

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ ПОДДЕРЖАНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

Аннотация. Рассмотрено решение задачи оптимального управления процессом нагрева теплоносителя, циркулирующего в системе теплоснабжения. Объем подаваемого тепла для нагрева теплоносителя в печи определяется линейной зависимостью от температуры, измеряемой в точках замера. Задача заключается в оптимизации параметров линейной обратной связи, мест расположения и числа точек замера. Получены формулы для градиента оптимизируемого функционала, которые используются в методах оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: управление нагревом теплоносителя, точка замера, обратная связь, градиент функционала.

ВВЕДЕНИЕ

В работе предложен подход к построению системы управления с обратной связью объектами с распределенными параметрами. В качестве объекта выбрана система теплоснабжения, в которую поступает жидкость, нагреваемая в теплообменнике, представляющем собой паровую рубашку [1]. В некоторых точках теплообменника установлены датчики температуры, в зависимости от значений показаний которых подается тепло в теплообменник. Процесс теплообмена в теплообменнике описывается гиперболическим уравнением (переноса) первого порядка [1]. В краевых условиях имеется запаздывающий по времени аргумент, обусловленный временем, необходимым для прохождения нагретой жидкости по системе теплоснабжения.

Отметим, что в последние годы увеличился интерес к задачам оптимального управления объектами с распределенными параметрами, описываемыми различными типами дифференциальных уравнений с частными производными и видами начально-краевых условий [2–9]. Особую сложность представляют задачи управления (регулирования) с обратной связью. Если для объектов с сосредоточенными параметрами эти задачи достаточно хорошо изучены [10, 11], то задачи управления с обратной связью объектами, описываемыми уравнениями с частными производными, исследованы значительно меньше [6–9, 11, 12]. Во-первых, это связано со сложностью практической реализации телемеханических систем управления объектами, распределенными в пространстве и времени [13]. Эта сложность обусловлена отсутствием практической возможности постоянного или даже дискретного во времени оперативного получения информации о состоянии всего объекта (во всех его точках). Во-вторых, существуют проблемы математического и вычислительного характера, так как решение начально-краевых задач относительно уравнений с частными производными требует в определенной мере длительного времени, что зачастую не позволяет строить системы управления объектами с распределенными параметрами в режиме реального масштаба времени.

Предлагаемый в работе подход к синтезу оптимального управления процессом теплоснабжения основан на использовании информации о состоянии процесса в конечном числе точек замеров. К тому же, в задаче оптимизируемыми являются как сами места размещения точек замера, так и их число. Получены фор-

мулы градиента функционала по оптимизируемым параметрам управления с обратной связью, использованные при численном решении задачи с применением итерационных методов оптимизации первого порядка. Эти формулы позволяют сформулировать необходимые условия оптимальности в различных формах — аналогах принципа максимума Понтрягина.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Процесс нагрева теплоносителя в паровой печи нагреваемого аппарата (трубчатого теплообменника) отопительной системы можно описать уравнением переноса [1, 14]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha [\vartheta(t) - u(x, t)], \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — температура теплоносителя в точке x нагревательного аппарата в момент времени t ; l — длина трубки нагревательного аппарата, в котором осуществляется нагрев теплоносителя; a — скорость движения теплоносителя в системе теплоснабжения, величина которой постоянна для всех точек системы теплоснабжения, т.е. предполагается, что движение является установившимся (стационарным); α — заданное значение коэффициента теплообмена между печью и теплоносителем в нагревательном аппарате; T — время (достаточно большое) управления процессом; $\vartheta(t)$ — управляемая температура пара, подаваемого внутрь печи, посредством которой осуществляется нагрев теплоносителя, удовлетворяющая технологическому ограничению

$$\underline{\vartheta} \leq \vartheta(t) \leq \bar{\vartheta}. \quad (2)$$

Предполагается, что линейная длина L системы теплоснабжения намного превышает длину трубчатого теплообменника l , т.е. $L \gg l$. Нагретому в печи теплоносителю необходимо время $T^d = L/a$ для того, чтоб вернуться на вход печи, т.е.

$$u(0, t) = (1 - \gamma)u(l, t - T^d), \quad t > 0, \quad (3)$$

γ — постоянная величина, определяющая потери тепла в процессе движения в теплосети, в основном, существенно зависящая от температуры внешней среды. С учетом практических соображений имеет место очевидное условие:

$$0 \leq \gamma \leq 1. \quad (4)$$

Обозначим $\Gamma \in [0, 1]$ множество возможных значений γ , удовлетворяющих (3), (4). Предполагается, что на этом множестве задана функция плотности $\rho_\Gamma(\gamma)$, удовлетворяющая условиям

$$\rho_\Gamma(\gamma) \geq 0, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \int_\Gamma \rho_\Gamma(\gamma) d\gamma = 1.$$

Задано начальное условие:

$$u(x, t) = u_0 = \text{const}, \quad x \in [0, l], \quad -T^d < t < 0. \quad (5)$$

Задача управления процессом нагрева теплоносителя заключается в поддержании температуры в печи, обеспечивающей заданную температуру V теплоносителя на выходе печи при всевозможных допустимых величинах потерь тепла теплоносителем при ее движении в системе теплоснабжения, определяемых значениями $\gamma \in \Gamma$, при условии, что начальное распределение температуры u_0 близко к V .

