

## НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОБИЛЬНО-НЕМОБИЛЬНОЙ МИГРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ В ПРОФИЛЬНОМ ФИЛЬТРАЦИОННОМ ПОТОКЕ

**Аннотация.** Для дробно-дифференциальной математической модели выполнена постановка краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ с учетом иммобилизации в условиях установившейся профильной фильтрации грунтовых вод из водоема к дренажу. В случае осреднения скорости фильтрации по области комплексного потенциала получены замкнутые решения краевых задач, соответствующих вариантам классических и нелокальных граничных условий. В общем случае переменной фильтрационной скорости разработана методика численного решения краевой задачи конвективной диффузии в дробно-дифференциальной постановке, освещены вопросы распараллеливания вычислений и изложены результаты компьютерных экспериментов.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, неклассические модели, конвективно-диффузионный процесс, мобильно-немобильные модели миграции в пористых средах, уравнение диффузии дробного порядка, краевые задачи, приближенные решения.

### ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена задачам математического моделирования дробно-дифференциальной динамики процессов конвективной диффузии растворимых веществ (с учетом влияния иммобилизации) в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью. Такого типа задачи возникают при решении многих вопросов охраны водных ресурсов от загрязнений промышленными и бытовыми стоками, а также в связи с необходимостью рассоления и промывки почв при мелиорации земель, опреснения грунтовых вод, их очистки от засоления и загрязнения [1]. Отметим, что в рамках классических математических моделей массопереноса указанным задачам посвящена обширная литература (см., например, [1–4]). В последнее время ряд задач, которые относятся к данному научному направлению, поставлен и решен также с использованием дробно-дифференциального подхода [5–7]. В отличие от [5–7] в данной работе применяется математическая модель миграции на основе ММ (mobile-immobile media) подхода [8–10]. Он основан на предположении, что некоторые частицы, переносимые через геопористую среду фильтрационным потоком, подчиняются закону Фика и не взаимодействуют с твердым скелетом. Они составляют подвижную часть (мобильная фаза). Другая часть (немобильная фаза) состоит из частиц, осевших на твердом скелете среды или находящихся в связанной жидкости. Если принять во внимание иммобилизацию (захват частицы скелетом грунта или попадание ее в объем связанной жидкости), то уравнение конвективной диффузии с учетом иммобилизации принимает вид [8–10]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \beta \frac{\partial C_I}{\partial t} = \mathcal{L}(C), \quad (1)$$

где  $C$ ,  $C_I$  — объемные концентрации частиц, находящихся в мобильной и немобильной фазах,  $\beta = \theta_I / \theta$ ,  $\theta$ ,  $\theta_I$  — пористость в мобильной и немобильной зонах соответственно,  $\mathcal{L}(C) = d\Delta C - \bar{v}\nabla C$ ,  $\bar{v}$  — скорость фильтрации,  $d$  — коэффициент конвективной диффузии,  $\nabla$  — оператор Гамильтона.

Согласно [10] динамика оттока частиц в немобильную фазу описывается соотношением

$$\frac{\partial C_I}{\partial t} = {}^C D_t^\gamma C, \quad (2)$$

где  ${}^C D_t^\gamma$  — оператор дробной производной Капуто–Герасимова порядка  $\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) по переменной  $t$  [11]. Тогда с учетом (2) уравнение (1) МММ модели принимает вид [8–10]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \beta {}^C D_t^\gamma C = \mathcal{L}(C), \quad (3)$$

а полная концентрация вычисляется согласно соотношению  $C_{\text{tot}} = \theta C + \theta_I C_I$ . С учетом памяти и наследственных свойств среды в процессе миграции в мобильной фазе уравнение (3) запишется в виде, аналогичном полученному в рамках математической модели водообмена в мобильно-немобильных зонах набухающих почв [12]:

$${}^C D_t^\alpha C + \beta {}^C D_t^\gamma C = \mathcal{L}(C), \quad (4)$$

где  ${}^C D_t^\alpha$  — оператор дробной производной Капуто–Герасимова порядка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) по временной переменной.

