УДК 519.6

Н.В. МАЙКО

СУПЕРЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Анотація. Розглянуто крайову задачу для абстрактного диференціального рівняння 2-го порядку з операторним коефіцієнтом у гільбертовому просторі. За допомогою перетворення Келі операторного коефіцієнта A та поліномів типу Майкснера від аргументу x розв'язок задачі зображено у вигляді ряду. За наближений розв'язок узято скінченну суму N доданків цього ряду. Доведено вагові оцінки точності цієї апроксимації залежно не тільки від параметра дискретизації N, але й від відстані аргументу x до межових точок проміжку. Запропонований алгоритм має суперекспоненціальну швидкість збіжності.

Ключові слова: крайова задача, гільбертів простір, операторний коефіцієнт, перетворення Келі, оцінки з вагою, суперекспоненціальна швидкість збіжності.

ВСТУП

У літературі з теорії та застосувань наближених методів для розв'язування крайових і початково-крайових задач є порівняно небагато публікацій (див., наприклад, [1–3]) щодо вивчення крайового ефекту — впливу крайової умови Діріхле на точність наближеного розв'язку. Водночас зрозуміло, що похибка методу залежить не лише від параметра дискретизації (наприклад, кроку сітки), але й від відстані до межі області. Урахування цього впливу має не тільки важливе теоретичне, а й практичне значення, оскільки надає змогу брати поблизу межі області більший крок сітки.

Кількісною характеристикою крайового ефекту є оцінки похибки з ваговою функцією, пов'язаною з відстанню точки до межі, в певних сіткових нормах. Ідея і техніка доведення таких оцінок, уперше запропоновані в [2], згодом застосовані для вивчення багатьох класів задач: стаціонарних, нестаціонарних, лінійних, квазілінійних тощо [4–10]. Аналіз крайового ефекту становить значний інтерес і для нових класів задач, поява яких зумовлена бурхливим розвитком дробового інтегро-диференціювання (див. публікації [11, 12] та наведені в них джерела).

Ця стаття є продовженням розпочатого в [13] дослідження впливу крайової умови на точність наближеного розв'язку у випадку абстрактного диференціального рівняння зі сталим операторним коефіцієнтом у гільбертовому просторі. Зображення точного розв'язку крайової задачі у вигляді нескінченного ряду за допомогою перетворення Келі та поліномів типу Майкснера надає змогу отримати наближений розв'язок у вигляді скінченної суми N (параметр дискретизації) доданків та вивчити його точність залежно від N та відстані аргументу x до межових точок. Запропонований у [13] метод має степеневий (відносно N) порядок збіжності вигляду $O(N^{-\sigma})$, $\sigma > 0$, а отже, є методом без насичення точності.

У гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (u, v) і нормою $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ розглянемо крайову задачу

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - Au(x) = -f(x), \quad x \in (0, 1), \qquad u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{1}$$

де A — самоспряжений додатно визначений оператор зі щільною в H областю визначення $D(A)$ і спектром $\Sigma(A) \subset [\lambda_0, +\infty)$, $\lambda_0 > 0$.

Прикладом задачі (1) є перша крайова задача для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \; (x, y) \in \Omega = (0, 1)^2, \qquad (2)$$
$$u(x, y) = 0, \; x \in \Gamma = \partial\Omega,$$

де $f(x, y)$ — задана функція. Справді, покладаючи

$$H = L_2(0, 1) = \left\{ u(y), \; y \in (0,1): u(y) \text{ — вимірна і } \int_0^1 u^2(y) dy < \infty \right\},$$

$$(u, v) = \int_0^1 u(y) v(y) dy \;\; \forall u, v \in L_2(0, 1),$$

$$Au = -\frac{d^2 u}{dy^2}, \qquad D(A) = \overset{\circ}{H}{}^1(0,1) \cap H^2(0,1),$$

отримаємо задачу (2) в абстрактній постановці (1).

Мета цієї статті — дослідити наближення точного розв'язку задачі (1) скінченною сумою N доданків та отримати вагові апріорні оцінки, які враховують вплив крайової умови і мають порядок $O(N^{-1/2} e^{-\sqrt{N}})$. Таку швидкість збіжності запропонованого методу природно назвати суперекспоненціальною.