Пусть в произвольных M точках $\xi_i \in [0, l]$, $i = 1, 2, \dots, M$, нагревательного аппарата установлены датчики (рис. 1 [1]), в которых проводятся замеры температуры непрерывно во времени:

$$u_i(t) = u(\xi_i, t), \quad t \in [0, T], \quad (6)$$

или в дискретные моменты времени

$$u_{ij} = u(\xi_i, t_j), \quad (7)$$

$$t_j \in [0, T], \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

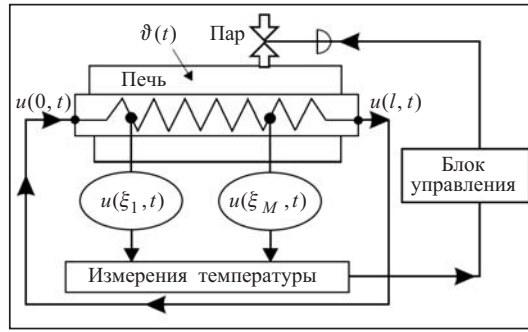


Рис. 1. Схема управления трубчатым теплообменником с паровым обогревом

Для построения системы управления нагревом печи с непрерывной обратной связью предлагается следующий вариант назначения текущего значения температуры подаваемого пара в зависимости от результатов замеров состояния процесса в замерных точках:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^M \lambda_i \tilde{k}_i [u(\xi_i, t) - z_i]. \quad (8)$$

Здесь \tilde{k}_i — коэффициент усиления; z_i — эффективная температура в точке ξ_i , за величиной отклонения от которой должен осуществляться контроль в этой точке; $\lambda_i = \text{const}$ — весовой коэффициент, определяющий важность замера в точке ξ_i , $i = 1, 2, \dots, M$, $\lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in E^M : 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, M, \sum_{i=1}^M \lambda_i = 1 \right\}$. Ясно, что ве-

личины z_i определяются значением желаемой величины температуры V на выходе теплообменника.

Введем комплексные параметры

$$k_i = \frac{\lambda_i \tilde{k}_i}{L}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

В этом случае формула (8) для температуры пара, подаваемого в печь, устанавливаемой по результатам замеров, примет вид

$$\vartheta(t) = \sum_{i=1}^M k_i [u(\xi_i, t) - z_i]. \quad (9)$$

Здесь $k = (k_1, k_2, \dots, k_M)'$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_M)'$ и $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M)'$ являются векторами параметров обратной связи, определяющими текущее значение управления (температуры в печи) в зависимости от замеренных значений температуры в точках замеров теплообменника, ' — знак транспонирования. Пусть $y \in R^{3M}$ — $3M$ -мерный вектор оптимизируемых параметров $y = (k, z, \xi)'$. Подставляя (9) в (1), получим

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \alpha \left[\sum_{i=1}^M k_i [u(\xi_i, t) - z_i] - u(x, t) \right], \quad (x, t) \in \Omega = (0, l) \times (0, T]. \quad (10)$$

Минимизируемый критерий качества управления зададим в следующем виде:

$$J(y; \gamma) = \int_{\Gamma} I(y; \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \quad (11)$$

$$I(y; \gamma) = \int_0^T [u(l, t; y, \gamma) - V]^2 dt + \sigma \|y - y^0\|_{R^{3M}}^2, \quad (12)$$

где $u(x, t; y, \gamma)$ — решение начально-краевой задачи (1), (3), (5) при конкретно выбранных допустимых значениях параметров обратной связи y и параметре потерь тепла $\gamma \in \Gamma$; $y^0 = (k^0, z^0, \xi^0) \in R^{3M}$ и $\sigma \geq 0$ — параметры регуляризации. Таким образом, задача управления с обратной связью нагревом теплоносителя в теплообменнике, размещенном в печи, приведена к задаче параметрического оптимального управления. Специфика задачи заключается в том, что она описывается точечно нагруженным дифференциальным уравнением (10) (из-за наличия в уравнении значения неизвестной функции $u(x, t)$ в заданных точках $\xi_i, i=1, 2, \dots, M$, пространственной переменной) с краевыми условиями с запаздывающим аргументом (3) [15–20].

На оптимизируемые управляющие параметры обратной связи y , учитывая переобозначения (8), могут быть наложены ограничения, исходя из технических, технологических соображений:

$$0 \leq \xi_i \leq l, \underline{k}_i \leq k_i \leq \bar{k}_i, \underline{z}_i \leq z_i \leq \bar{z}_i, i=1, 2, \dots, M. \quad (13)$$

Здесь $\underline{k}_i, \bar{k}_i, \underline{z}_i, \bar{z}_i, i=1, 2, \dots, M$, — заданные величины. Значения $\underline{k}_i, \bar{k}_i, i=1, 2, \dots, M$, определяются из формулы (9) с учетом ограничения (2) и априорной информации о возможных и допустимых значениях температуры пара и теплоносителя. Значения $\underline{z}_i, \bar{z}_i, i=1, 2, \dots, M$, определяются в основном желаемым значением температуры теплоносителя V на выходе нагревательного аппарата.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (3)–(5), (10)–(13)

