УДК 519.85

Л.Н. КОЛЕЧКИНА, А.Н. НАГОРНАЯ

РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ДРОБНО-КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕЛИ НА МНОЖЕСТВЕ ПЕРЕСТАНОВОК

Аннотация. Рассматривается формулировка задачи с дробно-квадратичной функцией цели на множестве перестановок. Представлен алгоритм ее решения, который заключается в преобразовании дробно-квадратичной функции в систему двух функционалов. Решение данных функционалов обеспечивает нахождение оптимального решения задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: условная оптимизация, дробно-квадратичная функция, множество перестановок, транспозиция элементов, множество допустимых решений, множество опорных решений, оптимальное решение.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в области исследования различных классов комбинаторных моделей, разработки новых методов их решения большое внимание уделяется методам, основанным на использовании структурных свойств комбинаторных множеств [1–4]. Изучение свойств комбинаторных множеств тесно связано с теорией многогранников и графов [5–10]. Использование информации о структуре выпуклой оболочки допустимых решений — многогранников, является основой для разработки многих методов и одним из наиболее успешных на сегодняшний день подходов к решению задач комбинаторной оптимизации [11–17]. Но при решении таких задач возникают проблемы, связанные со сложностью математических моделей, большим объемом информации и т.д.

Прикладные задачи, которые моделируются экстремальными дискретными задачами, часто имеют большую размерность, поэтому являются достаточно сложными с вычислительной точки зрения. Сложность задачи во многом зависит от входных данных, а именно от набора целевых функций, дополнительных ограничений, комбинаторного множества [5]. В связи с этим особый интерес представляют задачи с дробно-квадратичными функциями. Дробно-квадратичные критерии часто применяются в области финансовой деятельности, что иллюстрируют следующие примеры: планирование деятельности корпораций, где необходимо минимизировать отношение долга к собственным средствам, максимизировать отношение выпуска продукции на одного работающего; управление статьями банковского баланса, где минимизируется отношение рискованных вложений к капиталу, максимизируется отношение реального капитала к требуемому капиталу, отношение иностранных ссуд к суммарным ссудам, отношение закладных на жилье к общей сумме закладных и т.д. Примеры прикладных задач дискретной оптимизации и их свойства рассмотрены в работах [18–25]. Особое внимание в работах [20–22] уделяется исследованию задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и их применению, а в [23–26] описываются задачи с квадратичными функциями цели.

Цель настоящей статьи — построение метода решения задачи оптимизации с дробно-квадратичными целевыми функциями на основании установленной связи свойств комбинаторных множествах, а также с использованием оптимизационных задач на непрерывном допустимом множестве. Изученные свойства комбинаторных множеств, их выпуклых оболочек дают возможность применять классические методы непрерывной оптимизации для решения комбинаторных задач на различных множествах, а также развивать новые оригинальные подходы их решения. Данная статья является продолжением работы [26], где рассматривается эквивалентный метод решения задачи с линейными целевыми функциями на комбинаторном множестве размещений. Статья состоит из двух частей; в первой описывается постановка задачи оптимизации с дробно-квадратичными целевыми функциями и ее свойства; вторая часть посвящена изложению подхода к решению поставленной задачи, рассматриваются численные примеры.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим оптимизационную задачу вида

$$Z(\Phi, P(A)) \colon \max\{\Phi(a) \mid a \in P(A)\}, \tag{1}$$

которая состоит в максимизации $\Phi(a)$ на евклидовом множестве перестановок $P_n(A)$.

Пусть задано мультимножество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$, его основание $S(A) = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, т.е. набор его различных элементов, где $e_j \in R^1$ $\forall j \in N_k$, и кратность элементов

$$k(e_j) = \alpha_j, j \in N_k, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = q.$$

Мультимножество B с основанием $S(B)$ называется подмультимножеством мультимножества A с основанием $S(A)$, если $S(B) \subset S(A)$ и для каждого элемента $a \in S(B)$ выполняется неравенство $k_B(a) \le k_A(a)$ [12].

Упорядоченной n-выборкой из мультимножества A называется набор

$$a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}), \tag{2}$$

где $a_{i_j} \in A$ $\forall i_j \in N_n$, $\forall j \in N_n$, $i_s \ne i_t$, если $s \ne t$ $\forall s \in N_n$, $\forall t \in N_n$.

Определение 1 [12]. Множество перестановок с повторениями из n действительных чисел, из которых k различных, называется общим множеством перестановок и обозначается $P_{nk}(A)$. Оно является множеством упорядоченных n-выборок вида (1) из мультимножества A при условии $n = q > k$.

Определение 2 [12]. При $n = q = k$ имеем множество перестановок без повторений P_n. Очевидно, что $P_n(A) = P_{nk}(A)$. Если конкретно не указан вид множества перестановок, то оно записываются как P_n. Элементами множества перестановок P_n являются упорядоченые наборы $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n символов. Каждый символ входит в набор только один раз и является представителем множества A_i, $i \in N_n$.

