

**ПРИМЕНЕНИЕ БУФЕРНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПРЕВЫШЕНИЯ
В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НАДЕЖНОСТИ¹**

Аннотация. Предложен подход к решению задачи оптимизации надежности сложных систем с использованием буферной вероятности превышения bPOE. В качестве объекта исследования рассмотрена модель оптимального управления колебаниями шарнирно закрепленной балки со случайными дефектами. Показано, что минимизация bPOE в задачах оптимизации надежности более предпочтительна, чем минимизация классической вероятности превышения критерия безопасности.

Ключевые слова: буферная вероятность превышения bPOE, оптимизация надежности, форма колебаний, дефекты, ошибка аппроксимации.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье описан подход к решению задачи оптимизации надежности сложных систем с использованием буферной вероятности превышения (Buffered Probability of Exceedance, bPOE). В качестве объекта исследования рассмотрена модель оптимального управления колебаниями шарнирно закрепленной балки со случайными дефектами, предложенная в [1, 2].

На этапе проектирования конструкции механического устройства для возбуждения и формирования волнового движения возникает проблема оптимального выбора его параметров. Такие устройства можно использовать для генерации, преобразования и передачи информации (и в более общем смысле для передачи энергии волн). Возбуждение колебаний происходит под воздействием нескольких внешних периодических сил. Главная цель на этапе проектирования — выбор таких параметров конструкции, которые обеспечат режим колебания, наиболее близкий к заданному, на протяжении длительного времени эксплуатации этого устройства.

В [1] рассмотрена простейшая детерминированная математическая модель такого устройства, описывающая управляемое возбуждение колебаний однородной шарнирно закрепленной балки без дефектов, и разработан полуаналитический метод решения оптимизационной задачи определения количества сил и их характеристик, которые обеспечивают желаемую форму колебаний с заданной точностью. В качестве функции цели использована ошибка аппроксимации, определяемая как среднеквадратическое отклонение моделируемой формы колебаний от желаемой. В [2] предложена более общая детерминированная математическая модель, в которой учитывается наличие дефектов на поверхности балки.

При моделировании колебания балки с дефектом в [2] проанализирован характер зависимости ошибки аппроксимации от величины дефекта, его локализации на балке и количества приложенных сил. Показано, что в зависимости от параметров дефекта оптимальное значение ошибки аппроксимации может существенно (вплоть до двух порядков) превышать этот показатель, полученный без учета дефектов. Таким образом, недооценка влияния дефектов на эффективность работы конструкции может привести к большим потерям при ее промышленной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского офиса аэрокосмических исследований и развития (European Office of Aerospace Research and Development), грант EOARD #: 16IOE094/STCU #: P695.

эксплуатации. Поскольку на этапе проектирования не имеется информации о количестве и параметрах дефектов, которые появятся в будущем в процессе эксплуатации конструкции, возникла необходимость в разработке стохастической версии модели, учитывающей, что их возникновение случайно.

В классической постановке стохастическая задача оптимального управления колебаниями шарнирно закрепленной балки со случайными дефектами состоит в выборе таких параметров управляющих воздействий, при которых минимизируется вероятность того, что ошибка аппроксимации превысит некоторый заданный порог (вероятность отказов). Как известно, вероятность отказов не учитывает информации о больших значениях ошибки аппроксимации, находящихся в хвосте функции распределения. Кроме того, минимизация вероятности отказов сопряжена с известными математическими трудностями. В настоящей статье предлагается вместо вероятности отказов минимизировать bPOE, поскольку эта мера риска учитывает среднее значение хвоста функции распределения и имеет ряд полезных свойств, существенно упрощающих процесс оптимизации надежности [3–7].

В разд.1 приведена постановка задачи оптимального управления возбуждением колебаний шарнирно закрепленной балки. В подразд. 1.1 рассмотрена детерминированная постановка задачи. В подразд. 1.2 приведена классическая постановка задачи оптимизации надежности. В подразд. 1.3 дан краткий обзор наиболее известных мер риска и сформулирована оптимизационная задача с использованием bPOE. В разд. 2 приведен анализ полученных результатов решения этой задачи.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ВОЗБУЖДЕНИЕМ КОЛЕБАНИЙ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ БАЛКИ

В [1] рассматривались установившиеся колебания с частотой ω шарнирно закрепленной упругой однородной балки без дефектов единичной длины под воздействием I точечных сил, приложенных в точках ξ_j с комплексными амплитудами $F_j = u_j + iv_j$, $j=1, \dots, I$. Введем обозначения: $\vec{F} = (F_1, \dots, F_I)^T$ и $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_I)^T$. Согласно модели Кирхгофа задача возбуждения таких колебаний сводится к следующей краевой задаче [8, 9]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(ED \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^I F_i e^{i\omega t} \delta(x - \xi_i), \quad x \in (0, L), \quad (1)$$

$$\begin{cases} w(0, t) = w(L, t) = 0, \\ \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L, t)}{\partial x^2} = 0, \end{cases}$$

где E , D , ρ — соответственно модуль Юнга, момент инерции поперечного сечения и плотность балки, $w(x, t)$ — прогиб балки в момент времени t в точке x , $x \in (0, 1)$. Решение задачи (1) отыскивалось в виде $w(x, t) = w(x)e^{i\omega t}$, где $w(x)$ — комплексная амплитуда прогиба.