Для численного решения полученной задачи параметрического оптимального управления нагруженной системой с распределенными параметрами предложено применить методы первого порядка, например, метод проекции градиента [21]. Для построения минимизирующей последовательности $y^v, v=0, 1, \dots$, используем итерационный процесс

$$y^{v+1} = P_{(13)}[y^v - \mu_v \text{grad } J(y^v)], v=0, 1, \dots \quad (14)$$

Здесь $P_{(13)}(y)$ — оператор проектирования $3M$ -мерной точки $y = (k, z, \xi)'$ на множество, определенное ограничениями (13); $\mu_v > 0$ — шаг в направлении спроектированного антиградиента. Начальное приближение y^0 может быть произвольным, в частности, удовлетворяющим условиям (13). Вследствие простоты структуры допустимого множества оптимизируемых параметров, определенного ограничениями (13), оператор проектирования имеет конструктивный характер и легко реализуем. Для построения процедуры (14) используем формулы для компонент градиента функционала (11), (12) по оптимизируемым параметрам

$$\text{grad } J(y) = \left(\frac{\partial J(\xi, k, z)}{\partial \xi}, \frac{\partial J(\xi, k, z)}{\partial k}, \frac{\partial J(\xi, k, z)}{\partial z} \right)'$$

приведенные в следующей теореме.

Теорема 1. Градиент функционала в задаче (10), (3)–(5), (11), (12) для допустимых управляющих параметров $y = (k, z, \xi)'$ определяется следующими формулами:

$$\text{grad}_{\xi_i} J(y) = \int_{\Gamma} \left\{ -\alpha k_i \int_0^T \left(\int_0^l \psi(x, t; y, \gamma) dx \right) u_x(\xi_i, t; y, \gamma) dt + \right. \\ \left. + 2\sigma(\xi_i - \xi_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (15)$$

$$\text{grad}_{k_i} J(y) = \int_{\Gamma} \left\{ -\alpha \int_0^T (u(\xi_i, t; y, \gamma) - z_i) \left(\int_0^l \psi(x, t; y, \gamma) dx \right) dt + \right. \\ \left. + 2\sigma(k_i - k_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (16)$$

$$\text{grad}_{z_i} J(y) = \int_{\Gamma} \left\{ \alpha k_i \int_0^l \psi(x, t; y, \gamma) dx + 2\sigma(z_i - z_i^0) \right\} \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma, \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (17)$$

где $u(x, t; y, \gamma)$ — решение задачи (10), (3)–(5), $\psi(x, t; y, \gamma)$ — решение следующей сопряженной начально-краевой задачи:

$$\psi_t(x, t) + a\psi_x(x, t) = \alpha\psi(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (18)$$

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (19)$$

$$\psi(l, t) = -\frac{2}{a}(u(l, t) - V), \quad t \in (T - T^d, T], \quad (20)$$

$$\psi(l, t) = -\frac{\alpha}{a}(1 - \gamma)\psi(0, t + T^d) - \frac{2}{a}(u(l, t) - V), \quad t \in (0, T - T^d], \quad (21)$$

в точках ξ_i , $i=1, 2, \dots, M$, при $t \in [0, T]$, удовлетворяющей условиям

$$\psi(\xi_i^-, t) = \psi(\xi_i^+, t) + \frac{\alpha}{a} k_i \int_0^l \psi(x, t) dx, \quad i=1, 2, \dots, M. \quad (22)$$

Доказательство. Используем известную технологию получения формул для приращения функционала за счет приращения оптимизируемых аргументов функционала. При этом линейная часть приращения функционала по каждому из аргументов и будет искомой компонентой градиента функционала по соответствующему аргументу [10, 21].

Прежде чем приступить к получению формул для компонент градиента функционала, отметим следующее. Учитывая, что параметр $\gamma \in \Gamma$, определяющий величину потерь тепла, не зависит от самого процесса нагрева теплоносителя в теплообменнике, из (11), (12) имеем:

$$\text{grad } J(y) = \text{grad} \int_{\Gamma} I(y; \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma = \int_{\Gamma} \text{grad } I(y; \gamma) \rho_{\Gamma}(\gamma) d\gamma. \quad (23)$$

Поэтому получим формулу $\text{grad } I(y; \gamma)$ при каком-либо одном допустимом произвольно заданном параметре потерь тепла $\gamma \in \Gamma$.

Пусть $u(x, t; y, \gamma)$ — решение нагруженной начально-краевой задачи (10), (3), (5) при произвольно выбранном векторе оптимизируемых параметров $y = (\xi, k, z)'$ и заданном значении параметра потерь тепла $\gamma \in \Gamma$. Для краткости, где это не порождает неоднозначность, в решении $u(x, t; y, \gamma)$ параметры y, γ будем опускать.