Определение 3 [9]. Перестановку $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют лексикографически следующей за $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$, если не существует перестановки $a''_1, a''_2, \ldots, a''_n$ такой, что $(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n) < (a''_1, a''_2, \ldots, a''_n)$ и $(a''_1, a''_2, \ldots, a''_n) < (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Известно [10–12], что выпуклая оболочка множества перестановок является многогранником перестановок $\Pi = \mathrm{conv}P(A)$, множество вершин $P(A)$ которого равно множеству перестановок: $\mathrm{vert}\Pi(A) = P(A)$. Упорядочим элементы мультимножества A в порядке возрастания: $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_q$, а элементы его основания — в порядке убывания: $e_1 < e_2 < \ldots < e_k$. Тогда выпуклая оболочка общего набора перестановок $P(A)$ представляет собой общий многогранник $\Pi(A) = \mathrm{conv}P(A)$, который описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \le \sum\limits_{j=1}^{n} a_j, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} x_{\alpha j} \ge \sum\limits_{j=1}^{i} a_j, \end{cases} \tag{3}$$

$\alpha_j \in N_n, \alpha_j \ne \alpha_t$ $\forall j \ne t, \forall j, t \in N_i$, $\forall i \in N_n$ и $P(A) = \mathrm{vert}\,\Pi(A)$.

Количество транспозиций элементов комбинаторного множества перестановок в многограннике перестановок определяется по формуле

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = p. \tag{4}$$

При отображении множества $P_n(A)$ в евклидово пространство R^n сформулируем задачу максимизации $Z(F, X)$ на множестве X, причем каждой точке $a \in P_n(A)$ будет соответствовать точка $x \in X$ такая, что $\Phi(a) = F(x)$:

$$Z(F, X)\colon \max\{F(x) | x \in X\}, \tag{5}$$

где

$$F(x) = \frac{(c^i, x^2) + c_0^i}{(d^i, x^2) + d_0^i}, \ i \in N_l = \{1, \ldots, l\}, \tag{6}$$

а X — непустое множество в R^n, которое определяется как

$$X = \operatorname{vert} \Pi(A), \ \Pi = \operatorname{conv} P(A).$$

Соответственно максимум дробно-квадратичной функции цели является одной из вершин многогранника перестановки $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$, а вершины многогранника перестановок $P_n(A)$ совпадают с вершинами графа перестановок $G(P_n)$.

СВОЙСТВА ДРОБНО-КВАДРАТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Функция вида $F(x) = \dfrac{Q}{D} = \dfrac{(c^i, x^2) + c_0^i}{(d^i, x^2) + d_0^i}$, $i \in N_l = \{1, \ldots, l\}$, определяемая отношением двух квадратных трехчленов Q и D, является дробно-квадратичной. При этом полагаем, что коэффициенты вещественны и такие, что хотя бы один из коэффициентов c^i, d^i отличен от нуля.

Дробно-квадратичная функция $F(x) = \dfrac{Q}{D} = \dfrac{(c^i, x^2) + c_0^i}{(d^i, x^2) + d_0^i}$, $i \in N_l = \{1, \ldots, l\}$, не является ни вогнутой, ни выпуклой. Однако поверхности уровня любой функции $F(x)$, т.е. множества $L_\alpha = \{x \in R^n | F(x) = \alpha\}$, являются гиперплоскостью.

Любой локальный минимум задачи с дробно-квадратичной функцией цели является при этом глобальным; и если оптимальное решение конечно, то существует крайняя точка многогранника $\prod = M \cap D$, которая является оптимальной. Это условие выполняется, если числитель и знаменатель дробно-квадратичной функции не преобразуется одновременно в нуль для $x \in X$.

Предположим, что

$$(d^i, x^2) + d_0^i > 0 \ \ \forall x \in X.$$

Такое условие существенно упрощает доказательство следующих теорем, поэтому будем считать его выполнимым.

Теорема 1. На любом прямолинейном отрезке, который принадлежит многограннику $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$, дробно-квадратичная функция $F(x)$ изменяется монотонно, если коэффициенты целевой функции упорядочены в числителе по возрастанию или по убыванию.

Теорема 2. Дробно-квадратичная функция $F(x)$ в задаче (5), (6), достигает минимума (максимума) только в вершинах многогранника перестановок $\Pi = \operatorname{conv} P(A)$.

Алгоритм решения включает четыре шага.