1.1. Детерминированная постановка задачи. Пусть $w(\vec{F}, \vec{\xi}, x)$ — комплексная амплитуда прогиба, полученная при решении задачи (1). Задана желаемая форма колебаний $W(x) = A(x)e^{i\Phi(x)}$. Отклонение моделируемой формы колебаний от желаемой при фиксированных \vec{F} и $\vec{\xi}$ является комплексной функцией $R(\vec{F}, \vec{\xi}, x) = w(\vec{F}, \vec{\xi}, x) - W(x)$. Среднеквадратическое отклонение вычисляется по формуле

$$H(\vec{F}, \vec{\xi}) = \int_0^1 R(\vec{F}, \vec{\xi}, x) \bar{R}(\vec{F}, \vec{\xi}, x) dx = \int_0^1 |w(\vec{F}, \vec{\xi}, x) - W(x)|^2 dx,$$

где $\bar{R}(\vec{F}, \vec{\xi}, x)$ — комплексно сопряженная функция к функции $R(\vec{F}, \vec{\xi}, x)$. В детерминированной постановке задача оптимального управления возбуждением колебаний однородной шарнирно закрепленной балки состоит в поиске значений параметров $F_i, \xi_i, i = 1, \dots, I$, при которых достигается минимум среднеквадратического отклонения моделируемой формы колебаний от желаемой $H(\vec{F}, \vec{\xi})$:

$$H^* = H(\vec{F}^*, \vec{\xi}^*) = \min_{\vec{F}, \vec{\xi}} H(\vec{F}, \vec{\xi}). \quad (2)$$

В [2] рассматривалась более сложная постановка задачи, учитывающая наличие неоднородностей (дефектов) на балке. При этом предполагалось, что известна исчерпывающая информация о параметрах дефектов, которые представлены в виде компонентов вектора $\vec{V}^T = (N_{\text{def}}, \vec{\chi}_{\text{def}}, \vec{\ell}_{\text{def}}, d\vec{E}_{\text{def}})$, где N_{def} — количество дефектов; $\vec{\chi}_{\text{def}} = (\chi_1, \dots, \chi_{N_{\text{def}}})$ — вектор точек локализации дефектов на балке; $\vec{\ell}_{\text{def}} = (\ell_1, \dots, \ell_{N_{\text{def}}})$ — вектор геометрических размеров дефектов; $d\vec{E}_{\text{def}} = (\Delta E_1, \dots, \Delta E_{N_{\text{def}}})$ — вектор относительных изменений модуля Юнга. Предполагалось, что k -й дефект длиной ℓ_k , локализованный в точке $x_k = \chi_k \neq \xi_i, i = 1, \dots, I$, характеризуется изменением модуля Юнга $\Delta E_k, k = 1, \dots, N_{\text{def}}$. В такой постановке функция цели вычисляется по формуле [2]

$$L(\vec{F}, \vec{\xi}, \vec{V}) = \int_0^1 |w(\vec{F}, \vec{\xi}, \vec{V}, x) - W(x)|^2 dx,$$

где $w(\vec{F}, \vec{\xi}, \vec{V}, x)$ — комплексная амплитуда прогиба, полученная с учетом наличия дефектов (см. [2]), и детерминированная задача оптимального управления возбуждением колебаний шарнирно закрепленной балки с известным вектором параметров дефектов \vec{V} формулируется следующим образом:

$$L^*(\vec{V}) = L(\vec{F}^*, \vec{\xi}^*, \vec{V}) = \min_{\vec{F}, \vec{\xi}} L(\vec{F}, \vec{\xi}, \vec{V}).$$

1.2. Классическая постановка задачи оптимизации надежности. В стохастической постановке задачи оптимизации надежности предполагается, что на балке появляется случайное количество дефектов, характеризующихся случайными параметрами. Пусть $\vec{\theta} = (N_{\text{def}}, \vec{\chi}_{\text{def}}, \vec{\ell}_{\text{def}}, d\vec{E}_{\text{def}})$ обозначает случайный вектор, в котором N_{def} — случайное количество дефектов, ограниченное заданным максимальным значением; $\vec{\chi}_{\text{def}}$ — вектор случайных мест расположения дефектов на балке; $\vec{\ell}_{\text{def}}$ — вектор случайных геометрических размеров дефектов; $d\vec{E}_{\text{def}}$ — вектор случайных относительных изменений модуля Юнга. В стохастическом случае среднеквадратическое отклонение моделируемой формы колебаний от желаемой при заданных значениях компонент векторов \vec{F} и $\vec{\xi}$ является случайной величиной $L(\vec{F}, \vec{\xi}, \vec{\theta})$, зависящей от случайного вектора $\vec{\theta}$.