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Розглянемо дві допоміжні крайові задачі

$$u''(x) - au(x) = -f(x), \; x \in (0, 1), \qquad (3)$$
$$u(0) = 0, \; u(1) = 0,$$

і

$$w''(x) - aw(x) = 0, \; x \in (0, 1), \qquad (4)$$
$$w(0) = 0, \; w(1) = w_1,$$

де $a = \text{const} > 0$.

Розв'язок задачі (3) можна подати у вигляді

$$u(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \; x \in [0, 1],$$

за допомогою функції Гріна

$$G(x, \xi) = (\sqrt{a} \operatorname{sh} \sqrt{a})^{-1} \begin{cases} \operatorname{sh}(\sqrt{a} x) \operatorname{sh}(\sqrt{a}(1-\xi)), & x \le \xi, \\ \operatorname{sh}(\sqrt{a}\xi) \operatorname{sh}(\sqrt{a}(1-x)), & \xi \le x, \end{cases}$$

диференціального оператора $Lu(x) = -u''(x) + au(x), \; x \in (0, 1)$, $u(0) = 0, \; u(1) = 0$, $(a > 0)$.

Для розв'язування задачі (4) спочатку дослідимо крайову задачу

$$v''(x) - \frac{z^2}{1 - z^2} v(x) = 0, \; x \in (0, 1), \qquad (5)$$
$$v(0) = 0, \; v(1) = v_1,$$

з параметром $z \in (0,1)$. Її розв'язок $\upsilon(x)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\upsilon(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(x) z^{2k} \upsilon_1. \tag{6}$$

Підставляючи цей ряд у (5) і враховуючи розклад $\dfrac{z^2}{1-z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k+2}$, для коефіцієнтів $\upsilon_k(x)$ одержимо рекурентну послідовність задач

$$\upsilon_k''(x) = \sum_{p=0}^{k-1} \upsilon_p(x),\ x \in (0,1),\ \upsilon_k(0) = 0,\ \upsilon_k(1) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,$$

$$\upsilon_0(x) = x.$$

Звідси знайдемо

$$(\upsilon_k(x) - \upsilon_{k-1}(x))'' = \upsilon_{k-1}(x),\ x \in (0,1),\ \upsilon_k(0) = 0,\ \upsilon_k(1) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$
$$\upsilon_0(x) = x,$$

а отже,

$$\upsilon_k(x) = \upsilon_{k-1}(x) - \int_0^1 G_0(x,\xi)\upsilon_{k-1}(\xi)d\xi,\ x \in [0,1],\ k = 2, 3, \ldots,$$
$$\upsilon_0(x) = x,\ \upsilon_1(x) = -\frac{1}{3!}x(1-x^2), \tag{8}$$

де

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} x(1-\xi), & x \le \xi, \\ \xi(1-x), & \xi \le x, \end{cases}$$

— функція Гріна диференціального оператора $L\upsilon(x) = -\upsilon''(x),\ x \in (0,1)$, $\upsilon(0) = 0,\ \upsilon(1) = 0$.

Користуючись формулою (8), знайдемо, наприклад, поліноми

$$\upsilon_2(x) = \frac{1}{5!}x(1-x^2)\left(-x^2 - \frac{53}{3}\right),$$

$$\upsilon_3(x) = \frac{1}{7!}x(1-x^2)\left(-x^4 - 78x^2 - \frac{1963}{3}\right).$$

Далі розглянемо зображення функцій $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, тригонометричними рядами Фур'є. Використовуючи метод математичної індукції, можна довести таке твердження.

Лема 1 [13, 14]. Функції $\upsilon_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, можна подати у вигляді

$$\upsilon_k(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{2} a_p^{(k)} \sin(p\pi x),\quad x \in [0,1], \tag{9}$$

де

$$a_p^{(k)} = \sqrt{2}\int_0^1 \upsilon_k(x)\sin(p\pi x)dx = \frac{\sqrt{2}(-1)^p}{(p\pi)^3}\left(1 - \frac{1}{(p\pi)^2}\right)^{k-1},$$

і для них справджується нерівність

$$\left|\frac{\upsilon_k(x)}{\min(x, 1-x)}\right| \le \frac{1}{3},\ x \in [0,1].$$

Зіставляючи задачі (4) і (5) та беручи до уваги (6), бачимо, що розв'язок $w(x)$ задачі (4) можна записати так:

$$w(x) = \mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{a})\mathrm{sh}(x\sqrt{a})w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(x)\, y_k, \tag{10}$$

де $y_k = (1+a)^{-1} a y_{k-1} = [(1+a)^{-1} a]^k w_1$.