Для математической модели диффузионного процесса, базирующейся на уравнении (4), далее выполнена постановка некоторых двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ (с учетом иммобилизации) в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод из водоема в береговую дренажную трубу (водоприемник). В частности, при осреднении скорости фильтрации по области комплексного потенциала течения получены решения краевых задач как с классическими, так и нелокальными граничными условиями. В общем случае переменной фильтрационной скорости разработана методика численного решения краевой задачи в области комплексного потенциала течения.

#### ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим в рамках математической модели, базирующейся на уравнении (4), задачу моделирования дробно-дифференциальной динамики процесса конвективной диффузии растворимых веществ в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод из водоема  $AB$  к бесконечному дренажному каналу  $CD$ , заглубленному на глубину  $H$  (на рис. 1 приведены соответствующая область фильтрации ( $a$ ) и область комплексного потенциала течения ( $b$ ) для данной задачи).

Рассматриваемая фильтрационная схема достаточно хорошо изучена. Например, в работе [1] приведено замкнутое решение соответствующей плоской краевой задачи фильтрации, полученное методом конформных отображений области фильтрации  $G_z$  (рис. 1,  $a$ ) на область  $G_\omega$  (рис. 1,  $b$ ) в плоскости комплексного по-

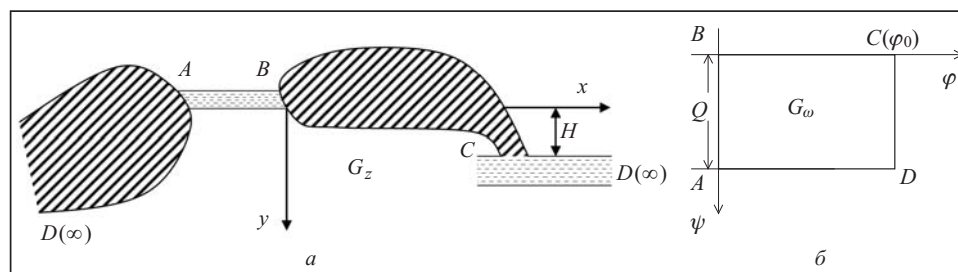


Рис. 1. Область фильтрации в физической плоскости ( $a$ ) и область комплексного потенциала течения ( $b$ )

тенциала течения  $\omega = \varphi + i\psi$  ( $\varphi$  — потенциал скорости фильтрации,  $\psi$  — функция тока). В результате решения фильтрационной задачи найдена характеристическая функция течения  $z = f(\omega)$  и тем самым определено поле скоростей течения (соответствующие соотношения приведены в [1]).

Задачу математического описания дробно-дифференциальной динамики процесса конвективной диффузии при установившейся профильной фильтрации грунтовых вод соответственно рассматриваемой фильтрационной схеме сформулируем как задачу отыскания в области  $G_z \times (0, \infty)$  решения уравнения

$${}^C D_t^\alpha C(x, y, t) + \beta {}^C D_t^\gamma C(x, y, t) = d \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) - v_x \frac{\partial C}{\partial x} - v_y \frac{\partial C}{\partial y} \quad (5)$$

$$(0 < \alpha, \gamma < 1)$$

при краевых условиях

$$C|_{AB} = C_1, \quad \frac{\partial C}{\partial n} \Big|_{AD, BC} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} \Big|_{CD} = 0, \quad (6)$$

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (7)$$

где  $C_1 = \text{const}$  — заданная концентрация растворимых веществ на входе фильтрационного потока,  $C_0(x, y)$  — заданная функция начального распределения концентрации,  $n$  — внешняя нормаль к соответствующей кривой,  $d$  — коэффициент конвективной диффузии [2],  $v_x, v_y$  — проекции вектора скорости фильтрации на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Поскольку область фильтрации  $G_z$  — неканоническая область сложной конфигурации, эффективным способом решения краевых задач рассматриваемого типа является переход к новым переменным ( $\varphi, \psi$ ) — точкам геометрически более простой области комплексного потенциала течения, являющейся [1] в данной задаче прямоугольником  $G_\omega$  (рис. 1, б) со сторонами  $\varphi_0, Q$  ( $\varphi_0 = \kappa H$ ,  $\kappa$  — коэффициент фильтрации грунта,  $Q$  — полный фильтрационный расход). Тогда краевую задачу (5)–(7) для исследования динамики миграционного процесса математически сформулируем для области комплексного потенциала течения  $G_\omega$  в виде

$${}^C D_t^\alpha C(\varphi, \psi, t) + \beta {}^C D_t^\gamma C(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left( d \Delta C(\varphi, \psi, t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) \quad (8)$$

$$(0 < \alpha, \gamma < 1),$$

$$C|_{\varphi=0} = C_1, \quad \frac{\partial C}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, \psi=Q} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (9)$$

$$C(\varphi, \psi, 0) = C_0(\varphi, \psi), \quad (10)$$

где  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}$  — оператор Лапласа.