В теории надежности в качестве количественного показателя надлежащего функционирования конструкции используется вероятность отказа, т.е. вероятность того, что при фиксированных векторах управляющих переменных $\vec{F}, \vec{\xi}$ зна-

чение случайной величины $L(\bar{F}, \bar{\xi}, \bar{\theta})$ превысит некоторый заданный порог h . Значения случайного вектора $\bar{\theta}$, при которых $L(\bar{F}, \bar{\xi}, \bar{\theta}) > h$, соответствуют отказу системы. Согласно классической теории надежности стохастическая задача оптимального выбора параметров механического устройства для возбуждения и формирования волнового движения состоит в минимизации вероятности того, что среднеквадратическое отклонение моделируемой формы колебаний от желаемой превысит заданный порог h :

$$\min_{\bar{F}, \bar{\xi}} P \{L(\bar{F}, \bar{\xi}, \bar{\theta}) > h\}. \quad (3)$$

1.3. Обобщенная постановка стохастической задачи с использованием меры риска. Вероятность отказов — одна из возможных мер риска. В более общей постановке задачу оптимального выбора параметров механического устройства для возбуждения и формирования волнового движения можно сформулировать в виде

$$\min_{\bar{F}, \bar{\xi}} \rho(L(\bar{F}, \bar{\xi}, \bar{\theta})), \quad (4)$$

где ρ — некоторая мера риска.

Наряду с вероятностью $P \{Y > h\}$ (Probability of Exceedance, POE) превышения случайной величиной Y заданного порога h широко используется другая мера риска, а именно α -квантиль, $q_\alpha(Y)$. В финансовых приложениях квантиль называется VaR (Value-at-Risk). Меры риска POE и квантиль учитывают только минимальные значения случайной величины Y , расположенные в хвосте функции распределения, и не содержат информации о значениях, расположенных в конце хвоста, которые случайная величина Y может принимать с очень малой вероятностью.

Более полезные свойства имеют такие меры риска, как CVaR (Conditional Value-at-Risk, условная VaR) и bPOE. Мера риска CVaR характеризует математическое ожидание значений случайной величины, расположенных в хвосте ее функции распределения. В отличие от POE и VaR мера риска CVaR учитывает амплитуду разброса в хвосте функции распределения. В [3, 10] вместо термина CVaR, широко распространенного в литературе по финансовой инженерии, предлагается более универсальный термин «суперквантиль». При этом вместо традиционного обозначения $\text{CVaR}_\alpha(Y)$ используется $\bar{q}_\alpha(Y)$, указывающее на связь с квантилем. Мера риска CVaR определяется следующим образом.

Если для заданного уровня доверительной вероятности α функция распределения $F_Y(y)$ случайной величины Y не имеет скачка в точке $q_\alpha(Y)$, то CVaR, т.е. $\bar{q}_\alpha(Y)$, вычисляется по формуле [11]: $\bar{q}_\alpha(Y) = E[Y : Y \geq q_\alpha(Y)]$. В общем случае, когда функция распределения $F_Y(y)$ имеет скачок в точке $q_\alpha(Y)$, мера риска CVaR вычисляется по более сложной формуле, предложенной в [12]:

$$\bar{q}_\alpha(Y) = \min_v \left(v + \frac{E[Y - v]^+}{1 - \alpha} \right),$$

где $[\cdot]^+ = \max\{\cdot, 0\}$. Эта формула позволяет одновременно вычислять оба показателя риска: VaR и CVaR, с использованием методов линейного программирования и негладкой оптимизации.

В [3] рассмотрена вспомогательная случайная величина \bar{Y} , которая генерируется значениями CVaR случайной величины Y при изменении α от 0 до 1, и ее

функция распределения, названная суперраспределением, $\bar{F}_Y = F_{\bar{Y}} = \bar{q}_Y^{-1}$. Таким образом, при фиксированном значении α значение CVaR, т.е. $\bar{q}_\alpha(Y)$, интерпретируется как квантиль суперраспределения \bar{F}_Y .

В [3] предложена новая мера надежности с порогом $h=0$, альтернативная POE, — буферная вероятность отказов. Этот показатель более консервативный, чем POE. Он позволяет, кроме вероятности превышения порога, учитывать также и степень этого превышения, что невозможно в случае классической вероятности отказов.