Пусть параметры $y = (\xi, k, z)'$ получили допустимое приращение $\Delta y = (\Delta \xi, \Delta k, \Delta z)'$, а $\tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x, t; \tilde{y}) = u(x, t) + \Delta u(x, t)$ — решение задачи (10),

(3), (5), которое соответствует приращенному вектору аргументов $\tilde{y} = y + \Delta y$. Подставляя функцию $\tilde{u}(x, t)$ в условия (10), (3), (5), получим следующую начально-краевую задачу с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно приращения $\Delta u(x, t)$ фазовой переменной:

$$\Delta u_t(x, t) + a \Delta u_x(x, t) = \alpha \sum_{i=1}^M [k_i \Delta u(\xi_i, t) + k_i u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + (u(\xi_i, t) - z_i) \Delta k_i - k_i \Delta z_i] - \alpha \Delta u(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (24)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l], \quad (25)$$

$$\Delta u(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < T^d, \\ (1 - \gamma) \Delta u(l, t - T^d), & \text{если } t \geq T^d. \end{cases} \quad (26)$$

В получении формулы (24) было использовано соотношение

$$u(\xi_i + \Delta \xi_i, t) = u(\xi_i, t) + u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + o(|\Delta \xi_i|).$$

Для приращения функционала (12) несложно непосредственно получить представление

$$\begin{aligned} \Delta I(y; \gamma) &= I(\tilde{y}; \gamma) - I(y; \gamma) = I(y + \Delta y; \gamma) - I(y; \gamma) = \\ &= 2 \int_0^T [u(l, t; y, \gamma) - V] \Delta u(l, t) dt + 2\sigma \sum_{i=1}^{3M} (y_i - y_i^0) \Delta y_i, \\ \sum_{i=1}^{3M} (y_i - y_i^0) \Delta y_i &= \sum_{i=1}^{3M} [(\xi_i - \xi_i^0) \Delta \xi_i + (k_i - k_i^0) \Delta k_i + (z_i - z_i^0) \Delta z_i]. \end{aligned}$$

Пусть функция $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, \gamma)$ — пока произвольная непрерывная всюду в Ω кроме точек $x = \xi_i, i = 1, 2, \dots, M$, дифференцируемая по x при $x \in (\xi_i, \xi_{i+1}), i = 0, 1, \dots, M, \xi_0 = 0, \xi_{M+1} = l$, дифференцируемая по t при $t \in (0, T)$. Наличие аргументов y и γ у функции $\psi(x, t; y, \gamma)$ указывает на то, что она может меняться при изменении вектора параметров обратной связи y и параметра потерь тепла γ . Там, где это возможно, аргументы y и γ функции $\psi(x, t; y, \gamma)$ указаны не будут. Умножим уравнение (24) на $\psi(x, t)$ и проинтегрируем его по области Ω . С учетом принятых предположений и условий (25), (26) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt + a \sum_{i=0}^M \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^T \psi(x, t) \Delta u_x(x, t) dt dx - \\ & - \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^M [k_i \Delta u(\xi_i, t) + k_i u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + (u(\xi_i, t) - z_i) \Delta k_i - k_i \Delta z_i] dx dt + \\ & + \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u(x, t) dx dt = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Выполняя интегрирование по частям отдельно для первого и второго членов (27), с учетом (25), (26) получим

$$\int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta u_t(x, t) dx dt = \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^T \int_0^l \psi_t(x, t) \Delta u(x, t) dx dt, \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
& a \sum_{i=0}^M \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \int_0^T \psi(x, t) \Delta u_x(x, t) dt dx = a \int_0^T [\psi(l, t) \Delta u(l, t) - \psi(0, t) \Delta u(0, t)] dt + \\
& + a \sum_{i=1}^M \int_0^T [\psi(\xi_i^-, t) - \psi(\xi_i^+, t)] \Delta u(\xi_i, t) dt - a \int_0^T \int_0^l \psi_x(x, t) \Delta u(x, t) dx dt = \\
& = a \int_0^T \psi(l, t) \Delta u(l, t) dt - a(1-\gamma) \int_{T^d}^T \psi(0, t) \Delta u(l, t - T^d) dt + \\
& + a \sum_{i=1}^M \int_0^T [\psi(\xi_i^-, t) - \psi(\xi_i^+, t)] \Delta u(\xi_i, t) dt - a \int_0^T \int_0^l \psi_x(x, t) \Delta u(x, t) dx dt = \\
& = a \int_0^T \psi(l, t) \Delta u(l, t) dt - a(1-\gamma) \int_0^{T-T^d} \psi(0, t + T^d) \Delta u(l, t) dt + \\
& + a \sum_{i=1}^M \int_0^T [\psi(\xi_i^-, t) - \psi(\xi_i^+, t)] \Delta u(\xi_i, t) dt - a \int_0^T \int_0^l \psi_x(x, t) \Delta u(x, t) dx dt. \quad (29)
\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения $\psi(\xi_i^-, t) = \psi(\xi_i - 0, t)$, $\psi(\xi_i^+, t) = \psi(\xi_i + 0, t)$.
Учитывая (27)–(29), для приращения функционала будем иметь:

$$\begin{aligned}
\Delta I = & \int_{T-T^d}^T [\alpha \psi(l, t) + 2(u(l, t) - V)] \Delta u(l, t) dt + \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx + \\
& + \int_0^{T-T^d} [\alpha \psi(l, t) + a(1-\gamma) \psi(0, t + T^d) + 2(u(l, t) - V)] \Delta u(l, t) dt + \\
& + \int_0^T \int_0^l [-\psi_t(x, t) - \alpha \psi_x(x, t) + \alpha \psi(x, t)] \Delta u(x, t) dx dt + \\
& + a \sum_{i=1}^M \int_0^T \left[\psi(\xi_i^-, t) - \psi(\xi_i^+, t) - \frac{\alpha}{a} k_i \int_0^l \psi(x, t) dx \right] \Delta u(\xi_i, t) dt - \\
& - \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^M [k_i u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + (u(\xi_i, t) - z_i) \Delta k_i - k_i \Delta z_i] dx dt + \\
& + 2\sigma \sum_{i=1}^M [(\xi_i - \xi_i^0) \Delta \xi_i + (k_i - k_i^0) \Delta k_i + (z_i - z_i^0) \Delta z_i].
\end{aligned}$$