Введя в рассмотрение переменные и параметры

$$\varphi' = \frac{\varphi}{Q}, \quad \psi' = \frac{\psi}{Q}, \quad t' = \left( \frac{v_0^2}{Q} \right)^{1/\alpha} t, \quad C' = \frac{C}{C_1}, \quad \beta' = \beta \left( \frac{v_0^2}{Q} \right)^{\gamma/\alpha-1}, \quad \varphi'_0 = \frac{\varphi_0}{Q},$$

$$d' = \frac{d}{Q}, \quad v' = \frac{v}{v_0} \quad (11)$$

( $v_0$  — характерный скоростной параметр), перепишем краевую задачу (8)–(10) в следующем виде (знак «штрих» в целях упрощения написания формул в дальнейшем опускается):

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) C(\varphi, \psi, t) = v^2(\varphi, \psi) \left( d \left( \frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2} \right) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right) \quad (12)$$

$$(0 < \alpha, \gamma < 1),$$

$$C|_{\varphi=0} = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0, \psi=1} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (13)$$

$$C(\varphi, \psi, 0) = C_0(\varphi, \psi). \quad (14)$$

При этом в новых переменных область комплексного потенциала течения определяется как  $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : 0 < \varphi < \varphi_0, 0 < \psi < 1\}$ . Таким образом, моделирование динамики миграционного процесса в рамках рассматриваемого подхода сводится к решению краевой задачи (12)–(14) и последующему переходу из области  $G_\omega$  в физическую область  $G_z$  согласно приведенному в работе [1] решению соответствующей фильтрационной задачи.

#### ЗАМКНУТАЯ ФОРМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ОСРЕДНЕННОЙ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

В случае осреднения скорости фильтрации по области комплексного потенциала течения таким образом, что  $v^2(\varphi, \psi) = v_M^2 = \text{const}$ , имеем вместо (12) уравнение с постоянными коэффициентами

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) C(\varphi, \psi, t) = v_M^2 \left( d \Delta C - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right). \quad (15)$$

Тогда для краевой задачи (15), (13), (14) несложно получить замкнутое решение. Действительно, исключая из (15) конвективную составляющую подстановкой

$$C(\varphi, \psi, t) = 1 - \exp\left(\frac{\varphi}{2d}\right) w(\varphi, \psi, t),$$

получаем для определения  $w$  краевую задачу

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) w(\varphi, \psi, t) = v_M^2 \left( d \Delta w - \frac{w}{4d} \right) \quad (16)$$

$$(0 < \alpha, \gamma < 1),$$

$$w|_{\varphi=0} = 1, \quad w_\psi|_{\psi=0, \psi=1} = 0, \quad \left( w_\varphi + \frac{1}{2d} w \right) \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad (17)$$

$$w(\varphi, \psi, 0) = f(\varphi, \psi), \quad (18)$$

где

$$f(\varphi, \psi) = (1 - C_0(\varphi, \psi)) \exp\left(-\frac{\varphi}{2d}\right). \quad (19)$$

Применяя к задаче (16)–(18) конечное интегральное синус-преобразование Фурье по переменной  $\varphi$  вида [13]

$$\bar{w}_m(\psi, t) = \int_0^{\varphi_0} w(\varphi, \psi, t) \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi\right) d\varphi, \quad (20)$$

где  $\mu_m > 0$  — корни уравнения  $\mu \operatorname{ctg} \mu = -\frac{\varphi_0}{2d}$  ( $m=1, 2, \dots$ ), имеем

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) \bar{w}_m(\psi, t) = v_M^2 d \frac{\partial^2 \bar{w}_m(\psi, t)}{\partial \psi^2} - \nu_m \bar{w}_m(\psi, t), \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}_m(\psi, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0, \psi=1} = 0, \quad (22)$$

$$\bar{w}_m(\psi, 0) = F_m(\psi) \quad (m=1, 2, \dots), \quad (23)$$

где

$$\nu_m = v_M^2 \left( \frac{1}{4d} + d \left( \frac{\mu_m}{\varphi_0} \right)^2 \right), \quad F_m(\psi) = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi, \psi) \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi\right) d\varphi \quad (24)$$

$(m=1, 2, \dots)$ .