В [6] предложено в качестве порога выбирать среднее значение хвоста распределения и введена новая мера bPOE, которая является функцией порогового значения y и случайной величины Y и определяется следующим образом:

$$\bar{p}_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \geq \sup Y; \\ 1 - \bar{q}_Y^{-1}(y), & \text{если } E[Y] < y < \sup Y; \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В [7] получена формула для вычисления bPOE:

$$\bar{p}_Y(y) = \begin{cases} \min_{b \geq 0} 0, E[b(Y - y) + 1]^+, & \text{если } y \neq \sup Y; \\ 0, & \text{если } y = \sup Y. \end{cases}$$

Поскольку bPOE является верхней границей POE, минимизация bPOE способствует уменьшению значения POE. Несмотря на то, что bPOE и CVaR взаимосвязаны, имеется существенное различие между задачами минимизации bPOE и CVaR. Минимизация bPOE уменьшает вероятность возникновения нежелательного события, а в задаче минимизации CVaR минимизируется среднее значение хвоста распределения при фиксированном значении этой вероятности. Таким образом, эти задачи дополняют одна другую.

Поскольку bPOE имеет много полезных свойств, в качестве меры риска ρ в задаче (4) целесообразно использовать bPOE. Для повышения устойчивости алгоритма в целевой функционал (4) следует также включить регуляризирующий функционал $D(\bar{F}, \bar{\xi})$ со штрафным коэффициентом λ .

Далее рассматривается следующая обобщенная постановка стохастической задачи оптимального выбора параметров механического устройства для возбуждения и формирования волнового движения при наличии дефектов

$$\min_{\bar{F}, \bar{\xi}} bPOE_h(L(\bar{F}, \bar{\xi}, \bar{\theta})) + \lambda D(\bar{F}, \bar{\xi}). \quad (5)$$

2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ

Решение задачи оптимального управления колебанием неоднородной балки со случайными параметрами дефектов при различных значениях частоты (волнового числа k) и количестве приложенных сил I проводилось с использованием многофункционального пакета PSG (Matlab Interface), предоставленного American Optimal Decision, USA [13].

Предполагалось, что количество дефектов N_{def} не превышает заданного значения N_{max} , а остальные компоненты вектора параметров дефектов $\bar{\theta}$ независимые и равномерно распределенные в заданных пределах случайные величины.

Численное моделирование проводилось следующим образом.

На первом этапе при заданных исходных параметрах (желаемой формы колебаний $W(x) = \text{Re } W(x) + i\text{Im } W(x)$, волновом числе k и количестве сил I) решалась детерминированная задача оптимального управления колебаниями упругой балки без дефектов (2). В результате получены оптимальные характеристики сил $\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}$: точки их приложения $\vec{\xi}^{\text{det}} = (\xi_1^{\text{det}}, \dots, \xi_I^{\text{det}})^T$, а также действительные и мнимые части их амплитуд $\vec{F}^{\text{det}} = (F_1^{\text{det}}, \dots, F_I^{\text{det}})^T = (u_1^{\text{det}} + iv_1^{\text{det}}, \dots, u_I^{\text{det}} + iv_I^{\text{det}})^T$, которые обеспечивают наилучшее приближение заданной формы и поточечной фазы колебаний балки на частоте, соответствующей заданному волновому числу k . Кроме того, получено оптимальное значение $H^* = H(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}})$ среднеквадратического отклонения моделируемой формы колебаний от желаемой, соответствующее оптимальному решению детерминированной задачи $\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}$.

На втором этапе генерировалась выборка значений случайной величины $L(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta})$ объема $M = 20000$ в предположении, что на балке имеются дефекты, характеризующиеся случайными параметрами. При этом использовалась следующая процедура:

- 1) случайным образом выбиралось количество дефектов N_{def} , не превышающее заданного значения N_{max} ;
- 2) для $n = 1, \dots, N_{\text{def}}$ генерировались случайным образом значения параметров, характеризующих n -й дефект, а именно его расположение на балке $\chi_n \in (0, 1)$, геометрический размер $\Delta L_n \in (0, 0.1)$, изменение модуля Юнга ΔE_n ;
- 3) определялись компоненты вектора $\vec{\theta}^T = (N_{\text{def}}, \vec{\chi}_{\text{def}}, \vec{l}_{\text{def}}, d\vec{E}_{\text{def}})$: $\vec{\chi}_{\text{def}} = (\chi_1, \dots, \chi_{N_{\text{def}}})$, $\vec{l}_{\text{def}} = (l_1, \dots, l_{N_{\text{def}}})$ и $d\vec{E}_{\text{def}} = (\Delta E_1, \dots, \Delta E_{N_{\text{def}}})$;
- 4) вычислялось среднеквадратическое отклонение моделируемой формы колебаний от желаемой (ошибка аппроксимации)

$$L(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}) = \int_0^1 |w(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}, x) - W(x)|^2 dx.$$

Полученную выборку, состоящую из M значений $L_1(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}_1), \dots, L_M(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}_M)$, можно рассматривать как равновероятные реализации дискретной случайной величины $L(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta})$ с функцией распределения $F(x) = P\{L(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}) \leq x\}$.

Генерировались четыре выборки одинакового объема $M = 20000$, соответствующие значениям волнового числа $k = 1.8$ и количеству приложенных сил $I = 5$ при $N_{\text{max}} = 1, 3, 5, 7$, и строились соответствующие функции распределения для каждой из них (рис. 1).