В силу произвольности функции $\psi(x, t)$ потребуем, чтобы она почти всюду являлась решением начально-краевой задачи (18)–(22). С учетом того, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью приращения функционала при приращениях соответствующих аргументов, получим

$$\text{grad}_{\xi_i} I = -\alpha k_i \int_0^T \left(\int_0^l \psi(x, t) dx \right) u_x(\xi_i, t) dt + 2\sigma(\xi_i - \xi_i^0), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (30)$$

$$\text{grad}_{k_i} I = -\alpha \int_0^T (u(\xi_i, t) - z_i) \left(\int_0^l \psi(x, t) dx \right) dt + 2\sigma(k_i - k_i^0), \quad i=1, 2, \dots, M, \quad (31)$$

$$\text{grad}_{z_i} I = \alpha k_i \int_0^l \psi(x, t) dx + 2\sigma(z_i - z_i^0), \quad i=1, 2, \dots, M. \quad (32)$$

Таким образом, теорему можно считать доказанной.

Дифференциальное уравнение (18) сопряженной задачи (18)–(22) с использованием δ -функции Дирака можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$\psi_t(x, t) + \alpha \psi_x(x, t) = \alpha \psi(x, t) - \alpha \int_0^l \psi(\zeta, t) d\zeta \sum_{i=1}^M k_i \delta(x - \xi_i), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (33)$$

при сохранении начально-краевых условий (19)–(21), но уже без условий скачка (22).

Для получения сопряженной начально-краевой задачи в эквивалентном (18)–(22) виде (33) и без условий скачка (22), пользуясь свойством δ -функции, третье слагаемое из равенства (27) приведем к виду

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^M (k_i \Delta u(\xi_i, t) + k_i u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + (u(\xi_i, t) - z_i) \Delta k_i - k_i \Delta z_i) dx dt = \\ & = \alpha \sum_{i=1}^M k_i \int_0^T \int_0^l \int_0^l \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \xi_i) \Delta u(\zeta, t) d\zeta dx dt + \\ & + \alpha \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^M (k_i u_x(\xi_i, t) \Delta \xi_i + (u(\xi_i, t) - z_i) \Delta k_i - k_i \Delta z_i) dx dt. \end{aligned} \quad (34)$$

Изменив в первом тройном интеграле порядок интегрирования по ζ и x и снова переименовав переменные интегрирования по ζ и x между собой, получим

$$\int_0^T \int_0^l \int_0^l \psi(\zeta, t) \delta(\zeta - \xi_i) \Delta u(\zeta, t) d\zeta dx dt = \int_0^T \int_0^l \left(\int_0^l \psi(\zeta, t) d\zeta \right) \delta(x - \xi_i) \Delta u(x, t) dx dt. \quad (35)$$

Подставляя (34), (35) в формулу (27), после перегруппировки слагаемых получим интегро-дифференциальное уравнение (33) для сопряженной задачи.

При численном решении исходной задачи оптимизации синтезируемых параметров на каждой итерации процедуры (14) решаются прямая (8)–(13) и сопряженная (18)–(22) краевые задачи с указанными выше специфическими особенностями. Для численного решения нагруженных краевых задач можно использовать методы сеток или прямых. Их применение к решению подобных задач исследовано, например, в работах [22, 23]. Для учета запаздывания в краевых условиях можно использовать «метод шагов» [24].

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧИСЛА ТОЧЕК ЗАМЕРОВ

Может оказаться, что количество точек замера состояния управляемого процесса не задано и требуется оптимизировать их число и места их размещения. В связи с этим рассмотрим следующий подход к оптимальному выбору числа точек замеров. Очевидно, что оптимальное число наблюдаемых точек в какой-то степени должно удовлетворять условию возможной минимальности их числа.

Обозначим $J_M^* = J^*(y^M; M)$ минимальное значение функционала задачи (4), (8)–(13) при заданном числе M точек наблюдения, y^M — оптимальные

значения параметров синтезированного управления с обратной связью. Ясно, что $J_M^* = J^*(y^M; M)$ как сложная функция аргумента M является невозрастающей, т.е. в общем случае имеет место неравенство

$$J^*(y^*; \cdot) \leq J^*(y^{M_1}; M_1) \leq J^*(y^{M_2}; M_2), \quad M_2 < M_1. \quad (36)$$

Здесь $J_M^* = J^*(y^M; M)$ — оптимальное значение функционала исходной задачи (1)–(9) при числе точек наблюдений, равном M ; $J^* = J^*(y^*; \cdot)$ — оптимальное значение функционала задачи с обратной связью, распределенной по всему стержню, что соответствует замерам текущего состояния «почти» во всех точках стержня, т.е.

$$J^*(y^M; \cdot) = \lim_{M \rightarrow \infty} J^*(y^M; M).$$

Из (36) следует, что при увеличении числа наблюдаемых точек оптимальные значения целевого функционала могут лишь уменьшаться и приближаться сколь угодно близко к J^* .