Последующее применение к полученной задаче (21)–(23) конечного косинус-преобразования Фурье вида

$$\tilde{w}_{mn}(t) = \int_0^{\varphi_0} \bar{w}_m(\psi, t) \cos(n\pi\psi) d\psi \quad (m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots)$$

приводит ее к задаче Коши

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) \tilde{w}_{mn}(t) + \rho_{mn} \tilde{w}_{mn}(t) = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{w}_{mn}(0) = \delta_{mn} \quad (m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots), \quad (26)$$

где

$$\rho_{mn} = \nu_m + d(n\pi v_M)^2, \quad \delta_{mn} = \int_0^{\varphi_0} \int_0^1 f(\varphi, \psi) \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi\right) \cos(n\pi\psi) d\varphi d\psi$$

$(m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots)$

и  $f(\varphi, \psi)$  определяется соотношением (20).

Используя результаты работы [14], решение задачи (25), (26) запишем в виде

$$\tilde{w}_{mn}(t) = \delta_{mn} [1 - \beta t^{\alpha-\gamma} E_{(\alpha-\gamma, \alpha), 1+\alpha-\gamma}(-\beta t^{\alpha-\gamma}, -\rho_{mn} t^\alpha) - \rho_{mn} t^\alpha E_{(\alpha-\gamma, \alpha), 1+\alpha}(-\beta t^{\alpha-\gamma}, -\rho_{mn} t^\alpha)] \quad (m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

где  $E_{(\alpha-\beta, \alpha), \rho}(x, y)$  — обобщенная функция Миттаг-Леффлера, определяемая соотношением [14]

$$E_{(\alpha-\beta, \alpha), \rho}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{x^i y^{k-i}}{\Gamma(\rho + \alpha k - \beta i)},$$

$\Gamma(z)$  — гамма-функция Эйлера [15].

Заключительный этап в процессе построения решения рассматриваемой задачи состоит в возвращении в область оригиналов преобразований Фурье по геометрическим переменным. С учетом формул обращения [13] получаем искомое замкнутое решение исходной краевой задачи в виде

$$C(\varphi, \psi, t) = 1 - \frac{4}{\varphi_0} \exp\left(\frac{\varphi}{2d}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m^2 + \frac{\varphi_0^2}{4d^2}}{\mu_m^2 + \frac{\varphi_0^2}{4d^2} + \frac{\varphi_0}{2d}} \left[ \frac{1}{2} \tilde{w}_{m0}(t) + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{w}_{mn}(t) \cos(n\pi\psi) \left] \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi\right), \quad (28)$$

где  $\widetilde{w}_{mn}(t)$  ( $m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots$ ) определяется согласно соотношениям (27).

Отметим, что ряды в определяющем искомое решение соотношении (28) являются (при выполнении указанных ниже условий) сходящимися. Действительно, с учетом известных оценок для многомерной функции Миттаг-Леффлера [14]

$$|E_{(\alpha-\beta, \alpha), \rho}(x, y)| \leq \frac{C_1}{1+|x|}, \quad |E_{(\alpha-\beta, \alpha), \rho}(x, y)| \leq \frac{C_2}{1+|x+y|}, \quad (29)$$

где  $C_1, C_2 = \text{const} > 0$ , из соотношений (27) получаем

$$|\widetilde{w}_{mn}(t)| \leq C |\delta_{mn}| \quad (C = \text{const} > 0, m=1, 2, \dots, n=0, 1, 2, \dots). \quad (30)$$