На рис. 1 G_i — условная функция распределения, $G_i(x) = P\{L(\vec{F}^{\text{det}}, \vec{\xi}^{\text{det}}, \vec{\theta}) \leq x | N_{\text{max}} = i\}$. Согласно теории надежности $G_i(x)$ — функция распределения вероятности безотказной работы системы при наличии не более i дефектов. Из рис. 1 видно, что при увеличении значения N_{max} хвосты распределения вероятности безотказной работы системы становятся более «тяжелыми».

Исследовалось, как количество сил, приложенных к балке, влияет на вероятность превышения ошибкой аппроксимации заданного порога при фиксированных значениях параметров и N_{max} . Моделирование проводилось для волновых чисел

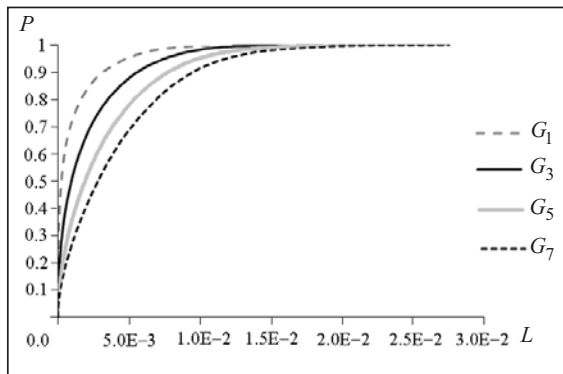


Рис. 1. Функции распределения ошибки аппроксимации $L(\vec{F}_{kl}^{\text{det}}, \vec{\xi}_{kl}^{\text{det}}, \vec{\theta})$ при различных значениях N_{\max}

$k = 3.6$ и 4.6 и при максимальном количестве дефектов $N_{\max} = 5$. Для каждого из значений k решалась серия детерминированных задач оптимального управления колебаниями упругой балки без дефектов (2) при различных значениях количества приложенных сил I . При этом определялись оптимальные характеристики сил \vec{F}_{kl}^* , $\vec{\xi}_{kl}^*$ и оптимальное значение $H_{kl}^* = H(\vec{F}_{kl}^*, \vec{\xi}_{kl}^*)$ среднеквадратического отклонения моделируемой формы колебаний от желаемой. После этого $M = 20000$ раз генерировалось случайное количество дефектов, не превышающее N_{\max} , для которых генерировались случайные значения их параметров (длина, место локализации на балке и изменение модуля Юнга). Таким образом формировался случайный вектор $\vec{\theta}_{kl}$. В результате получения выборка из распределения среднеквадратических отклонений моделируемой формы колебаний от желаемой $L(\vec{F}_{kl}^*, \vec{\xi}_{kl}^*, \vec{\theta}_{kl})$ объема M , по которой вычислялись вероятности $P\{L(\vec{F}_{kl}^*, \vec{\xi}_{kl}^*, \vec{\theta}_{kl}) > h\}$ превышения случайной величиной $L(\vec{F}_{kl}^*, \vec{\xi}_{kl}^*, \vec{\theta}_{kl})$ заданных значений порога h . Для каждого волнового числа k формировался набор пороговых значений $\{2H_k^*, \dots, 10H_k^*\}$, где $H_k^* = H_{kl_{\min}}^*$, I_{\min} — минимальное количество сил, соответствующее волновому числу k . При $k = 3.6$ величины $I_{\min} = 4$ и $H_{3.6}^* = 4.38E-4$; при $k = 4.6$ величины $I_{\min} = 5$ и $H_{4.6}^* = 5.99E-4$. Полученные результаты представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что при любом фиксированном пороге h по мере увеличения количества приложенных сил наблюдается тенденция к уменьшению вероятности превышения порога. Если отдельно рассматривать результаты, полученные при четном и нечетном количестве сил, можно видеть строгое убывание вероятности превышения порога с увеличением количества сил. С увеличением величины порога h наблюдается уменьшение разброса этих вероятностей.

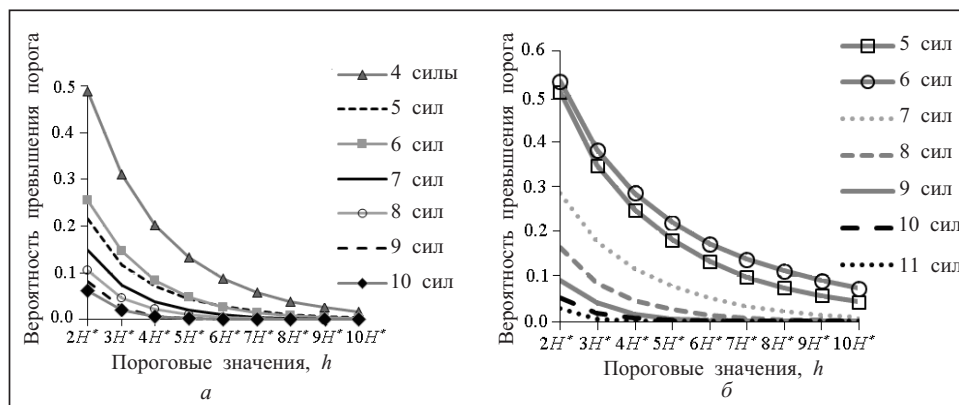


Рис. 2. Зависимость вероятности превышения случайной величиной $L(\vec{F}_{kl}^*, \vec{\xi}_{kl}^*, \vec{\theta}_{kl})$ порога h от его значений и количества сил I : при $k = 3.6$ (а) и при $k = 4.6$ (б)