Шаг 1. Приведение формулы (6) в систему уравнений

$$F(x)=\frac{Q}{D}=\frac{(c,x^2)+c_0}{(d,x^2)+d_0},\ c,d\in R^n;\, c_0,\, d_0\in R\Rightarrow\begin{cases}Q_{tr}^{F^{\max}},\\ D_{tr}^{Den^{\min}}.\end{cases}\tag{7}$$

Для нахождения оптимального решения (5), (6) необходимо решить задачи $Q_{tr}^{F^{\max}}$ и $D_{tr}^{Den^{\min}}$, используя соответственно функционалы

$$Q=(c,x^2)+c_0,\ c\in R^n;\, c_0\in R,$$

$$D=(d,x^2)+d_0,\ d\in R^n;\, d_0\in R.$$

Шаг 2. Задача 1. Решение $Q_{tr}^{F^{\max}}$ заключается в нахождении точки множества перестановок, полученной при транспозицию элементов данного множества, когда имеем $\max F(x)$.

Согласно формуле (4) количество возможных транспозиций элементов множества перестановок равно p. Далее рассматриваем каждую траспозицию элементов множества перестановок, используя функционал Q:

$$x_1\leftrightarrow x_i\ (i=2,\ldots,k):$$

$$x_1\leftrightarrow x_2:\ Q_{12}=(x_1-x_2)(a_{12}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{k2}x_k);$$

$$x_1\leftrightarrow x_3:\ Q_{13}=(x_1-x_3)(a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{k3}x_k);$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$x_1\leftrightarrow x_k:\ Q_{1k}=(x_1-x_k)(a_{1k}x_1+a_{2k}x_2+\ldots+a_{1k}x_k);\tag{8}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$x_2\leftrightarrow x_k\ (i=3,\ldots,k):\ Q_{2k}=(x_2-x_k)(a'_{1k}x_1+a'_{2k}x_2+\ldots+a'_{2k}x_k);$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$x_{k-1}\leftrightarrow x_k:\ Q_{k-1k}=(x_{k-1}-x_k)(a'_{1k-1}x_1+a'_{2k-1}x_2+\ldots+a'_{kk-1}x_{k-1}+a'_{kk-1}x_k).$$

Дополнительные ограничения формируем на основании формул (8):

$$x_{k-1}\leftrightarrow x_k,\ \max Q_{k-1k}=(x_{k-1}-x_k)(a'_{1k-1}x_1+a'_{2k-1}x_2+\ldots a'_{kk-1}x_{k-1}+a'_{kk-1}x_k):$$

$$\begin{cases}x_1>(<)x_2,\\ x_1>(<)x_3,\\ \ldots\\ x_1>(<)x_k,\\ x_2>(<)x_3,\\ \ldots\\ x_{k-1}<(>)x_k.\end{cases}\tag{9}$$

Рассмотрев все транспозиции, формируем подмножество допустимых решений

$$Z_{q_i}^{tr}=Z_{q_1}^{tr}\cup Z_{q_2}^{tr}\cup\ldots\cup Z_{q_n}^{tr},\ n\in N=[1,\ldots,p].\tag{10}$$

Для каждой точки подмножества находим значение числителя Num_{q_n} и функции цели F_{q_n}. Далее выбираем точку подмножества при $\max F_{q_n}$ и вычисляем значение знаменателя в данной точке $\mathrm{Den}_{q_i}^{\max}$.

Таким образом, находим первое опорное решение $x_{\max}^{Q}$:

$$\max F_{q_n}(x_{\max}^{Q}),\ \mathrm{Den}_{q_n}^{\max}(x_{\max}^{Q}),\ \mathrm{Num}_{q_n}^{\max}(x_{\max}^{Q}).$$

Шаг 3. Задача 2. Для решения $D_{tr}^{Den^{\min}}$ необходимо найти точку множества перестановок, полученную при транспозиции элементов $P_n(A)$, при которой значение знаменателя Den_{d_i} будет минимальным.

Аналогично шагу 2 количество возможных транспозиций элементов множества перестановок равно p. Каждую траспозицию элементов множества перестановок рассматриваем согласно (8), используя при этом функционал (9).

При нахождении минимального значения знаменателя $x_{k-1} \leftrightarrow x_k$, $\min D_{k-1k} = (x_{k-1} - x_k)(a'_{1k-1}x_1 + a'_{2k-1}x_2 + \ldots a'_{kk-1}x_{k-1} + a'_{kk-1}x_k)$ необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_1 > x_3, \\ \ldots \\ x_1 > x_k, \\ x_2 > x_3, \\ \ldots \\ x_{k-1} > x_k, \\ x_i \to \max, \\ x'_i \to \min; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < x_2, \\ x_1 < x_3, \\ \ldots \\ x_1 < x_k, \\ x_2 < x_3, \\ \ldots \\ x_{k-1} < x_k, \\ x_i \to \min, \\ x'_i \to \max. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда подмножество допустимых решений имеет вид

$$Z_{d_i}^{tr} = Z_{d_1}^{tr} \cup Z_{d_2}^{tr} \cup \ldots \cup Z_{d_n}^{tr},\ n \in N = [1, \ldots, p]. \tag{12}$$