Подчиним функцию  $f(\varphi, \psi)$ , определяемую согласно (19), следующим условиям:

$$\begin{aligned} f \in C^3(\overline{G_\omega}), \quad f(0, \psi) = f(\varphi_0, \psi), \quad f_\varphi(0, \psi) = f_\varphi(\varphi_0, \psi) = f_{\varphi\varphi}(0, \psi) = f_{\varphi\varphi}(\varphi_0, \psi) = 0, \\ f_\psi(\varphi, 0) = f_\psi(\varphi, 1) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда с учетом условий (31) соотношения (30) запишем в виде

$$\begin{aligned} |\widetilde{w}_{m0}(t)| &\leq \frac{C_3}{\mu_m^3} \quad (C_3 > 0, m=1, 2, \dots), \\ |\widetilde{w}_{mn}(t)| &\leq \frac{C_4}{(n\pi\mu_m)^3} \quad (C_4 > 0, m, n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

На основании данных оценок заключаем, что ряды в (28) сходятся абсолютно и равномерно в области  $\Omega_\varepsilon := \overline{G_\omega} \times (\varepsilon, T]$  ( $\varepsilon > 0$ ) и их сумма представляет собой непрерывную в  $\overline{G_\omega} \times [\varepsilon, T]$  функцию.

#### КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим в области  $G_\omega \times (0, \infty)$  задачу определения функции концентрации  $C(\varphi, \psi, t)$ , удовлетворяющей уравнению (15), несамосопряженным граничным условиям

$$C|_{\varphi=0} = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} = 0, \quad C|_{\psi=0} = C|_{\psi=1} \quad (32)$$

и начальному условию (14). При этом последнее из граничных условий в соотношениях (32) может интерпретироваться как требование равенства концентраций растворимых веществ на границах  $AD$  и  $BC$  области фильтрации  $G_z$ , а второе из условий в (32) соответствует случаю быстрого отвода вод из дренажа  $CD$  (рис. 1, а).

Методика получения решения краевой задачи (15), (32), (14) кратко состоит в следующем.

Исключим из уравнения (15) конвективную составляющую подстановкой  $C = 1 - \exp\left(\frac{\varphi}{2d}\right) w$  и применим к полученной краевой задаче относительно неизвестной функции  $w(\varphi, \psi, t)$  конечное интегральное синус-преобразование Фурье по переменной  $\varphi$  вида (19). В результате получаем задачу

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) \bar{w}_m(\psi, t) = v_M^2 d \frac{\partial^2 \bar{w}_m(\psi, t)}{\partial \psi^2} - \nu_m \bar{w}_m(\psi, t), \quad (33)$$

$$\left. \frac{\partial \bar{w}_m(\psi, t)}{\partial \psi} \right|_{\psi=0} = 0, \quad \bar{w}_m \Big|_{\psi=0} = \bar{w}_m \Big|_{\psi=1}, \quad (34)$$

$$\bar{w}_m(\psi, 0) = F_m(\psi) \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (35)$$

где  $F_m(\psi)$  определяется соотношением (24).

Ввиду наличия нелокальных граничных условий (34) решение задачи (33)–(35) ищем в виде разложения по специально выбранному базису из системы функций [16]

$$X_0(\psi) = 1, \quad X_{1n}(\psi) = \cos(\lambda_n \psi), \quad X_{2n}(\psi) = \psi \sin(\lambda_n \psi), \quad \lambda_n = 2\pi n \quad (n \in N).$$

Вместе с последовательностью

$$Y_0(\psi) = 2(1 - \psi), \quad Y_{1n}(\psi) = 4(1 - \psi) \cos(\lambda_n \psi), \quad Y_{2n}(\psi) = 4 \sin(\lambda_n \psi) \quad (n \in N)$$

данные системы образуют биортогональную на интервале  $(0, 1)$  систему функций, и любую функцию из  $L_2(0, 1)$  можно разложить в биортогональный ряд [16, 17]. В частности, функция  $\bar{w}_m(\psi, t)$  разлагается в ряд вида

$$\bar{w}_m(\psi, t) = U_0^{(m)}(t) X_0(\psi) + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} U_{kn}^{(m)}(t) X_{kn}(\psi) \quad (m \in N), \quad (36)$$

где

$$U_0^{(m)}(t) = (\bar{w}_m(\psi, t), Y_0(\psi)), \quad U_{kn}^{(m)}(t) = (\bar{w}_m(\psi, t), Y_{kn}(\psi)) \\ (k = 1, 2; m, n \in N),$$

( $w, Y$ ) — скалярное произведение в  $L_2(0, 1)$ .