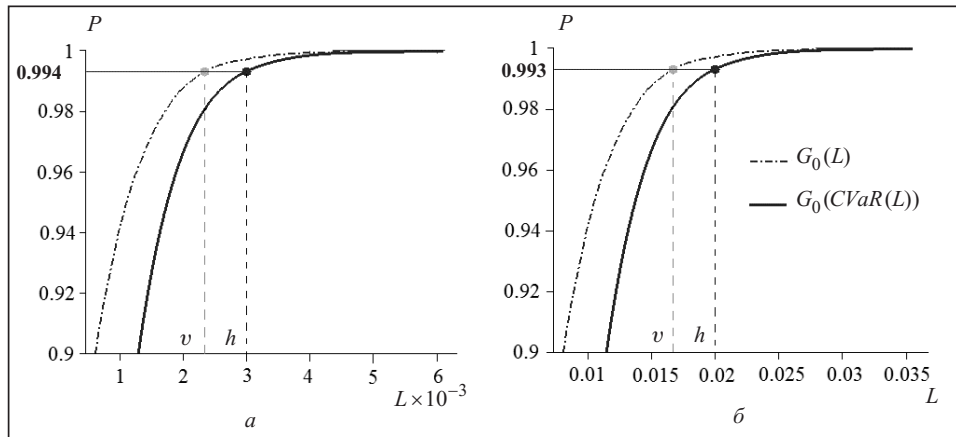


Рис. 3. Хвосты функций распределения $G_0(L)$ и $G_0(CVaR(L))$ до оптимизации: при $k = 3.6, I = 8$ (а) и при $k = 1.8, I = 4$ (б)

Далее рассматривается случай, когда количество сил и величина порога фиксированы. Традиционно надежность системы характеризуется значением РОЕ, т.е. вероятностью $P(X > h)$ того, что случайная величина X превышает некоторый заданный порог h . Если X моделирует потери, то этот показатель никак не отражает потери, значительно превышающие порог h , которые могут возникать с очень малыми вероятностями. Выбор нового значения порога v такого, что $E[X | X > v] = h$, позволяет учесть потери, находящиеся в хвосте функции распределения случайной величины X . Поэтому вместо минимизации РОЕ (задача (3)) минимизируется бРОЕ (задача (5)).

Обозначим u_1, \dots, u_M значения, которые принимает случайная величина $L(\bar{F}_{kl}^*, \bar{\xi}_{kl}^*, \bar{\theta}_{kl})$. Для простоты в дальнейшем эту случайную величину будем обозначать L , а ее функцию распределения — $G_0(L)$. Для уровней вероятности $\alpha_i = G_0(u_i) = P\{L \leq u_i\}$, $i = 1, \dots, M$, вычислим значения $w_i = CVaR_{\alpha_i}(L)$, $i = 1, \dots, M$. Обозначим $CVaR(L)$ случайную величину, принимающую значения w_1, \dots, w_M с равными вероятностями, а ее функцию распределения — $G_0(CVaR(L))$. На рис. 3, а показаны хвосты функций распределения $G_0(L)$ и $G_0(CVaR(L))$ для случая, когда $k = 3.6$ и $I = 8$, а на рис. 3, б — для случая, когда $k = 1.8$ и $I = 4$.

Пусть задан порог h для значений случайной величины $CVaR(L)$ и выбран порог v для значений случайной величины L таким образом, чтобы выполнялось равенство $E[L | L > v] = h$. В качестве v был выбран α -квантиль функции распределения $G_0(L)$, $\alpha = P\{CVaR(L) \leq h\}$. Для случая $k = 3.6$ и $I = 8$, (см. рис. 3, а) выбрано значение $h = 3.0E-3$ и $v = 2.5E-3$, $\alpha = 0.994$. Для случая $k = 1.8$ и $I = 4$, (см. рис. 3, б) выбрано значение $h = 0.02$ и $v = 0.0167$, $\alpha = 0.993$.