Наведемо ще один допоміжний результат, який буде використано пізніше.

Лема 2 [13]. Виконуються такі три нерівності:

$$\frac{|\sin(2k\pi x)|}{\min\,(x, 1-x)} \le 2\pi k \quad \forall x \in (0,1), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\frac{|\mathrm{sh}\sqrt{\lambda} - \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x)\lambda \mathrm{sh}\sqrt{\lambda}} \le \frac{1}{2} \quad \forall x \in (0,1) \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty),$$

$$\frac{|\cos(2k\pi x)\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda} - \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x)) - \mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x, 1-x)[(2k\pi)^2 + \lambda]\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}} \le \frac{C(\lambda_0)}{2\pi k} \tag{11}$$

$$\forall x \in (0,1) \quad \forall \lambda \in [\lambda_0, +\infty), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де $C(\lambda_0) = 1 + \dfrac{\mathrm{cth}\sqrt{\lambda_0}}{2} + \dfrac{1}{4\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda_0}/2)}$.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ТА ВАГОВА ОЦІНКА ТОЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Метою цього розділу є зображення $u(x)$ задачі (1) у вигляді ряду зі степенями дробового перетворення оператора A та коефіцієнтами, залежними тільки від x.

Разом із задачею (1) розглянемо також крайову задачу

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} - Aw(x) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w(1) = w_1. \tag{12}$$

Її розв'язок $w(x)$ запишемо аналогічно (10) у вигляді ряду

$$w(x) = \mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{A})\mathrm{sh}(x\sqrt{A})w_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \upsilon_k(x)\, y_k, \tag{13}$$

де $y_k = (I+A)^{-1} A y_{k-1} = [(I+A)^{-1} A]^k w_1$, а функції $\upsilon_k(x)$ визначаються з рекурентної послідовності інтегральних рівнянь (8).

Функцію $f(x)$ у правій частині рівняння (1) подамо за допомогою ряду Фур'є:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\sin(2k\pi x) f_{s,k} + f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\cos(2k\pi x) f_{c,k}, \tag{14}$$

де

$$f_{s,k} = \int_0^1 f(x)\sqrt{2}\sin(2k\pi x)dx, \quad f_{c,k} = \int_0^1 f(x)\sqrt{2}\cos(2k\pi x)dx,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \quad f_0 = \int_0^1 f(x)dx.$$

Використовуючи операторну функцію Гріна

$$G(x, \xi; A) = (\sqrt{A}\mathrm{sh}\sqrt{A})^{-1} \begin{cases} \mathrm{sh}(\sqrt{A}x)\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-\xi)), & x \le \xi, \\ \mathrm{sh}(\sqrt{A}\xi)\mathrm{sh}(\sqrt{a}(1-x)), & \xi \le x, \end{cases}$$

та виконуючи нескладні перетворення, розв'язок $u(x)$ запишемо так:

$$u(x)=\int_0^1 G(x,\xi;A)f(\xi)d\xi=$$

$$=(\sqrt{A}\mathrm{sh}\sqrt{A})^{-1}\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-x))\int_0^x \mathrm{sh}(\sqrt{A}\xi)f(\xi)d\xi+$$

$$+(\sqrt{A}\mathrm{sh}\sqrt{A})^{-1}\mathrm{sh}(\sqrt{A}x)\int_x^1 \mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-\xi))f(\xi)d\xi=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}f_{s,k}+ \tag{15}$$

$$+(A\mathrm{sh}\sqrt{A})^{-1}\{\mathrm{sh}\sqrt{A}-\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\mathrm{sh}(\sqrt{A}x)\}f_0+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}\mathrm{sh}^{-1}\sqrt{A}\,\{\cos(2k\pi x)\mathrm{sh}\sqrt{A}-\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\mathrm{sh}(\sqrt{A}x)\}f_{c,k}.$$

