{R_s}x). \tag{2}$$

Именно такой общий случай многокритериальной оптимизации описан далее.

Для простоты изложения, не уменьшая общности, будем рассматривать совместное отношение R_S из двух отношений выбора в виде:

$$xR_s y \Leftrightarrow (xR_{s1}y) \wedge (xR_{s2}y). \tag{3}$$

Нетрудно убедиться, что если элементы x, y, z сопоставимы по отношению R_S, то на подмножестве Ω' из Ω для этих элементов отношение будет иметь свойства рефлексивности (если $xR_{s1}x \wedge xR_{s2}x$, то $xR_s x$), транзитивности (если $[xR_{s1}y \wedge xR_{s2}y] \wedge [yR_{s1}z \wedge yR_{s2}z]$, то $xR_{s1}z \wedge xR_{s2}z$, т.е. $xR_s z$) и антисимметричности (если $(xR_s y) \wedge (yR_s x)$, то $[(xR_{s1}y) \wedge (xR_{s2}y)] \wedge [(yR_{s1}x) \wedge (yR_{s2}x)] \Rightarrow x = y$).

В силу условия (2) не имеет смысла поиск наиболее предпочтительного элемента по отношению R_S на множестве Ω.

Пусть X — некоторое подмножество из Ω, $X \subset \Omega$. Рассмотрим функцию выбора на множестве X в виде функции блокировки

$$S^{R_S}(X) = \{x \in X \mid \forall y \in [X \setminus S^{R_S}(X)], \ y\overline{R}_S x\}. \tag{4}$$

В состав элементов функции блокировки входят элементы, для которых не существует более предпочтительных элементов по отношению выбора R_S вида (3) из числа элементов, не вошедших в состав функции блокировки.

Будем считать, что для функции блокировки (4) имеет место последовательность функций блокировки

$$S_1^{R_S}(X), S_2^{R_S}(X), \ldots, S_l^{R_S}(X), \ldots \tag{5}$$

такая, что

$$S_1^{R_S}(X) \subset S_2^{R_S}(X) \subset \ldots \subset S_l^{R_S}(X), \ldots \tag{6}$$

Обозначим X_0 такое множество $X_0 \subset \Omega$, что

$$x\overline{R}_S x_0 \ \ \forall x_0 \in X_0, \ \forall x \in X \setminus X_0. \tag{7}$$

Множество X_0 будем называть решением задачи оптимизации по отношению выбора R_S.

Имеет место

$$S_j^{R_S}(X) \subset X_0 \ \ \forall j = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Для решения задачи оптимизации по отношению выбора R_S используем алгоритм эволюционного поиска

$$X_k = S^{R_S}(G(X_{k-1})), \ k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

где X_k — множество решений k-го шага итерации, $S^{R_S}(X)$ — функция выбора в виде функции блокировки (4), $G(X)$ — функция генерации:

$$G(X) = X \cup G_n(X). \tag{10}$$

Здесь $G_n(X)$ — множество новых решений, которые порождены нечетким отношением генерации R_G с функцией принадлежности $\mu(y, x)$: $\Omega \times \Omega \to [0, 1]$:

$$G_n(X) = \{y \in \Omega \mid \exists x \in X,\ yR_G x,\ \mu_{R_G}(x, y) > 0\}. \tag{11}$$

Для функции генерации будем предполагать следующее. Если $x_n \in G_n(X)$, то

$$P\{x_n \in S_l^{R_S}(X)\} \geq \delta > 0 \quad \forall\, l = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

где δ — допустимая погрешность выполнения условия (12), x_n — новое решение.

Под сходимостью последовательности X_k к решению X_0 такому, что имеет место (7), будем понимать следующее. Какой бы ни был порядковый номер l для последовательности $S_l^{R_S}(X)$ из (5), соответствующей (6) и (8), найдется такой номер K, что для всех $k \geq K$ будет выполняться $X_k \subset S_l^{R_S}(X)$.