Для каждой точки подмножества находим значение знаменателя Den_{d_n}, выбираем наименьшее из них и вычисляем значения числителя в данной точке $x_{\min}^{D}$:

$$\mathrm{Den}_{d_i}^{\min}(x_{\min}^{D}),\ \mathrm{Num}_{d_i}^{\min}(x_{\min}^{D}).$$

Шаг 4. Находим оптимальное решение. Следует отметить, что при решении задач на шагах 2, 3 множеством допустимых решений является $P_n(A)$, поэтому подмножества $Z_{d_i}^{tr}$ и $Z_{q_i}^{tr}$ могут иметь в своем наборе одинаковые точки.

Для дальнейшего поиска решений необходимо исключить из множества $P_n(A)$ подмножества $Z_{d_i}^{tr}$ и $Z_{q_i}^{tr}$, за исключением точки $x_{\max}^{Q}$. Тогда множество допустимых решений будет иметь вид

$$Z^{\sup} = P_n(A) / (Z_{q_{i_1}}^{tr} \cup Z_{d_i}^{tr}) \cup x_{\max}^{Q}. \tag{13}$$

Точка $\forall x_i \in Z^{\sup}$ будет оптимальной при выполнении условий

$$\begin{cases} \Delta\mathrm{Den}(x_i) \le \mathrm{Den}_{q_n}^{\max}(x_{\max}^{Q}) - \mathrm{Den}_{d_n}^{\min}(x_{\min}^{D}), \\ \Delta\mathrm{Num}(x_i) \le \mathrm{Num}_{q_n}^{\max}(x_{\max}^{Q}) - \mathrm{Num}_{d_n}^{\min}(x_{\min}^{D}), \\ \max F(x_i). \end{cases} \tag{14}$$

Первые два неравенства являются достаточными, а третье условие является необходимым для получения оптимальности точки. В случае невыполнения (14) оптимальной будет точка $x^{Q}_{\max}$.

Рассмотрим работу алгоритма на следующем примере.

Пример 1. Найти точку множества перестановок из элементов $A = (1, 2, 3, 4)$, в которой достигается максимальное значение функции

$$\max F(x) = \left(\frac{4x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 11x_4}{-10x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4} \right)^2 .$$

Решение. Представим условие задачи в виде (7):

$$\max F(x) = \frac{Q}{D} = \left(\frac{4x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 11x_4}{-10x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4} \right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{tr}^{F^{\max}} = (4x_1 - 9x_2 + 5x_3 + 11x_4)^2, \\ D_{tr}^{Den^{\min}} = (-10x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 2x_4)^2. \end{cases}$$

Согласно шагу 2 решим задачу 1. Найти точку множества перестановок, полученную транспозицией элементов данного множества, при которой имеем $\max F(x)$, используя функционал $Q_{tr}^{F^{\max}}$.

Согласно формуле (4) количество возможных транспозиций элементов множества перестановок равно шести, т.е. $C_4 = 6$. Рассмотрим первую транспозицию элементов множества перестановок $x_1 \leftrightarrow x_2$, представляя целевую функцию в виде произведения (8):

$$Q_{12} = (x_1 - x_2)(-5x_1 - 5x_2 + 10x_3 + 22x_4).$$

При поиске первого решения необходимо учесть следующие условия (9):

$$\begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_3 > x_1, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Подмножество допустимых решений Z_q^{tr} при рассмотрении данной транспозиции элементов представляется одной точкой: $Z_{12}^{tr} = (x_2, x_1, x_3, x_4) = (2, 1, 3, 4)$.

Находим значение числителя Num_{12} и функции цели F_{12} в данной точке: $\mathrm{Num}_{12}(2, 1, 3, 4) = 3364$, $F_{12}(2, 1, 3, 4) = 23,36$.

Рассмотрим следующую транспозицию элементов множества перестановок $x_1 \leftrightarrow x_3$:

$$Q_{13} = 13(x_1 - x_3)(9x_1 - 18x_2 + 9x_3 + 22x_4).$$

Тогда при поиске решения необходимо учитывать условия

$$\begin{cases} x_3 > x_1, \\ x_2 \to \min, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Аналогично предыдущей транспозиции элементов множества перестановок Z_q^{tr} будет также представляться одной точкой: $Z_{13}^{tr} = (x_2, x_1, x_3, x_4)$. Поскольку $Z_{13}^{tr} = Z_{12}^{tr}$, то данную точку не рассматриваем.