Из рис. 4 видно, как отличается хвост функции распределения $G_1(CVaR(L))$ случайной величины $CVaR(L)$, полученной после оптимизации, от ее исходной функции распределения $G_0(CVaR(L))$; здесь также указаны диапазоны бРОЕ_0 и бРОЕ_1 значений вероятностей $P\{CVaR(L) > h\}$, соответствующих этим функциям распределения. В случае $k = 3.6$ и $I = 8$ (см. рис. 4, а) значение бРОЕ_0,003 уменьшилось на 29.43 % с $5.76E-3$ до $4.07E-3$. При этом среднее значение хвоста функции распределения $CVaR(L)$, соответствующего уровню вероятности $\alpha = 0.994$, уменьшилось на 4.99 % с $3.00E-3$ до $2.85E-3$.

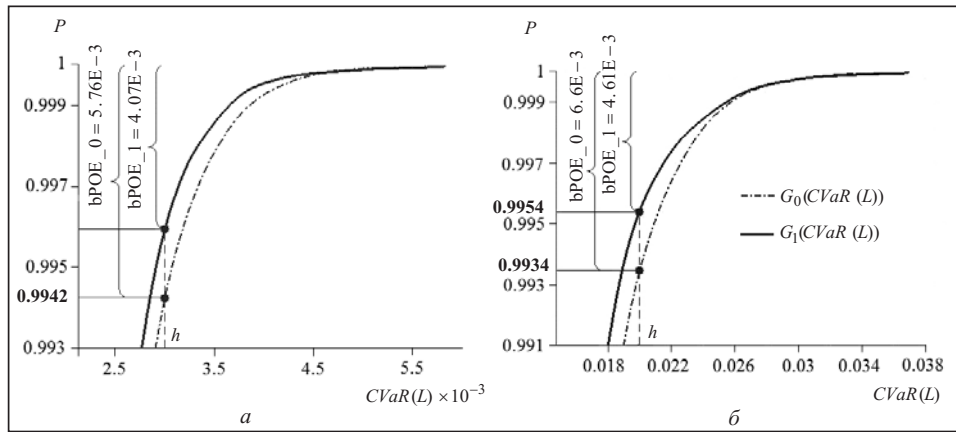


Рис. 4. Хвосты функций распределения $G_0(CVaR(L))$ и $G_1(CVaR(L))$: при $k = 3.6, I = 8$ (а) и при $k = 1.8, I = 4$ (б)

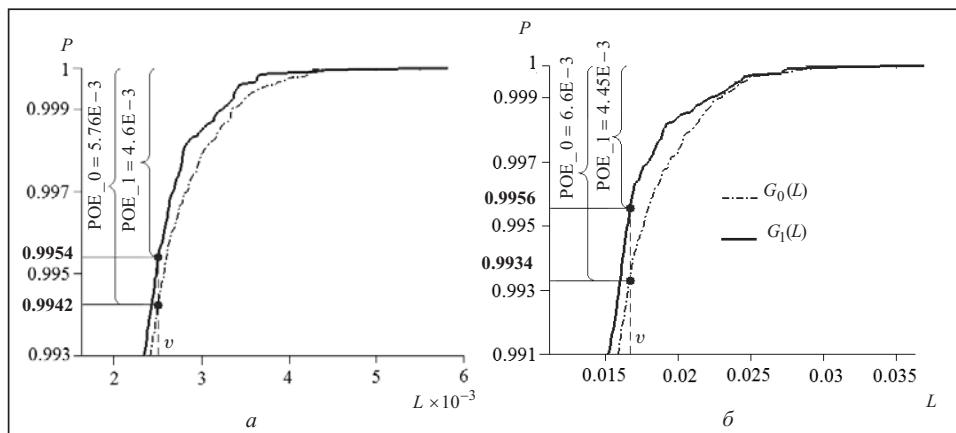


Рис. 5. Хвосты функций распределения $G_0(L)$ и $G_1(L)$: при $k = 3.6, I = 8$ (а) и при $k = 1.8, I = 4$ (б)

В случае $k = 1.8, I = 4$ (см. рис. 4, б) значение $bPOE_{0.02}$ уменьшилось на 30.15 % с $6.60E-3$ до $4.61E-3$. При этом среднее значение хвоста функции распределения $CVaR(L)$, соответствующего уровню вероятности $\alpha = 0.993$, уменьшилось на 5.5% с 0.02 до 0.0189.

На рис. 5 показано, на сколько отличается хвост функции распределения $G_1(L)$ случайной величины L , полученной после оптимизации, от ее исходной функции распределения $G_0(L)$. В случае $k = 3.6$ и $I = 8$ (см. рис. 5, а) в результате минимизации $bPOE$ значение $POE_{0.025}$ уменьшилось на 20.14 % с $5.76E-3$ до $4.60E-3$. В случае $k = 1.8, I = 4$ (см. рис. 5, б) значение $POE_{0.0167}$ уменьшилось на 32.58% с $6.60E-3$ до $4.45E-3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье показано, что минимизация $bPOE$ позволяет одновременно уменьшить значение POE и среднее значение хвоста функции распределения. В случае $k = 3.6$ и $I = 8$ при минимизации $bPOE$ значение этого показателя уменьшилось на 29.43 %, и при этом значение POE уменьшилось на 20.14 %, а средняя величина хвоста — на 4.99 %. В случае $k = 1.8, I = 4$ при минимизации

ции бРОЕ его значение уменьшилось на 30.15 %, значение РОЕ уменьшилось на 32.58 %, а средняя величина хвоста — на 5.5 %.