Рассмотрим такие алгоритмы эволюционного поиска, в которых функции генерации и выбора содержат конечное число элементов: $G(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_{N_л}, \ldots, x_{N_э}\}$, где $N_э$ — количество элементов (возможных решений) в составе функции генерации, и $S_l^{R_S}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_{N_л}\}$, где $N_л$ — количество элементов (лучших решений) в составе функции выбора.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Если последовательность функций блокировки (5) имеет свойство (6), функции генерации (10), (11) — свойство (12), а бинарные отношения R_{s1} и R_{s2} являются отношениями нестрогого порядка, то алгоритм (9) обеспечивает сходимость последовательности X_k к R_S — оптимальному решению с вероятностью 1.

Если среди $N_л$ выбираемых решений m из них принадлежат $S_l^{R_S}(X)$, то это количество не может уменьшиться на следующих шагах итерации. Поэтому, не уменьшая общности, достаточно доказать, что найдется номер шага итерации, начиная с которого число выбираемых решений, принадлежащих $S_l^{R_S}(X)$, увеличится на единицу.

Представим множество $G(X)$ в виде $G(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_{N_л}, \ldots \ldots, x_{N_э}\}$, где первые m решений принадлежат $S_l^{R_S}(X)$, решения с номерами от $(m+1)$ до $N_л$ входят в число выбираемых решений, но еще не принадлежат $S_l^{R_S}(X)$; решения с номерами от $N_л + 1$ до $N_э$ — вновь генерируемые решения.

Обозначим A_{k+1} событие, когда ни одно новое решение на $(k+1)$-м шаге итерации не принадлежит $S_l^{R_S}(X)$. В силу условия (12) имеем для вероятности $P(A_{k+1}) \leq (1-\delta)^{N_э - N_л}$.

Аналогично обозначим A_{k+2} событие, когда ни одно новое решение на $(k+2)$-м шаге итерации не принадлежит $S_l^{R_S}(X)$. Имеем для вероятности $P(A_{k+2}) \leq (1-\delta)^{N_э - N_л}$.

Далее, обозначим B_{k+1} событие, когда число выбранных решений, которые принадлежат $S_l^{R_S}(X)$, не увеличится на единицу на $(k+1)$-м шаге итерации. Имеем для вероятности $P(B_{k+1}) = P(A_{k+1}) \leq (1-\delta)^{N_э - N_л}$.

Аналогично, рассматривая события $B_{k+2}, B_{k+3}, \ldots, B_{k+n}$, получаем для вероятностей:

$$P(B_{k+2}) = P(A_{k+2}) \cdot P(B_{k+1}) \le (1-\delta)^{2(N_э - N_л)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P(B_{k+n}) = P(A_{k+n}) \cdot P(B_{k+n-1}) \le (1-\delta)^{n(N_э - N_л)}.$$

Исследуя ряд из вероятностей этих событий

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_{k+n}) \le \sum_{n=1}^{\infty} (1-\delta)^{n(N_э - N_л)} < \infty, \tag{13}$$

убеждаемся, что он сходится при $N_э \ge N_л + 1$.

Из сходимости ряда (13) в силу теоремы Бореля–Кантелли следует, что с вероятностью 1 наступает лишь конечное число событий из B_{k+n}, т.е. найдется номер N, для которого число решений, принадлежащих $S_l^{R_S}(X)$, увеличится на единицу, что доказывает утверждение 1.

Рассмотрим следующую модификацию алгоритма (9):

$$X_{jk} = S^{R_S}(G(X_{jk-1})),\ k = 1, 2, \dots,\ j = 1, 2, \dots, N_в, \tag{14}$$

где X_{jk} — множество решений k-го шага итерации для j-й ветви эволюционного поиска, $N_в$ — общее количество ветвей эволюционного поиска, $S^{R_S}(X)$ — функция выбора в виде функции блокировки (4), $G(X)$ — функция генерации.