Следующая транспозиция элементов множества перестановок $x_1 \leftrightarrow x_4$:

$$Q_{14} = 7(x_4 - x_1)(15x_1 - 18x_2 + 10x_3 + 15x_4),$$

при этом необходимо учитывать следующие условия:

$$\begin{cases} x_4 > x_1, \\ x_2 \to \min, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Тогда $Z_{14}^{tr} = (x_2, x_1, x_3, x_4) \cup (x_2, x_3, x_1, x_4)$.

Первая точка (x_2, x_1, x_3, x_4) принадлежит Z_{12}^{tr}, поэтому значение числителя Num_{14} и функции цели F_{14} находим только в точке $(x_2, x_1, x_3, x_4) = (3, 1, 2, 4)$: $\mathrm{Num}_{14}(3, 1, 2, 4) = 3249$, $F_{14}(3, 1, 2, 4) = 5{,}1984$.

Аналогично рассматриваем остальные транспозиции элементов множества перестановок.

Следующая транспозиция элементов множества перестановок $x_2 \leftrightarrow x_3$:

$$Q_{23} = 28(x_3 - x_2)(4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 11x_4),$$

при этом необходимо учитывать условия

$$\begin{cases} x_3 > x_2, \\ x_1 > x_3, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Тогда $Z_{23}^{tr} = (x_2, x_3, x_1, x_4)$. Данную точку имеем при транспозиции элементов точки $x_1 \leftrightarrow x_4$.

Рассмотрим следующую транспозицию элементов множества перестановок $x_2 \leftrightarrow x_4$:

$$Q_{24} = 20(x_4 - x_2)(8x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 2x_4);$$

при поиске решения необходимо учесть условия

$$\begin{cases} x_4 > x_2, \\ x_3 \to \max. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет состоять из следующих точек: $Z_{24}^{tr} = (x_1, x_2, x_4, x_3) \cup (x_2, x_1, x_4, x_3) \cup (x_2, x_4, x_1, x_3)$.

Находим значение числителя Num_{24} и функции цели F_{24} в данных точках:

$$\mathrm{Num}_{24}^1(1, 2, 4, 3) = 1521, \ F_{24}^1(1, 2, 4, 3) = 15{,}21,$$

$$\mathrm{Num}_{24}^2(2, 1, 4, 3) = 2704, \ F_{24}^2(2, 1, 4, 3) = 55{,}1837,$$

$$\mathrm{Num}_{24}^2(3, 1, 4, 2) = 2025, \ F_{24}^2(3, 1, 4, 2) = 9.$$

Рассмотрим транспозицию элементов множества перестановок $x_3 \leftrightarrow x_4$:

$$Q_{34} = 6(x_4 - x_3)(8x_1 - 18x_2 + 16x_3 + 16x_4)$$

при условиях

$$\begin{cases} x_4 > x_3, \\ x_2 \to \min. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет состоять из следующих точек: $Z_{34}^{tr} = (x_2, x_3, x_4, x_1) \cup (x_2, x_3, x_1, x_4) \cup (x_2, x_1, x_3, x_4)$. Поскольку две последние точки были рассмотрены при транспозиции элементов $x_1 \leftrightarrow x_4$, то значение Num_{34} и F_{34} необходимо найти только в точке $(x_2, x_3, x_4, x_1) = (4, 1, 2, 3)$: $\mathrm{Num}_{34}(4, 1, 2, 3) = 2500$, $F_{34}(4, 1, 2, 3) = 2,29$.

Таким образом, наибольшее числовое значение F_{24} получаем при транспозиции элементов множества перестановок $x_2 \leftrightarrow x_4$, т.е. в точке $(2, 1, 4, 3)$: $\mathrm{Num}_{24}^2(2, 1, 4, 3) = 2704$, $F_{24}^2(2, 1, 4, 3) = 55,1837$. Вычисляем числовое значение знаменателя в данной точке: $\mathrm{Den}_{24}^2(2, 1, 4, 3) = 49$.

Согласно шагу 3 решим задачу 2. С использованием функционала $D_{tr}^{Den^{\min}}$ найти точку множества перестановок, при которой значение знаменателя Den_{d_i} минимально.

Рассмотрим транспозицию элементов множества перестановок $x_1 \leftrightarrow x_2$:

$$D_{12} = 17(x_1 - x_2)(3x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4);$$

при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_1 > x_2, \\ x_3 \to \max, \\ x_4 \to \min; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < x_2, \\ x_3 \to \min, \\ x_4 \to \max. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет состоять из следующих точек: $Z_{12}^{tr} = (x_4, x_2, x_1, x_3) \cup (x_3, x_1, x_2, x_4)$. Находим значение знаменателя Den_{12} в данных точках: $\mathrm{Den}_{12}^1(3, 2, 4, 1) = 36$, $\mathrm{Den}_{12}^2(2, 3, 1, 4) = 16$.