Разлагая функцию начальных условий задачи в биортогональный ряд

$$F_m(\psi) = U_0^{(m)}(0) X_0(\psi) + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} U_{kn}^{(m)}(0) X_{kn}(\psi),$$

где

$$U_0^{(m)}(0) = (F_m(\psi, t), Y_0(\psi)) \equiv a_m^{(0)}, \quad U_{kn}^{(m)}(0) = (F_m(\psi, t), Y_{kn}(\psi)) \equiv a_{mn}^{(k)} \quad (37) \\ (k = 1, 2; m, n \in N),$$

и применяя формальную схему метода разделения переменных, получаем из (33)–(36) для определения искоемых коэффициентов разложения (36) такие последовательности задач:

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) U_0^{(m)}(t) + \nu_m U_0^{(m)}(t) = 0, \quad U_0^{(m)}(0) = a_m^{(0)} \quad (m \in N), \quad (38)$$

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) U_{1n}^{(m)}(t) + r_{mn} U_{1n}^{(m)}(t) = 2d v_M^2 \lambda_n U_{2n}^{(m)}(t), \quad U_{1n}^{(m)}(0) = a_{mn}^{(1)} \quad (39)$$

$$({}^C D_t^\alpha + \beta {}^C D_t^\gamma) U_{2n}^{(m)}(t) + r_{mn} U_{2n}^{(m)}(t) = 0, \quad U_{2n}^{(m)}(0) = a_{mn}^{(2)} \\ (m, n \in N), \quad (40)$$

где величины  $a_{mn}^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2; m, n \in N$ ) определяются соотношениями (37),  $r_{mn} = \nu_m + 4d(n\pi v_M)^2$ .

С учетом результатов работы [14] решения задач (38)–(40) представим в виде

$$U_0^{(m)}(t) = a_m^{(0)} \Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t) \quad (m \in N), \quad (41)$$

$$U_{2n}^{(m)}(t) = a_{mn}^{(2)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) \quad (m, n \in N), \quad (42)$$

$$U_{1n}^{(m)}(t) = a_{mn}^{(1)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) + a_{mn}^{(2)} \Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) \quad (m, n \in N), \quad (43)$$

где

$$\Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t) = 1 - \beta t^{\alpha - \gamma} E_{(\alpha - \gamma, \alpha), 1 + \alpha - \gamma}(-\beta t^{\alpha - \gamma}, -\nu_m t^\alpha) - \nu_m t^\alpha E_{(\alpha - \gamma, \alpha), 1 + \alpha}(-\beta t^{\alpha - \gamma}, -\nu_m t^\alpha) \quad (m \in N), \quad (44)$$

$$G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) = 1 - \beta t^{\alpha - \gamma} E_{(\alpha - \gamma, \alpha), 1 + \alpha - \gamma}(-\beta t^{\alpha - \gamma}, -r_{mn} t^\alpha) - r_{mn} t^\alpha E_{(\alpha - \gamma, \alpha), 1 + \alpha}(-\beta t^{\alpha - \gamma}, -r_{mn} t^\alpha) \quad (m, n \in N), \quad (45)$$

$$\Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) = 2\lambda_n d \nu_M^2 \int_0^t z^{\alpha - 1} E_{(\alpha - \gamma, \alpha), \alpha}(-\beta z^{\alpha - \gamma}, -r_{mn} z^\alpha) G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t - z) dz \quad (46)$$

$$(m, n \in N).$$

Тогда с учетом соотношений (41)–(43) решение задачи (33)–(35) принимает вид

$$\bar{w}_m(\psi, t) = a_m^{(0)} \Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t) X_0(\psi) + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_{mn}^{(1)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) + a_{mn}^{(2)} \Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)) X_{1n}(\psi) + a_{mn}^{(2)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) X_{2n}(\psi)] \quad (m \in N),$$

где величины  $\Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t)$ ,  $G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)$ ,  $\Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)$  ( $m, n \in N$ ) определяются согласно соотношениям (44)–(46). Окончательное решение рассматриваемой задачи получим, возвращаясь в область оригиналов преобразования Фурье по переменной  $\varphi$ . С учетом найденных соотношений имеем

$$C(\varphi, \psi, t) = 1 - \frac{2}{\varphi_0} \exp\left(\frac{\varphi}{2d}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m^2 + \frac{\varphi_0^2}{4d^2}}{\mu_m^2 + \frac{\varphi_0^2}{4d^2} + \frac{\varphi_0}{2d}} \left[ a_m^{(0)} \Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} ((a_{mn}^{(1)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) + a_{mn}^{(2)} \Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)) \cos(\lambda_n \psi) + a_{mn}^{(2)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) \psi \sin(\lambda_n \psi)) \right] \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi\right), \quad \lambda_n = 2\pi n \quad (n \in N). \quad (47)$$