Утверждение 2. Если последовательность функций блокировки (5) имеет свойство (6), функции генерации (10), (11) — свойство (12), а бинарные отношения R_{s1} и R_{s2} являются отношениями нестрогого порядка, то эволюционный алгоритм (14) обеспечивает сходимость последовательностей X_{jk} к R_S — оптимальному решению X_0 с вероятностью 1 для всех ветвей эволюционного поиска $j = \overline{1, N_в}$.

Действительно, доказательство утверждения 1 можно рассматривать как справедливость утверждения 2 для некоторого произвольного номера ветви эволюционного поиска j. Это означает, что найдутся номера $K_1, K_2, \dots, K_{N_в}$ такие, что при порядковом номере $k \ge K_1$, $k \ge K_2, \dots, k \ge K_{N_в}$ будут выполняться условия принадлежности выбранных решений $X_{1k} \subset S_l^{R_S}(X)$, $X_{2k} \subset S_l^{R_S}(X), \dots$ $\dots, X_{N_в k} \subset S_l^{R_S}(X)$. Тогда, выбирая порядковый номер $K = \max\{K_1, K_2, \dots$ $\dots, K_{N_в}\}$, получаем, что при $k \ge K\ \forall j = \overline{1, N_в}$ будет выполняться $X_{jk} \subset S_l^{R_S}(X)$, что доказывает утверждение 2.

Утверждения 1 и 2, которые относятся к алгоритмам эволюционного поиска вида (9) и (14), дают достаточные условия сходимости к оптимальному решению. При конкретизации функции генерации получим конкретный вид этих алгоритмов. Далее рассмотрим случай, когда $\Omega \subset R^n$.

Пусть на некотором шаге итерации эволюционного поиска решения, выбранные для всех его ветвей, имеют вид $\{x_{lj}^i\}$, где i $(i = \overline{1, n})$ — порядковый номер переменной l-го $(l = \overline{1, N_л})$ выбранного решения в j-й $(j = \overline{1, N_в})$ ветви эволюции решений. Можно оценить средние значения переменных всех выбранных решений по известной формуле

$$x_0^i = \frac{1}{N_в N_л} \sum_{j=1}^{N_в} \sum_{l=1}^{N_л} x_{lj}^i. \tag{15}$$

Затем можно вычислить эмпирические дисперсии

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{N_{\text{в}} N_{\text{л}} - 1} \sum_{j=1}^{N_{\text{в}}} \sum_{l=1}^{N_{\text{л}}} (x_{lj}^i - x_0^i)^2. \tag{16}$$

На следующем шаге итерации генерация новых решений проводится по нормальному закону для каждой переменной x^i с центрами в точках x_{lj}^i, $l = \overline{1, N_{\text{л}}}$, $j = \overline{1, N_{\text{в}}}$, и дисперсией σ_i^2. Иными словами, функция принадлежности μ_{R_G} нечеткого отношения генерации является функцией плотности нормального распределения:

$$\mu_{R_G}(y^i, x^i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y^i - x^i}{\sigma_i}\right)^2\right]. \tag{17}$$

Утверждение 3. Если последовательность функций блокировки (5) имеет свойство (6), генерация решений (11), (12) проводится по нормальному закону с учетом (15)–(17), отношения выбора R_{s1} и R_{s2} нестрого порядка, то эволюционный алгоритм (10) обеспечивает сходимость последовательностей X_{jk} в евклидовом подпространстве к R_S (оптимальному решению X_0) с вероятностью 1 для всех ветвей эволюционного поиска $j = \overline{1, N_{\text{в}}}$.

Доказательство последнего утверждения очевидно, так как для ограниченного евклидового подпространства будут выполняться условия (12).