Проводим аналогичные вычисления для остальных транспозиций элементов множества. Для $x_1 \leftrightarrow x_3$: $D_{13} = 13(x_1 - x_3)(7x_1 - 14x_2 + 7x_3 + 4x_4)$; при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_1 > x_3, \\ x_2 \to \max; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < x_3, \\ x_2 \to \min. \end{cases}$$

Подмножество допустимых решений будет состоять из следующих точек: $Z_{13}^{tr} = (x_4, x_3, x_1, x_2) \cup (x_3, x_4, x_1, x_2) \cup (x_2, x_1, x_3, x_4) \cup (x_2, x_4, x_1, x_3)$.

Вычисляем значение знаменателя Den_{13} в данных точках: $\mathrm{Den}_{13}^1(3, 4, 2, 1) = 4$, $\mathrm{Den}_{13}^2(3, 4, 1, 2) = 9$, $\mathrm{Den}_{13}^3(2, 1, 3, 4) = 144$, $\mathrm{Den}_{13}^4(3, 1, 4, 2) = 225$.

Для $x_1 \leftrightarrow x_4$: $D_{14} = 16(x_1 - x_4)(6x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 6x_4)$; при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_1 > x_4, \\ x_2 \to \max, \\ x_3 > x_1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 < x_4, \\ x_2 \to \min, \\ x_3 < x_1. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет иметь вид $Z_{14}^{tr} = (x_4, x_1, x_3, x_2) \cup (x_2, x_3, x_1, x_4)$. Вычисляем значение знаменателя Den_{14} в данных точках: $\mathrm{Den}_{14}^1(2, 4, 3, 1) = 225$, $\mathrm{Den}_{14}^2(3, 1, 2, 4) = 625$.

Для $x_2 \leftrightarrow x_3$: $D_{23} = 8(x_2 - x_3)(-10x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 2x_4)$; при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_2 > x_3, \\ x_1 \to \max, \\ x_4 > x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 < x_3, \\ x_1 \to \min, \\ x_4 < x_2. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет иметь вид $Z_{23}^{tr} = (x_3, x_2, x_4, x_1) \cup (x_1, x_4, x_2, x_3)$. Вычисляем значение знаменателя Den_{23} в данных точках: $\text{Den}_{23}^1(4, 2, 1, 3) = 841$, $\text{Den}_{23}^2(1, 3, 4, 2) = 361$.

Для $x_2 \leftrightarrow x_4$: $D_{24} = 9(x_2 - x_4)(-20x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 5x_4)$; при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_2 > x_4, \\ x_1 \to \max, \\ x_3 \to \min; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 < x_4, \\ x_1 \to \min, \\ x_3 \to \max. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет иметь вид $Z_{24}^{tr} = (x_3, x_4, x_2, x_1) \cup (x_1, x_2, x_4, x_3)$. Вычисляем значение знаменателя Den_{24} в данных точках: $\text{Den}_{24}^1(4, 3, 1, 2) = 400$, $\text{Den}_{24}^2(1, 2, 4, 3) = 100$.

Для $x_3 \leftrightarrow x_4$: $D_{34} = 5(x_3 - x_4)(-20x_1 + 14x_2 + x_3 + x_4)$; при поиске решения необходимо учесть два условия:

$$\begin{cases} x_3 > x_4, \\ x_1 \to \max, \\ x_2 \to \min; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 < x_4, \\ x_1 \to \min, \\ x_2 \to \max. \end{cases}$$

Тогда подмножество допустимых решений будет иметь вид $Z_{34}^{tr} = (x_2, x_4, x_3, x_1) \cup (x_1, x_3, x_4, x_2)$. Вычисляем значение знаменателя Den_{34} в данных точках: $\text{Den}_{34}^1(4, 1, 3, 2) = 784$, $\text{Den}_{34}^2(1, 4, 2, 3) = 324$.

Соответственно имеем минимальное значение знаменателя: $\text{Den}_{13}^1(3, 4, 2, 1) = 4$. Вычисляем значение числителя в данной точке: $\text{Num}_{13}^1(3, 4, 2, 1) = 9$.

Таким образом, используя формулы (14), имеем

$$\Delta\text{Num} = \text{Num}_{24}^2(2, 1, 4, 3) - \text{Num}_{13}^1(3, 4, 2, 1), \quad \Delta\text{Num} = 2695,$$

$$\Delta\text{Den} = \text{Den}_{24}^2(2, 1, 4, 3) - \text{Den}_{13}^1(3, 4, 2, 1), \quad \Delta\text{Den} = 45.$$

Следовательно, для нахождения оптимального решения необходимо выполнение условий (14) для числителя и знаменателя на множестве опорных решений Z^{opr}:

$$\begin{cases} \Delta\text{Den}\,(\mathrm{Z}^{opr}) \le 45, \\ \Delta\text{Num}\,(\mathrm{Z}^{opr}) \le 2695. \end{cases}$$