Вопросы сходимости рядов в соотношении (47) решаются аналогично изложенному выше. Действительно, на основании оценок (29) и соотношения [14]

$$\int_0^t z^\alpha E_{(\alpha - \gamma, \alpha), \alpha}(m_1 z^{\alpha - \gamma}, m_2 z^\alpha) dz = t^\alpha E_{(\alpha - \gamma, \alpha), 1 + \alpha}(m_1 t^{\alpha - \gamma}, m_2 t^\alpha)$$

при выполнении условий (31), дополненных соотношениями

$$f(\varphi, 0) = f(\varphi, 1), \quad f_{\psi\psi}(\varphi, 0) = f_{\psi\psi}(\varphi, 1),$$

устанавливаем справедливость следующих оценок:

$$|U_0^{(m)}(t)| = |a_m^{(0)} \Psi_m^{(\alpha, \gamma)}(t)| \leq \frac{C_1}{\mu_m^3} \quad (C_1 = \text{const} > 0, \quad m \in N),$$



$$|U_{2n}^{(m)}(t)| = |a_{mn}^{(2)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)| \leq \frac{C_2}{\lambda_n^3 \mu_m^3} \quad (C_2 = \text{const} > 0, m, n \in N),$$

$$|U_{1n}^{(m)}(t)| = |a_{mn}^{(1)} G_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t) + a_{mn}^{(2)} \Phi_{mn}^{(\alpha, \gamma)}(t)| \leq \frac{C_3}{\lambda_n^3 \mu_m^3} \left( 1 + \frac{C_4}{\lambda_n} \right)$$

$$(C_3, C_4 = \text{const} > 0, m, n \in N).$$

Отсюда на основании мажорантного признака Вейерштрасса следует абсолютная и равномерная сходимость в области  $\Omega_\varepsilon$  рядов в соотношении (47) и непрерывность соответствующей функции  $C(\varphi, \psi, t)$  в области  $\overline{G_\omega} \times [\varepsilon, T]$ .

Отметим, что аналогично изложенному выше можно получить аналитические решения краевых задач, соответствующих рассматриваемой математической модели конвективной диффузии, также в случае задания других типов [18, 19] нелокальных граничных условий.

#### АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ФИЛЬТРАЦИИ

При  $v^2(\varphi, \psi) \neq \text{const}$  приближенное решение краевой задачи (12)–(14) можно найти на основе конечно-разностного подхода следующим образом.

Вводя в рассмотрение сеточную область

$$\omega_h = \{(\varphi_i, \psi_k, t_j) : \varphi_i = ih_1 \ (i = \overline{0, m+1}), \psi_k = (k-0.5)h_2 \ (k = \overline{0, n+1}), \\ t_j = j\tau \ (j = \overline{0, N+1})\},$$

где  $h_1, h_2, \tau$  — шаги сетки по геометрическим переменным  $\varphi, \psi$  и времени  $t$  соответственно, и обозначая  $\Delta_t^{(\alpha)}$  дискретный аналог производной Капуто порядка  $\alpha$ , ставим в соответствие рассматриваемой задаче аналог локально-одномерной [20] разностной схемы А.А. Самарского

$$\frac{1}{2}(\Delta_t^{(\alpha)} \overline{C} + \beta \Delta_t^{(\gamma)} \overline{C}) = v^2 (d\overline{C}_{\overline{\varphi\varphi}} - \overline{C}_0), \quad (48)$$

$$\frac{1}{2}(\Delta_t^{(\alpha)} \hat{C} + \beta \Delta_t^{(\gamma)} \hat{C}) = v^2 d\hat{C}_{\overline{\psi\psi}}. \quad (49)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\hat{C} = C^{j+1}, \quad \overline{C} = C^{j+1/2}, \quad C = C^j, \quad t_{j+1/2} = t_j + \frac{\tau}{2},$$