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для иллюстрации работы алгоритма решена тестовая задача многокритериальной оптимизации [11], результаты которой сопоставлены с результатами известных эволюционных и генетических алгоритмов

$$\min(f_1(x^1), f_2(x^1, x^2, \ldots, x^m)),$$

$$f_1 = x^1,$$

$$g(x^2, \ldots, x^m) = 1 + 9 \cdot \sum_{i=2}^{m} \frac{x^i}{(m-1)},$$

$$f_2(f_1, g) = 1 - \sqrt{\frac{f_1}{g}},$$

$$x^i \in [0, 1], \; i = 1, \ldots, m, \; m = 30.$$

Для расчета использовались такие параметры поиска: ветви эволюции — 3, генерируемые решения в каждой ветви на одном шаге итерации — 15, выбираемые решения в каждой ветви на одном шаге итерации — 2. Для примера на рис. 1 количество итераций — 115, что соответствует 23000 вычислений функций с наилучшим приближением к фронту Парето.

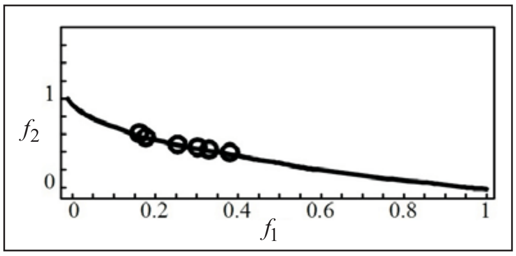

Рис. 1. Результаты решения тестовой задачи: сплошная линия — фронт Парето; **о** — предложенный алгоритм эволюционного случайного поиска с функцией выбора в виде блокировки

В [11] представлены решения этой тестовой задачи с помощью других алгоритмов многокритериальной оптимизации, а именно эволюционного многокритериального алгоритма (Fonseca and Fleming), генетического алгоритма (Horn and Nafpliotis; Deb and Goldberg), генетического алгоритма на основе взвешенной суммы (Hajela and Lin); генетического алгоритма векторной оценки (Kursawe and Schwefel); генетического алгоритма недоминантной сортировки (Srinivas and Deb); усиленного эволюционного алгоритма Парето (Zitzler and Thiele). Для всех алгоритмов, приведенных в [11], количество итераций превышало 25000 при худшем приближении к фронту Парето.

Представленный пример показывает достаточно высокую эффективность приведенного алгоритма, хотя и является частным случаем отношения выбора — по величине действительных функций. Очевидно, более интересно решение задач общего вида — с бинарными отношениями выбора.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена многокритериальная оптимизация при наличии бинарных отношений выбора, сформулирована задача поиска максимального элемента на допустимом множестве решений. Составным бинарным отношением является логическая связка в виде конъюнкции из бинарных исходных отношений. Для поиска численных решений предложен алгоритм эволюционного поиска с несколькими ветвями эволюции. Для решения данной задачи в эволюционном алгоритме использована функция выбора в виде функции блокировки. Проанализирована сходимость рассматриваемых эволюционных алгоритмов к максимальному элементу решения многокритериальной задачи. Показано, что при достаточно общих свойствах для функций генерации и выбора предлагаемые алгоритмы эволюционного поиска обеспечивают сходимость процесса к максимальному элементу многокритериальной задачи с вероятностью 1 по всем ветвям эволюции решений. Описан один из возможных способов построения функции генерации при поиске решения в евклидовом пространстве, который удовлетворяет требуемым условиям сходимости алгоритмов. Для иллюстрации работы алгоритма приведены численные результаты решения тестовой задачи многокритериальной оптимизации, в качестве которой выбран частный случай оптимизации действительных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзезман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 240 с.
2. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений. Москва: Наука, 1989. 320 с.
3. Lemarchand L., Massé D., Rebreyend P., Håkansson J. Multiobjective optimization for multimode transportation problems. *Advances in Operations Research*. 2018. Vol. 2018. Article ID 8720643. 13 p. https://doi.org/10.1155/2018/8720643.
4. Sagawa M., Kusuno N., Aguirre H., Tanaka K., Koishi M. Evolutionary multiobjective optimization including practically desirable solutions. *Advances in Operations Research*. 2017. Vol. 2017. Article ID 9094514. 16 p. https://doi.org/10.1155/2017/9094514.
5. Giagkiozis I., Fleming P.J. Pareto front estimation for decision making. *Evolutionary Computation*. 2014. Vol. 22, N 4. P. 651–678.
6. Irodov V.F., Maksimenkov V.P. Application of an evolutionary program for solving the travelling-salesman problem. *Sov. Autom. Control*. 1981. Vol. 14, N 4. P. 7–10.
7. Irodov V.F. The construction and convergence of evolutional algorithms of random search for self-organization. *Sov. J. Autom. Inf. Sci*. 1987. Vol. 20, N 4, P. 32–41.
8. Irodov V. Self-organization methods for analysis of nonlinear systems with binary choice relations. *System Analysis Modeling Simulation*. 1995. Vol. 18–19. P. 203–206.
9. Irodov V.F., Khatskevych Yu.V. Convergence of evolutionary algorithms for optimal solution with binary choice relations. *Строительство. Материаловедение. Машиностроение. Сер: Энергетика, экология, компьютерные технологии в строительстве*. 2017. Вып. 98. С. 91–96.