Может оказаться, что существует определенное конечное значение M^* , для которого имеет место (рис. 2):

$$J^*(y^M; M) = J^* \quad \text{при } M > M^*.$$

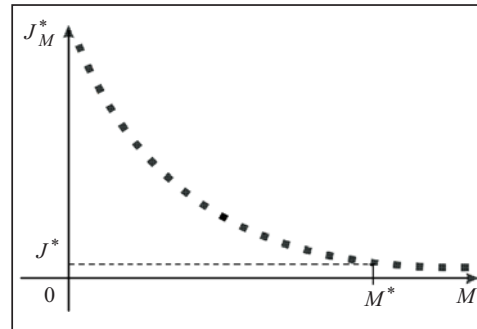


Рис. 2. Зависимость оптимального значения целевого функционала от числа замеров M

В качестве оптимального числа наблюдаемых точек предлагается принять такое минимальное значение M^* , при котором впервые выполняется одно из следующих неравенств:

$$\begin{aligned} \Delta J^*(y^{M^*}; M^*) &= |J^*(y^{M^*+1}; M^*+1) - J^*(y^{M^*}; M^*)| \leq \delta, \\ \Delta J^*(y^{M^*}; M^*) / J^*(y^{M^*}; M^*) &\leq \delta. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь δ — заданное положительное число, определяемое требуемой точностью решения задачи оптимизации числа наблюдаемых точек.

По результатам решения задачи синтеза параметров управления нагревом стержня с заданным числом M наблюдаемых точек можно уменьшить их число M , если для полученного оптимального вектора ξ^M для расположения каких-либо двух соседних точек наблюдения выполнилось условие

$$|\xi_{j+1}^M - \xi_j^M| \leq \delta_1, \quad j=1, 2, \dots, M-1, \quad (38)$$

где $\delta_1 > 0$ — заданное достаточно малое число. Выполнение условия (38) позволяет оставить одну из двух соседних точек замера, а следовательно, уменьшить на единицу число точек замера.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем результаты решения следующей модельной задачи. Процесс описывается краевой задачей (1)–(5). Требуется спроектировать систему оптимального управления (регулирования) процессом нагрева теплоносителя сначала с двумя точками обратной связи, т.е. $M = 2$. Таким образом, требуется опреде-

лить $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — места размещения двух датчиков температуры и параметры обратной связи $k, z \in R^2$. Следовательно, общее число синтезируемых параметров равно шести.

Задача решена при следующих значениях данных, участвующих в ее постановке: $l=1; a=1; \alpha=0.1; T^d=0.2, T=5, V=70, \Gamma=[0; 0.2], \underline{d}=55, \bar{d}=75, \bar{k}_1=\bar{k}_2=8, \underline{k}_1=\underline{k}_2=1, \bar{z}_1=\bar{z}_2=75, \underline{z}_1=\underline{z}_2=57$. Функция плотности $\rho_\Gamma(\gamma)$ в расчетах была принята равномерно распределенной на $[0; 0.2]$, а аппроксимация интеграла по Γ осуществлялась методом прямоугольников с шагом 0.05. Отметим, что значения \bar{k}_1, \bar{k}_2 были подобраны с использованием результатов проведенных пробных расчетов, при которых требовалось выполнение технологического условия (2) при заданных \underline{d}, \bar{d} . Численные эксперименты выполнены при разных начальных значениях параметров $(y^0)^j = (k_1^0, k_2^0, z_1^0, z_2^0, \xi_1^0, \xi_2^0)^j, j=1, 2, \dots, 5$, использованных для итерационной процедуры оптимизации (14). В табл. 1 приведены эти значения и соответствующие значения функционала в этих точках.

В табл. 2 представлены значения параметров $(y^{(6)})^j = (k_1^{(6)}, k_2^{(6)}, z_1^{(6)}, z_2^{(6)}, \xi_1^{(6)}, \xi_2^{(6)})^j$ и функционала $J(y^{(6)})^j$, полученные на шестой итерации метода проекции градиента из начальных точек $(y^0)^j, j=1, 2, \dots, 5$, приведенных в табл.1.

Как видно из табл. 3, в которой приведены результаты экспериментов по оптимизации M — числа точек замеров, при $M=6$ и $M=7$ минимальные значения функционалов удовлетворяют условию (37), а при $M=7$ оптимальные значения второй и третьей компонент вектора ξ удовлетворяют условию (38) при $\delta = \delta_1 = 0.01$. Значит можно считать, что оптимальным числом точек замера является $M^* = 6$.