Теорема 1. Нехай права частина $f(x)$ рівняння (1) зображена рядом Фур'є (14), який задовольняє умови

$$\|f_s\|\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \ \|f_c\|\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \ \|e^A f_0\|<\infty.$$

Тоді для розв'язку $u(x)$ задачі (1) справджується вагова оцінка

$$\left\|\frac{u(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le C(\|f_s\|+\|e^A f_0\|+\|f_c\|)\quad \forall x\in(0,1),$$

де $C=\max\left\{\dfrac{C(\lambda_0)}{2\sqrt{3}e},\dfrac{1}{2e^{\lambda_0}}\right\}$, а сталу $C(\lambda_0)$ визначено в (11).

Доведення. Позначимо $E(\lambda)$ спектральну сім'ю, яка відповідає оператору A. Використовуючи спектральне зображення функції від оператора A та застосовуючи лему 2, маємо

$$\left\|\frac{u(x)}{\min(x,1-x)}\right\|=\left\|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin(2k\pi x)}{\min(x,1-x)}[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}f_{s,k}+\right.$$

$$+(A\mathrm{sh}\sqrt{A})^{-1}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{A}-\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\mathrm{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x,1-x)}f_0+$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}[(2k\pi)^2 I+A]^{-1}\mathrm{sh}^{-1}\sqrt{A}\,\frac{\cos(2k\pi x)\mathrm{sh}\sqrt{A}-\mathrm{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\mathrm{sh}(\sqrt{A}x)}{\min(x,1-x)}f_{c,k}\right\|=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\int_{\lambda_0}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}\sin(2k\pi x)}{\min(x,1-x)[(2k\pi)^2+\lambda]}dE(\lambda)f_{s,k}\right\|+$$

$$+\left\|\int_{\lambda_0}^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}-\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x))-\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x,1-x)\lambda^{\sigma+1}\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}}dE(\lambda)A^{\sigma}f_0\right\|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\int_{\lambda_0}^{+\infty}\sqrt{2}\,\frac{\cos(2k\pi x)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x))-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)}{\min(x,1-x)[(2k\pi)^2+\lambda]\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}\,dE(\lambda)\,f_{c,k}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\substack{0<x<1\\ \lambda\ge\lambda_0}}\frac{\sqrt{2}|\sin(2k\pi x)|}{\min(x,1-x)[(2k\pi)^2+\lambda]}\|f_{s,k}\|+$$

$$+\sup_{\substack{0<x<1\\ \lambda\ge\lambda_0}}e^{-\lambda}\frac{|\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x))-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x,1-x)\lambda\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}\|e^{A}f_0\|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{\substack{0<x<1\\ \lambda\ge\lambda_0}}\frac{\sqrt{2}|\cos(2k\pi x)\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}(1-x))-\operatorname{sh}(\sqrt{\lambda}x)|}{\min(x,1-x)[(2k\pi)^2+\lambda]\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}}\|f_{c,k}\|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\|f_{s,k}\|+\frac{1}{2e^{\lambda_0}}\|e^{A}f_0\|+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi k}\|f_{c,k}\|=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{k}}}{k}\|e^{\sqrt{k}}f_{s,k}\|+\frac{1}{2e^{\lambda_0}}\|e^{A}f_0\|+\frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{k}}}{k}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}}{2\pi e}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}+\frac{1}{2e^{\lambda_0}}\|e^{A}f_0\|+$$

$$+\frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi e}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}e}\|f_s\|+\frac{1}{2e^{\lambda_0}}\|e^{A}f_0\|+\frac{C(\lambda_0)}{2\sqrt{3}e}\|f_c\|.$$

Теорему доведено. □

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ТА ВАГОВІ ОЦІНКИ ПОХИБКИ

За наближений розв'язок задачі (1) візьмемо частинну суму ряду (15)

$$u_N(x)=\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}\sin(2k\pi x)[(2k\pi)^2I+A]^{-1}f_{s,k}+$$
$$+(A\operatorname{sh}\sqrt{A})^{-1}\{\operatorname{sh}\sqrt{A}-\operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\operatorname{sh}(\sqrt{A}x)\}f_0+$$
$$+\sum_{k=1}^{N}\sqrt{2}[(2k\pi)^2I+A]^{-1}\operatorname{sh}^{-1}\sqrt{A}\{\cos(2k\pi x)\operatorname{sh}\sqrt{A}-$$
$$-\operatorname{sh}(\sqrt{A}(1-x))-\operatorname{sh}(\sqrt{A}x)\}f_{c,k}. \qquad (16)$$