10. Чорноморець Г.Я., Иродов В.Ф. Застосування багатокритеріального відбору при пошуку рішень у задачах аналізу та синтезу з трубчастими газовими нагрівачами у будівельних конструкціях. *Строительство, материаловедение, машиностроение: сб. науч. тр*. 2015. Вып. 84: Энергетика, экология, компьютерные технологии в строительстве. С. 197–202.
11. Zitzler E., Deb K., Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*. 2000. Vol. 8, N 2. P. 173–195.

Надійшла до редакції 31.01.2019

В.Ф. Іродов, Р.В. Барсук, Г.Я. Чорноморець

БАГАТОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО ПОШУКУ З БІНАРНИМИ ВІДНОШЕННЯМИ ВИБОРУ

Анотація. Розглянуто задачу багатокритерійної оптимізації, в якій замість оптимізовних функцій використано бінарні відношення вибору. Для розв'язування такої задачі запропоновано алгоритм еволюційного випадкового пошуку, в якому замість функції вибору у вигляді переваги використано функцію вибору у вигляді блокування. Проаналізовано збіжність запропонованих еволюційних алгоритмів і для неї сформульовано достатні умови. Порівняно результати запропонованого еволюційного пошуку і відомих еволюційних алгоритмів для однієї тестової задачі.

Ключові слова: еволюційний пошук, багатокритерійна оптимізація, бінарні відношення вибору.

V.F. Irodov, R.V. Barsuk, H.Ya. Chornomorets

MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION AT EVOLUTIONARY SEARCH WITH BINARY CHOICE RELATIONS

Abstract. A multi-objective optimization problem is considered, in which binary choice relations are used instead of optimized functions. To solve this problem, it is proposed to use an evolutionary random search algorithm, in which instead of the choice function in the form of preference, the function of choice in the form of a lock is used. The convergence of the proposed evolutionary algorithms is analyzed, and sufficient conditions for convergence are formulated. The results of the proposed evolutionary search are compared with the results of well-known evolutionary algorithms for one test problem.

Keywords: evolutionary search, multi-objective optimization, binary choice relations.

Иродов Вячеслав Федорович,
доктор техн. наук, профессор кафедры Государственного высшего учебного заведения «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры» МОН Украины, Днепр, e-mail: vfirodov@i.ua.

Черноморец Галина Яковлевна,
кандидат техн. наук, доцент кафедры Государственного высшего учебного заведения «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры» МОН Украины, Днепр, e-mail: ChHYa@i.ua.

Барсук Роман Владимирович,
ассистент кафедры Государственного высшего учебного заведения «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры» МОН Украины, Днепр, e-mail: Igortrustimater@gmail.com.