Для нахождения оптимального решения достаточно найти $\Delta\text{Den}\,(\mathrm{Z}^{opr})$ (табл. 1). Согласно табл. 1 Δ Den $(\mathrm{Z}^{opr}) \le 45$ только в точках (1, 2, 3, 4), (2, 4, 1, 3). Следовательно, Δ Num $(\mathrm{Z}^{opr}) \le 2695$ нужно рассматривать только в данных точках: $\Delta\text{Num}\,(1, 2, 3, 4) = 679$, $\Delta\text{Num}\,(2, 4, 1, 3) = 2604$. Оба неравенства выполняются. Находим значения функций $F(1, 2, 3, 4) = 81$, $F(2, 4, 1, 3) = 4$. Также необходимо рассмотреть наибольшее числовое значение F_{24}, полученное при транспозиции элементов множества перестановок $x_2 \leftrightarrow x_4$, т.е. в точке $(2, 1, 4, 3)$:

Таблица 1

Точка множества Z^{opr}	ΔDen(Z^{opr})
(1, 2, 3, 4)	21
(1, 3, 2, 4)	77
(1, 4, 3, 2)	525
(2, 3, 4, 1)	117
(2, 4, 1, 3)	21
(3, 2, 1, 4)	437
(4, 2, 3, 1)	357
(4, 3, 2, 1)	221

$F_{24}^{2}(2, 1, 4, 3) = 55{,}1837$. Следовательно, $\max F(1, 2, 3, 4) = 81$. Таким образом, дробно-квадратичная функция достигает своего максимального значения в точке $(1, 2, 3, 4)$, $\max F(1, 2, 3, 4) = 81$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена и исследована задача оптимизации с дробно-квадратичной функцией на комбинаторном множестве перестановок. Сформулирована математическая модель данной задачи, представлен алгоритм ее решения.

Алгоритм состоит из четырех шагов. На первом шаге дробно-квадратичную функцию необходимо преобразовать в систему функционалов, каждый из которых представляет задачу оптимизации на множестве перестановок. На втором шаге решается первая задача, позволяющая найти первое опорное решение, при котором дробно-квадратичная функция имеет максимальное значение на подмножестве $Z_{q_i}^{tr}$. На третьем шаге решается вторая задача — поиск точки, при которой числовое значение знаменателя принимает наименьшее значение на подмножестве $Z_{d_i}^{tr}$. Следует отметить, что точки множеств допустимых решений формируются при рассмотрении транспозиций элементов множества перестановок с использованием функционалов, которые входят в систему после преобразования дробно-квадратичной функции. По окончании формирования множества допустимых решений подмножества $Z_{q_i}^{tr}$ и $Z_{d_i}^{tr}$ не рассматриваются, за исключением точки $x_{\max}^{Q}$. На четвертом шаге формируются необходимые и достаточные условия нахождения оптимального решения. При невыполнении данных условий точка $x_{\max}^{Q}$ будет оптимальной.

Приведен числовой пример использования представленного алгоритм для нахождения максимального значения дробно-квадратичной функции на множестве перестановок. При решении задачи на множестве на первом шаге было использовано шесть точек множества, на втором использовано 13 точек. На четвертом шаге алгоритма множество допустимых решений состояло из двух точек, которые удовлетворяли достаточным и необходимым условиям. Было найдено единственное оптимальное решение. Это свидетельствует о конечности и эффективности представленного алгоритма.

Дальнейшие исследования будут направлены на адаптацию данного алгоритма к другим комбинаторным множествам и рассмотрение задач условной оптимизации с дробно-квадратичной функцией цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Korte B., Vygen J. Combinatorial optimization: Theory and algorithms. Heidelberg; New York: Springer, 2012. 660 p.
2. Onwubolu G.C., Davendra D. Differential evolution: A handbook for global permutation-based combinatorial optimization. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. 213 p.
3. Pardalos P.M., Du D., Graham R.L. Handbook of combinatorial optimization. New York: Springer, 2013. 648 p.