Описаны численные эксперименты для определения, как количество сил, приложенных к балке, влияет на вероятность превышения ошибкой аппроксимации заданного порога. Результаты моделирования показали, что при любом фиксированном пороге h по мере увеличения количества приложенных сил прослеживается тенденция к уменьшению вероятности превышения порога. Если отдельно рассматривать результаты, полученные при четном и нечетном количестве сил, то наблюдается строгое убывание вероятности превышения порога с увеличением количества сил. Уменьшение разброса этих вероятностей заметно с увеличением величины порога h .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зражевський Г. М. Визначення оптимальних параметрів збудження форми коливальних балки. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Сер. Фізико-математичні науки*. 2013. Вип. 3. С. 138–141.
2. Зражевский Г.М., Голодников А.Н., Урясев С.П. Математические методы поиска оптимального управления колебаниями шарнирно закрепленной балки (детерминированный случай). *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 6. С. 145–164.
3. Rockafellar R.T., Royset J.O. On buffered failure probability in design and optimization of structures. *Journal of Reliability Engineering and System Safety*. 2010. Vol. 95, Iss. 5. P. 499–510.
4. Rockafellar R.T. Convexity and reliability in engineering optimization. *Proc. of the 9th Intern. Conf. on Nonlinear Analysis and Convex Analysis* (Chiangrai, Thailand). 2015. P. 1–10.
5. Rockafellar R.T., Royset J.O. Random variables, monotone relations, and convex analysis. *Mathematical Programming*. 2014. Vol. 148, Iss. 1–2. P. 297–331.
6. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered probability of exceedance: Mathematical properties and optimization algorithms. *SIAM Journal on Optimization* 2018. Vol. 28, Iss. 2. P. 1077–1103.
7. Norton M., Uryasev S. Maximization of AUC and buffered AUC in binary classification. *Mathematical Programming*. 2019. Vol. 174. P. 575–612.
8. Donnell L.H. Beams, plates, and shells. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.
9. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. New York: McGraw-hill Book Company, 1959. 580 p.
10. Rockafellar R.T., Uryasev S. The fundamental risk quadrangle in risk management, optimization and statistical estimation. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2013. Vol. 18, Iss. 1-2. P. 33–53.
11. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of conditional value-at-risk. *The Journal of Risk*. 2000. Vol. 2, Iss. 3. P. 21–41.
12. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1443–1471.
13. AORDA Portfolio Safeguard (PSG). URL: http://www.aorda.com/html/PSG_Help_HTML/index.html?bpoe.htm.

Надійшла до редакції 25.07.2019

Г.М. Зражевський, О.М. Голодніков, С.П. Урясьєв, О.Г. Зражевський
ЗАСТОСУВАННЯ БУФЕРНОЇ ІМОВІРНОСТІ ПЕРЕВИЩЕННЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМІЗАЦІЇ НАДІЙНОСТІ

Анотація. Запропоновано підхід до розв'язання задачі оптимізації надійності складних систем з використанням буферної ймовірності перевищення bPOE. Як об'єкт дослідження розглянуто модель оптимального керування коливаннями шарнірно закріпленої балки з випадковими дефектами. Показано, що мінімізація bPOE в задачах оптимізації надійності є кращою, ніж мінімізація класичної ймовірності перевищення критерію безпеки.

Ключові слова: буферна ймовірність перевищення bPOE, оптимізація надійності, форма коливань, дефекти, помилка апроксимації.

G.M. Zrazhevsky, A.N. Golodnikov, S.P. Uryasev, A.G. Zrazhevsky
APPLICATION OF THE BUFFERED PROBABILITY OF EXCEEDANCE IN RELIABILITY OPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. We propose an approach to solving the problem of optimizing the reliability of complex systems using Buffered Probability of Exceedance (bPOE). As a research subject, we consider the model of optimal control of oscillations of a hinged beam with random defects. This example shows that minimizing bPOE in reliability optimization problems is more preferable than minimizing the classical probability of exceedance.

Keywords: bPOE, reliability optimization, waveform, defects, approximation error.

Зражевський Григорій Михайлович,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: zgrig@univ.kiev.ua.

Голодніков Александр Николаевич,
кандидат физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова
НАН Украины, Киев.

Урясьєв Станислав Павлович,
кандидат физ.-мат. наук, профессор Университета штата Нью-Йорк в Стоуни-Брук, США,
e-mail: Stanislav.Uryasev@stonybrook.edu.

Зражевський Алексей Григорьевич,
кандидат техн. наук, аналитик-статистик компании American Optimal Decisions, Гейнсвилл, Флорида,
США, e-mail: alex.zrazhevsky@gmail.com.