Таблица 1. Начальные значения оптимизируемых параметров $(y^0)^j, j=1, 2, \dots, \dots, 5$, и соответствующие значения функционала

j	Значения оптимизируемых параметров						Значение функционала
	$(k_1^0)^j$	$(k_2^0)^j$	$(z_1^0)^j$	$(z_2^0)^j$	$(\xi_1^0)^j$	$(\xi_2^0)^j$	
1	4	6	61	63	0.1	0.8	363.210004
2	3	5	65	60	0.2	0.9	357.150011
3	1	8	62	63	0.4	0.8	257.310003
4	5	2	63	66	0.5	0.7	165.150016
5	6	4	66	62	0.2	0.7	205.190007

Таблица 2. Значения параметров и функционала, полученные на шестых итерациях процесса (14) для различных начальных точек $(y^0)^j, j=1, 2, \dots, 5$

j	Значения оптимизируемых параметров						Значение функционала
	$(k_1^{(6)})^j$	$(k_2^{(6)})^j$	$(z_1^{(6)})^j$	$(z_2^{(6)})^j$	$(\xi_1^{(6)})^j$	$(\xi_2^{(6)})^j$	
1	5.9956	3.9952	66.9945	68.9949	0.2994	0.5994	0.3422
2	5.9977	3.9983	66.9978	68.9954	0.3000	0.6000	0.3259
3	5.9962	3.9988	66.9951	68.9948	0.2971	0.5971	0.3538
4	5.9978	3.9971	66.9991	68.9975	0.3000	0.6000	0.3145
5	5.9991	3.9961	66.9964	68.9973	0.3000	0.6000	0.3062

Таблица 3. Результаты решения задачи при разном числе точек наблюдения

M	Начальные значения		Полученные значения	
	параметров	функционала	параметров	функционала
	$(\xi^0); (k^0); (z^0)$	$J(y^0)$	$(\xi^*); (k^*); (z^*)$	$J(y^*)$
3	(0.1, 0.4, 0.7); (3, 4, 8); (61, 65, 67)	336.46	(0.300, 0.600, 0.899); (5.002, 4.201, 4.002); (66.998, 67.998, 68.998)	0.3456
4	(0.1, 0.5, 0.7, 0.8); (1, 4, 8, 2); (60, 63, 66, 67)	323.64	(0.150, 0.300, 0.600, 0.849); (5.001, 4.102, 4.006, 3.999); (66.996, 67.999, 68.001, 68.999)	0.3549
5	(0.1, 0.2, 0.5, 0.7, 0.8); (3, 5, 7, 8, 3); (61, 63, 64, 66, 67)	368.54	(0.250, 0.300, 0.610, 0.800, 0.896); (5.101, 4.126, 4.106, 4.012, 3.9982); (66.987, 67.979, 68.201, 68.571, 68.989)	0.3436
6	(0.1, 0.2, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8); (3, 5, 6, 7, 8, 3); (58, 61, 64, 65, 66, 68)	408.37	(0.208, 0.305, 0.481, 0.605, 0.805, 0.900); (5.003, 4.086, 4.015, 4.013, 3.906, 3.999); (66.997, 67.999, 68.121, 68.571, 68.989, 68.999)	0.3234
7	(0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8); (3, 4, 5, 6, 7, 8, 3); (58, 60, 63, 64, 66, 67, 70)	217.23	(0.198, 0.303, 0.307, 0.491, 0.62, 0.791, 0.901); (5.003, 4.086, 4.015, 4.013, 3.906, 3.912, 3.998); (66.998, 68.003, 68.323, 68.772, 68.979, 69.002, 69.012)	0.3023

Таблица 4. Значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрегата при разных уровнях помех в измерениях

Уровень помехи χ	Относительное отклонение $\max_{t \in [0, 1]} u(t, t) - V / V $	Значение функционала $J^*(y)$
0.00	0.021941	0.3023
0.01	0.033052	0.3543
0.03	0.038311	0.3762
0.05	0.064574	0.3916

Проведены численные эксперименты, в которых точные значения наблюдаемых состояний процесса в точках замера $u(\xi_1, t)$, $u(\xi_2, t)$ были зашумлены случайными помехами по формуле

$$u(\xi_i, t) = u(\xi_i, t)(1 + \chi(2\theta_i - 1)), \quad i = 1, 2,$$

где θ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$, χ — уровень помех.

В табл. 4 приведены полученные значения функционала и относительные отклонения между получаемой и желаемой температурами на выходе агрегата при уровнях помех, равных 0 % (без помех), 1 %, 3 %, 5 %, соответствующих значениям $\chi = 0$ (без помех), 0.01, 0.03, 0.05.

Как видно из табл. 4, управление процессом нагрева теплоносителя в печи нагреваемого аппарата с обратной связью достаточно устойчиво к погрешностям замеров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы автоматического управления с обратной связью техническими объектами и технологическими процессами с распределенными параметрами получают широкое применение в связи с существенно возросшими возможностями