4. Gulianitsky L.F., Sergienko I.V. Meta-evolutionary method of deformed polyhedron in combinatorial optimization. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 44, N 6. P. 70–79.
5. Донец Г.А., Сергиенко И.В. Метод моделирования структуры исходных данных и подклассы разрешаемых задач комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 1. С. 3–11.
6. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V., Parshin O.V. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N 4. P. 561–567.
7. Яковлев С.В., Гиль Н.И., Комяк В.М., Аристова И.В. Элементы теории геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1995. 241 с.
8. Shor N.Z., Stetsyuk P.I. Lagrangian bounds *п* multiextremal polynomial and discrete optimization problems. *Journal of Global Optimization*. 2002. N 23. P. 1–41.
9. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: ПУЕТ, 2011. 362 с.
10. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.К. Многогранники, графы, оптимизация. Москва: Наука, 1981. 344 с.
11. Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования. Киев: Наук. думка, 1986. 265 с.
12. Стоян Ю.Г., Ємець О.О. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. Київ: ІСДО, 1993. 188 с.
13. Koliechkina L.N., Dvirna O.A. Solving extremum problems with linear fractional objective functions on the combinatorial configuration of permutations under multicriteriality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 4. P. 590–599.
14. Koliechkina L.N., Dvernaya O.A., Nagornaya A.N. Modified coordinate method to solve multicriteria optimization problems on combinatorial configurations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 620–626.
15. Koliechkina L., Pichugina O. Multiobjective optimization on permutations with applications. Destech transactions on computer science and engineering, 2018. P. 61–75. https://doi.org/10.12783/dtcse/optim2018/27922.
16. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задаче оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Проблемы управления и информатики.* 2010. № 2. С. 12–16.
17. Емец О.А., Колечкина Л.Н. Решение задач оптимизации с дробно-линейными целевыми функциями и дополнительными линейными ограничениями на перестановках. *Кибернетика и системный анализ*. 2004. № 3. С. 156–169.
18. Шор Н.З., Соломон Д.И. Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. Кишинев: Штиинца, 1989. 204 с.
19. Сергиенко И.В., Каспшицкая М.Ф. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. Киев: Наук. думка, 1981. 287 с.
20. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. Киев: Наук. думка, 2011. 154 с.
21. Семенова Н.В., Колєчкіна Л.М., Нагірна А.М. Розв'язування задач векторної оптимізації з дробово-лінійними функціями критеріїв на комбінаторній множині полірозміщень. *Наук. вісті Нац. техн. університету України «Київський політехнічний інститут»*. 2009. № 2. С. 53–60.
22. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Об одном подходе к решению векторных задач с дробно-линейными функциями критериев на комбинаторном множестве размещений. *Проблемы управления и информатики.* 2010. № 1. С. 131–144.
23. Koliechkina L., Nahirna A., Dvirna O. Quadratic optimization problem on permutation set with simulation of applied tasks. Proceedings of the Second International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2019). Zaporizhzhia, Ukraine. April 15–19, 2019. P. 651–663. (CEUR Workshop Proceedings, Vol. 2353). URL: http://ceur-ws.org/Vol-2353/paper52.pdf.

24. Burkard R.E. Quadratic assignment problems. In: Pardalos P.M., Du D.–Z., and Graham R.L. (eds.) *Handbook of Combinatorial Optimization.* New York: Springer, 2013. P. 2741–2814. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1_22.

25. Amaral P., Bomze I., Judice J. Copositivity and constrained fractional quadratic problems. *Mathematical Programming*. 2014. Vol. 146. P. 325–350.

26. Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н., Семенов В.В. Метод решения комбинаторной задачи условной оптимизации на комбинаторном множестве размещений. *Проблемы управления и информатики*. 2019. № 4. С. 62–72.

Надійшла до редакції 17.12.2019

Л.М. Колєчкіна, А.М. Нагірна

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНОЇ ЗАДАЧІ З ДРОБОВО-КВАДРАТИЧНОЮ ФУНКЦІЄЮ ЦІЛІ НА МНОЖИНІ ПЕРЕСТАНОВОК

Анотація. Розглянуто формулювання задачі з дробово-квадратичною функцією цілі на множині перестановок. Представлено алгоритм її розв'язання, що полягає у перетворенні дробово-квадратичної функції в систему двох функціоналів. Розв'язування цих функціоналів забезпечує знаходження оптимального розв'язку задачі. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: умовна оптимізація, дробово-квадратична функція, множина перестановок, транспозиція елементів, множина допустимих розв'язків, множина опорних розв'язків, оптимальний розв'язок.

L. Koliechkina, A. Nahirna

SOLUTIONS OF THE COMBINATORIAL PROBLEM WITH A FRACTIONAL-QUADRATIC OBJECTIVE FUNCTION ON THE SET OF PERMUTATIONS

Abstract. The statement of the problem with fractional-quadratic objective function on the set of permutations is considered. An algorithm for its solution is presented, which converts the fractional-quadratic function into a system of two functionals. The solution of these functionals ensures finding the optimal solution to the problem. The results of computational experiments are presented.

Keywords: conditional optimization, fractional-quadratic function, set of permutations, transposition of elements, set of feasible solutions, set of support solutions, optimal solution.

Колечкина Людмила Николаевна,
доктор физ.-мат. наук, профессор Лодзинского университета, Польша, e-mail: lkoliechkina@gmail.com; liudmyla.koliechkina@wmii.uni.lodz.pl.

Нагорная Алла Николаевна,
доцент кафедры Национального университета «Киево-Могилянская академия», e-mail: naghirnaalla@ukr.net.