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді точність наближеного розв'язку (16) характеризується ваговою оцінкою

$$\left\|\frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le\frac{C(\lambda_0)}{\sqrt{2}\pi}\frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}}(\|f_s\|+\|f_c\|)\quad\forall x\in(0,1), \qquad (17)$$

де сталу $C(\lambda_0)$ визначено в (11).

Доведення. Як і в доведенні теореми 1, маємо

$$\left\| \frac{u(x)-u_N(x)}{\min(x,1-x)} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} \| f_{s,k} \| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi k} \| f_{c,k} \| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \| + \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \| \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left(\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}C(\lambda_0)}{2\pi} e^{-\sqrt{N}} \left(\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \| f_s \| + \frac{C(\lambda_0)}{\sqrt{2}\pi} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \| f_c \|,$$

звідки випливає оцінка (17). Теорему доведено. □

Розглянемо ще один спосіб наближення точного розв'язку та дослідимо його похибку. Використовуючи зображення (13), запишемо (16) у вигляді

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} +$$

$$+ A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_0 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \left\{ \cos(2k\pi x) I - \sum_{j=0}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k}.$$

Тоді розв'язок $u(x)$ задачі (1) апроксимуємо скінченною сумою

$$u_{N,M}(x) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2} \sin(2k\pi x) [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} +$$

$$+ A^{-1} \left\{ I - \sum_{j=0}^{M} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_0 + \tag{18}$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \left\{ (\cos(2k\pi x) - 1) I - \sum_{j=1}^{M} [v_j(1-x) + v_j(x)] [(I+A)^{-1} A]^j \right\} f_{c,k.}$$

Далі нам знадобиться таке допоміжне твердження.

Лема 3. Справджуються нерівності

$$\max_{\lambda\ge\lambda_0} \lambda^{-1} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j = \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j}-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j, \quad j\ge(\lambda_0+1)^2, \tag{19}$$

$$\sup_{\lambda\ge\lambda_0} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j = e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j, \quad j\ge(\lambda_0+1)\lambda_0. \tag{20}$$

Доведення. Доведемо властивість (19). Оскільки

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\lambda^{-1}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-2}}{(\lambda+1)^{j+1}}\,(j-(\lambda+1)^2),$$

то при $\sqrt{j}-1\ge\lambda_0$ отримаємо

$$\max_{\lambda\ge\lambda_0} \lambda^{-1}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j = \lambda^{-1}e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j\Bigg|_{\lambda=\sqrt{j}-1} = \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j}-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j.$$

Щоб довести властивість (20), знайдемо похідну

$$\frac{d}{d\lambda}\left[e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j\right] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{j-1}}{(\lambda+1)^{j+1}}\,(-\lambda^2-\lambda+j);$$

тоді при $\dfrac{\sqrt{4j+1}-1}{2}\ge\lambda_0$ маємо

$$\sup_{\lambda\ge\lambda_0} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j = e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^j\Bigg|_{\lambda=\frac{\sqrt{4j+1}-1}{2}} = e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j.$$

Лему доведено. □

Одержимо тепер такий основний результат.

Теорема 3. Нехай наближений розв'язок (18) задовольняє умови

$$M=N,\ M+1\ge(\lambda_0+1)^2,$$

$$\|f_s\|\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{s,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \|e^A f_0\|<\infty,$$

$$\|f_c\|\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty,\ \|f_c\|_A\equiv\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^A f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}<\infty.$$

Тоді його точність характеризується ваговою оцінкою

$$\left\|\frac{u(x)-u_{N,M}(x)}{\min(x,1-x)}\right\|\le C\,\frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}}\,(\|f_s\|+\|e^A f_0\|+\|f_c\|+\|f_c\|_A)\quad \forall x\in(0,1), \tag{21}$$

де стала

$$C = \max\left\{\frac{1}{\sqrt{2}\pi},\ \frac{2e(1+\sqrt{2})\cdot 0{,}62}{3},\ \frac{3{,}94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}},\ \frac{1}{3\sqrt{6}\pi^2}\right\} = \frac{3{,}94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}} = 2{,}712505313\ldots$$

не залежить від N та $f(x)$.