средств измерительной и вычислительной техники. В работе исследована задача управления нагревательным аппаратом для нагрева теплоносителя, который обеспечивает подачу тепла в замкнутую систему теплоснабжения. Специфика исследуемой задачи, описываемой уравнением гиперболического типа первого порядка, заключается в том, что в ее краевых условиях фигурирует запаздывающий во времени аргумент. Математическая модель управляемого процесса приводится к точно нагруженному гиперболическому уравнению, а сама рассматриваемая задача приводится к задаче параметрического оптимального управления. С целью использования методов оптимизации первого порядка для численного решения задачи оптимизации мест установления датчиков и параметров управляющих воздействий с обратной связью получены формулы для соответствующих компонент градиента целевого функционала задачи. Предложенные в статье постановка задачи и подход к получению расчетных формул для ее численного решения могут быть распространены на случаи управления с обратной связью многими другими процессами, описываемыми другими типами уравнений с частными производными и начально-краевыми условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ray W.H. *Advanced process control*. McGraw-Hill Book Company, 1981. 376 p.
2. Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами*. Москва: Наука, 1975. 568 с.
3. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. *Робастная устойчивость и управление*. Москва: Наука, 2002. 303 с.
4. Айда-заде К.Р., Гашимов В.А. Оптимизация размещения сосредоточенных источников и точек контроля процесса нагрева пластины. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 4. С. 97–108.
5. Кулиев С.З. Синтез зональных управлений для одной задачи нагрева с запаздыванием в неразделенных условиях. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 1. С. 124–136.
6. Shang H., Forbes J.F., Guay M. Feedback control of hyperbolic PDE systems. *IFAC Proceedings Volumes*. 2000. Vol. 33, Iss. 10. P. 533–538.
7. Coron J.M., Wang Zh. Output feedback stabilization for a scalar conservation law with a nonlocal velocity. *SIAM J. Math. Anal.* 2013. Vol. 45, N 5. P. 2646–2665.
8. Afifi L., Lastri K., Joundi M., Amimi N. Feedback controls for exact remediability in disturbed dynamical systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*. 2018. Vol. 35, N 2. P. 411–425.
9. Mitkowski W., Bauer W., Zagórska M. Discrete-time feedback stabilization. *Archives of Control Sciences*. 2017. Vol. 27, N 2. P. 309–322.
10. Sergienko I.V., Deineka V.S. *Optimal control of distributed systems with conjugation conditions*. New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. 383 p.
11. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами. *Автомат. и телемех.* 2012. № 9. С. 3–19.
12. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева. *Автомат. и телемех.* 2017. № 9. С. 49–66.
13. Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. Москва: Мир, 1972. 416 с.
14. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва: Наука, 1966. 742 с.
15. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями. *Дифференц. уравнения*. 1989. Т. 25. № 4. С. 641–651.
16. Нахушев А.М. *Нагруженные уравнения и их применение*. Москва: Наука, 2012. 232 с.

17. Алиханов А.А., Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2008. Т. 48, № 9. С. 1619–1628.
18. Aida-zade K.R. An approach for solving nonlinearly loaded problems for linear ordinary differential equations. *Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 44, N 2. P. 338–350.
19. Abdullayev V.M. Numerical solution to optimal control problems with multipoint and integral conditions. *Proc. of the Institute of Mathematics and Mechanics*. 2018. Vol. 44, N 2. P. 171–186.
20. Абдуллаев В.М. Задача идентификации функций реакции на нагружения для стационарных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 100–110.
21. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
22. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Optimization of loading places and load response functions for stationary systems. *Comput. Math. Math. Phys.* 2017. Vol. 57, N 4. P. 634–644.
23. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.* 2016. Vol. 56, N 1. P. 93–105.
24. Эльсгольд Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Москва: Наука, 1971. 296 с.

Надійшла до редакції 20.05.2019

К.Р. Айда-заде, В.М. Абдулаев

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ ПІДТРИМАННЯ ТЕМПЕРАТУРИ В ОДНІЙ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПОСТАЧАННЯ

Анотація. Розглянуто розв'язування задачі керування процесом нагрівання теплоносія, що циркулює в системі теплопостачання. Об'єм тепла, що подається для нагрівання теплоносія в печі, визначається лінійною залежністю від замірів температури у точках замірювання. Задача полягає в оптимізації параметрів лінійного зворотного зв'язку, місць розташування та кількості точок замірювання. Отримано формули для градієнта оптимізованого функціонала, які застосовуються у методах оптимізації першого порядку. Наведено результати числових експериментів.

Ключові слова: керування нагріванням теплоносія, точка замірювання, зворотний зв'язок, градієнт функціонала.

K.R. Aida-zade, V.M. Abdullayev

CONTROL SYNTHESIS FOR TEMPERATURE MAINTAINING PROCESS IN A HEAT SUPPLY PROBLEM

Abstract. We consider the solution to the problem of optimal control of the heating process of a heat carrier circulating in the heating system. The amount of heat supplied to the heat carrier in the furnace is determined by a linear dependence on temperature measurements at some measuring points. The problem is to optimize the linear feedback parameters, the locations and the number of measuring points. We have obtained formulas for the gradient of the optimized functional, which are used to apply first-order optimization methods. The results of numerical experiments are given.

Keywords: heat carrier control, measuring point, feedback, gradient of functional.

Айда-заде Камиль Раджабович,
чл.-кор. НАН Азербайджана, профессор, доктор физ.-мат. наук, заведуючий лабораторией Института систем управления НАН Азербайджана, ведущий научный сотрудник Института математики и механики НАН Азербайджана, Баку, e-mail: kamil_aydazade@rambler.ru.

Абдуллаев Вагиф Маариф оглы,
доктор физ.-мат. наук, профессор Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности, ведущий научный сотрудник Института систем управления НАН Азербайджана, Баку, e-mail: vaqif_ab@rambler.ru.