Доведення. Похибку наближеного розв'язку (18) подамо у вигляді суми п'яти доданків:

$$u(x) - u_{N,M}(x) = D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5,$$

де

$$D_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2}\sin(2k\pi x)[(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k},$$

$$D_2 = -\sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)] A^{-1} [(I+A)^{-1} A]^j f_0,$$

$$D_3 = \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2}[(2k\pi)^2 I + A]^{-1} (\cos(2k\pi x) - 1) f_{c,k},$$

$$D_4 = -\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}[(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} [v_j(1-x) + v_j(x)][(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k},$$

$$D_5 = -\sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2}[(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=1}^{M} [v_j(1-x) + v_j(x)][(I+A)^{-1} A]^j f_{c,k}.$$

Оцінимо кожен із них. Маємо

$$\left\| \frac{D_1}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2}\, \frac{\sin(2k\pi x)}{\min(x, 1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{s,k} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}|\sin(2k\pi x)|}{\min(x, 1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} [(2k\pi)^2 + \lambda]^{-1} dE(\lambda) f_{s,k} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2k\pi\sqrt{2}}{(2k\pi)^2 + \lambda_0} \| f_{s,k} \| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} e^{-\sqrt{k}} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \| \le$$

$$\le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \| \le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \left(\int_{N}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{s,k} \|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \| f_s \|. \qquad (22)$$

Застосовуючи леми 1 і 3, одержимо оцінку

$$\left\| \frac{D_2}{\min(x, 1-x)} \right\| = \left\| \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x) + v_j(x)}{\min(x, 1-x)} A^{-1} [(I+A)^{-1} A]^j f_0 \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{|v_j(1-x)|+|v_j(x)|}{\min(x,1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{-1} e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j \, dE(\lambda)\, e^A f_0 \right\| \le$$

$$\le \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \max_{\lambda \ge \lambda_0} \lambda^{-1} e^{-\lambda} [(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j \, \| e^A f_0 \| =$$

$$= \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{2}{3} \frac{e^{1-\sqrt{j}}}{\sqrt{j}-1} \left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j \| e^A f_0 \| \le \frac{2}{3} \frac{e^{1-\sqrt{M+1}}}{\sqrt{M+1}-1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j \| e^A f_0 \| \le$$

$$\le \frac{2e(1+\sqrt{2})\cdot 0{,}62}{3} \frac{e^{-\sqrt{M}}}{\sqrt{M}} \| e^A f_0 \| \quad (M+1 \ge (\lambda_0+1)^2). \tag{23}$$

Тут використано нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{M+1}-1} = \frac{\sqrt{M+1}+1}{M} \le \frac{\sqrt{2M}+\sqrt{M}}{M} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{M}} \quad (M \ge 1)$$

та враховано збіжність числового ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j = 0{,}6159302120\ldots < 0{,}62$$

за логарифмічною ознакою:

$$\frac{-\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)^j}{\ln j} = \frac{-j\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)}{\ln j} \ge l > 1 \quad \forall j \ge j_0 .$$

Далі знайдемо

$$\left\| \frac{D_3}{\min(x,1-x)} \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \sqrt{2} \frac{\cos(2k\pi x)-1}{\min(x,1-x)} [(2k\pi)^2 I + A]^{-1} f_{c,k} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}\sin^2(k\pi x)}{\min(x,1-x)} \left\| \int_{\lambda_0}^{+\infty} [(2k\pi)^2+\lambda]^{-1} dE(\lambda) f_{c,k} \right\| \le$$

$$\le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}k\pi}{(2k\pi)^2+\lambda_0} \| f_{c,k} \| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} e^{-\sqrt{k}} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \| \le$$

$$\le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \| \le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\le \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{2}\pi} \left(\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \frac{e^{-\sqrt{N}}}{\sqrt{N}} \| f_c \| . \tag{24}$$

Маємо

$$\left\| \frac{D_4}{\min(x,1-x)} \right\| =$$

$$=\left\| -\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}[(2k\pi)^2 I + A]^{-1} \sum_{j=M+1}^{\infty} \frac{v_j(1-x)+v_j(x)}{\min(x,1-x)}[(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k}\right\| \le$$

$$\le \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=M+1}^{\infty}\frac{|v_j(1-x)|+|v_j(x)|}{\min(x,1-x)}\left\|\int_{\lambda_0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}[(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j}{(2k\pi)^2+\lambda}dE(\lambda)e^A f_{c,k}\right\|\le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k\pi)^2}\|e^A f_{c,k}\|\sum_{j=M+1}^{\infty}\sup_{\lambda\ge\lambda_0} e^{-\lambda}[(1+\lambda)^{-1}\lambda]^j =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\|e^A f_{c,k}\|\sum_{j=M+1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1-\sqrt{4j+1}}{2}}}{\sqrt{j}}\sqrt{j}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^A f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}\frac{e^{\frac{1-\sqrt{4(M+1)+1}}{2}}}{\sqrt{M+1}}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2}\frac{\pi^2}{\sqrt{90}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|e^A f_{c,k}\|^2\right)^{1/2}\frac{e^{\frac{1}{2}-\sqrt{M}}}{\sqrt{M}}3{,}94=$$

$$=\frac{3{,}94\sqrt{e}}{18\sqrt{5}}\frac{e^{-\sqrt{M}}}{\sqrt{M}}\|f_c\|_A \quad (M+1\ge(\lambda_0+1)\lambda_0). \tag{25}$$

Тут використано леми 1 і 3 та враховано збіжність числового ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{j}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j = 3{,}930506503\ldots < 3{,}94,$$

яка випливає з логарифмічної ознаки:

$$\frac{-\ln\left[\sqrt{j}\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)^j\right]}{\ln j} = -\frac{1}{2}+\frac{-j\ln\left(1-\frac{2}{1+\sqrt{4j+1}}\right)}{\ln j}\ge l>1 \quad \forall j\ge j_0.$$

П'ятий доданок оцінимо так:

$$\left\|\frac{D_5}{\min(x,1-x)}\right\| = \left\| -\sum_{k=N+1}^{\infty}\sqrt{2}[(2k\pi)^2 I + A]^{-1}\sum_{j=1}^{M}\frac{v_j(1-x)+v_j(x)}{\min(x,1-x)}[(I+A)^{-1}A]^j f_{c,k}\right\|$$

$$\le \sqrt{2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}\frac{|v_j(1-x)|+|v_j(x)|}{\min(x,1-x)}\left\|\int_{\lambda_0}^{+\infty}\frac{[(I+\lambda)^{-1}\lambda]^j}{(2k\pi)^2+\lambda}dE(\lambda)f_{c,k}\right\|\le$$

$$\le \frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{(2k\pi)^2}\|f_{c,k}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{M}{4\pi^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{k}}}{k^2}\|e^{\sqrt{k}}f_{c,k}\|\le$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} Me^{-\sqrt{N}} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{\sqrt{2}}{6\pi^2} Me^{-\sqrt{N}} \left(\int_N^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| e^{\sqrt{k}} f_{c,k} \|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{3\sqrt{6}\pi^2} \frac{Me^{-\sqrt{N}}}{N^{3/2}} \| f_c \| . \quad (26)$$

З нерівностей (22)–(26) випливає твердження теореми. □

ВИСНОВКИ

Оцінка (21) свідчить про те, що за умови «експоненціального» типу гладкості векторів $f_0, f_{c,k}, f_{s,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, у розкладі в ряд Фур'є правої частини диференціального рівняння (1) метод (18) має суперекспоненціальну швидкість збіжності. Вплив крайового ефекту (відстані аргументу x від межових точок проміжку) охарактеризовано за допомогою вагової функції $\min(x, 1-x)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Галба Е.Ф. О порядке точности разностной схемы для уравнения Пуассона со смешанным граничным условием. *Сб. «Оптимизация алгоритмов программного обеспечения ЭВМ»*. Киев: Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова АН УССР, 1985. С. 30–34.
2. Makarov V. On a priori estimate of difference schemes giving an account of the boundary effect. *Comptes rendus de l'Acad'emie Bulgare des Sciences* (*Proc. the Bulgarian Academy of Sciences*). 1989. V. 42. № 5. P. 41–44.
3. Молчанов И.Н., Галба Е.Ф. О сходимости разностной схемы, аппроксимирующей задачу Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами. *Сб. «Численные методы и технология разработки пакетов прикладных программ»*. Киев: Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова АН УССР, 1990. С. 161–165.
4. Макаров В.Л., Демків Л.І. Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект. *Доп. НАН України*. 2003. № 2. С. 26–32.
5. Makarov V., Demkiv L. Accuracy estimates of differences schemes for quasi-linear parabolic equations taking into account the initial-boundary effect. *Computational Methods in Applied Mathematics*. 2003. Vol. 3, Iss. 4. P. 579–595.
6. Mayko N.V. The boundary effect in the error estimate of the finite-difference scheme for the two-dimensional heat equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2013. N 3(113). P. 91–106.
7. Майко Н.В., Рябичев В.Л. Оценка точности разностной схемы для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевых условий. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 5. С. 113–124.
8. Майко Н.В. Улучшенные оценки точности разностной схемы для двумерного параболического уравнения с учетом эффекта от краевых и начальных условия. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 1. С. 99–107.
9. Майко Н.В. Оценка с весом точности разностной схемы повышенного порядка аппроксимации для двумерного уравнения Пуассона с учетом эффекта от краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 1. С. 145–153.
10. Майко Н.В. Схема повышенного порядка точности для двумерного уравнения Пуассона в прямоугольнике с учетом влияния краевого условия Дирихле. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 4. С. 122–134.
11. Makarov V.L., Mayko N.V. The boundary effect in the accuracy estimate for the grid solution of the fractional differential equation. *Computational Methods in Applied Mathematics*. Vol. 19, Iss. 2. P. 379–394.
12. Макаров В.Л., Майко Н.В. Крайовий ефект в оцінці точності сіткового методу для розв'язування диференціального рівняння з дробовою похідною. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 1. С. 80–95.

13. Gavrilyuk I.P., Makarov V.L, Mayko N.V. Weighted estimates of the Cayley transform method for abstract differential equations. *Computational Methods in Applied Mathematics*. https://doi.org/10.1515/cmam-2019-0120

14. Макаров В.Л. Поліноми Мейкснера та їх властивості. *Доп. НАН України*. 2019. № 7. С. 3–8.

Надійшла до редакції 11.07.2019

Н.В. Майко

СУПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КЭЛИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрена краевая задача для абстрактного дифференциального уравнения 2-го порядка с операторным коэффициентом в гильбертовом пространстве. С помощью преобразования Кэли операторного коэффициента A и полиномов типа Майкснера от аргумента x решение задачи представлено в виде бесконечного ряда. В качестве приближенного решения взята конечная сумма N слагаемых этого ряда. Доказаны оценки (с весом) точности такой аппроксимации в зависимости не только от параметра дискретизации N, но и от расстояния от аргумента x до граничных точек отрезка. Предложенный алгоритм имеет суперэкспоненциальную скорость сходимости.

Ключевые слова: краевая задача, гильбертово пространство, операторный коэффициент, преобразование Кэли, оценки с весом, суперэкспоненциальная скорость сходимости.

N.V. Mayko

SUPER-EXPONENTIAL RATE OF CONVERGENCE OF THE CAYLEY TRANSFORM METHOD FOR AN ABSTRACT DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. A boundary-value problem (BVP) for an abstract differential equation with an operator coefficient in the Hilbert space is investigated. The exact solution is presented as an infinite series by means of the Cayley transform of the operator coefficient A and the Meixner type polynomials in the independent variable x. The approximate solution is given by the truncated sum of that series with N summands. The error estimates (with the weight function) depending not only on the discretization parameter N but also on the distance of the point x to the boundary of the interval are proven. They demonstrate that our algorithm has the super-exponential rate of convergence.

Keywords: boundary-value problem (BVP), Hilbert space, operator coefficient, Cayley transform, weighted estimates, super-exponentially convergent algorithm.

Майко Наталія Валентинівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: mayko@knu.ua.