$$\Delta_t^{(\alpha)} \overline{C} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \left( \frac{2}{\tau} \right)^\alpha (\overline{C} - C) + \sum_{s=0}^{j-1} b_s^{(j)} C_{t,s} \right], \quad (50)$$

$$\Delta_t^{(\alpha)} \hat{C} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[ \sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} C_{t,s} + \left( \frac{2}{\tau} \right)^\alpha (\hat{C} - \overline{C} + (2^{1-\alpha} - 1)(\overline{C} - C)) \right], \quad (51)$$

$$b_s^{(j)} = \tau^{1-\alpha} \left[ \left( j + \frac{1}{2} - s \right)^{1-\alpha} - \left( j - \frac{1}{2} - s \right)^{1-\alpha} \right],$$

$$\rho_s^{(j)} = \tau^{1-\alpha} [(j+1-s)^{1-\alpha} - (j-s)^{1-\alpha}], \quad C_{t,s} = \frac{C^{s+1} - C^s}{\tau},$$

$C_0, C_{\overline{\varphi\varphi}}$  — центральная и вторая разностные производные соответственно.

Отметим, что в классе достаточно гладких функций имеет место соотношение  $D_t^{(\alpha)}u = \Delta_t^{(\alpha)}u + O(\tau)$ .

Расписывая в соотношении (48) разностные операторы с учетом (50) и приводя подобные члены, получаем на полупростом временном слое  $t_{j+1/2}$  систему уравнений

$$A_{ik}C_{i+1,k}^{j+1/2} - B_{ik}C_{ik}^{j+1/2} + S_{ik}C_{i-1,k}^{j+1/2} = \Phi_{ik}^j \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}), \quad (52)$$

где

$$A_{ik} = \frac{v_{ik}^2}{h_1} \left( \frac{d}{h_1} - 0.5 \right), \quad S_{ik} = \frac{v_{ik}^2}{h_1} \left( \frac{d}{h_1} + 0.5 \right), \quad B_{ik} = w_{\alpha, \gamma} + A_{ik} + S_{ik},$$

$$\Phi_{ik}^j = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{j-1} \left( \frac{b_s^{(j)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\beta \bar{b}_s^{(j)}}{\Gamma(2-\gamma)} \right) \frac{C_{ik}^{s+1} - C_{ik}^s}{\tau} - w_{\alpha, \gamma} C_{ik}^j,$$

$$w_{\alpha, \gamma} = \frac{1}{2} \left( \frac{2^\alpha}{\tau^\alpha \Gamma(2-\alpha)} + \frac{\beta 2^\gamma}{\tau^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \right), \quad \bar{b}_s^{(j)} = \tau^{1-\gamma} \left[ \left( j + \frac{1}{2} - s \right)^{1-\gamma} - \left( j - \frac{1}{2} - s \right)^{1-\gamma} \right].$$

На целом временном слое из (49) с учетом (51) находим

$$P_{ik}C_{i,k+1}^{j+1} - Q_{ik}C_{ik}^{j+1} + P_{ik}C_{i,k-1}^{j+1} = \Omega_{ik}^j \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}), \quad (53)$$

где

$$P_{ik} = \frac{v_{ik}^2 d}{h_2^2}, \quad Q_{ik} = w_{\alpha, \gamma} + 2P_{ik},$$

$$\Omega_{ik}^j = \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{j-1} \left( \frac{\rho_s^{(j)}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{\beta \bar{\rho}_s^{(j)}}{\Gamma(2-\gamma)} \right) \frac{C_{ik}^{s+1} - C_{ik}^s}{\tau} + \frac{1}{2} \bar{w}_{\alpha, \gamma} (C_{ik}^{j+1/2} - C_{ik}^j) - w_{\alpha, \gamma} C_{ik}^{j+1/2},$$

$$\bar{w}_{\alpha, \gamma} = \frac{2^{1-\alpha} - 1}{\Gamma(2-\alpha)} \left( \frac{2}{\tau} \right)^\alpha + \frac{\beta (2^{1-\gamma} - 1)}{\Gamma(2-\gamma)} \left( \frac{2}{\tau} \right)^\gamma, \quad \bar{\rho}_s^{(j)} = \tau^{1-\gamma} [(j+1-s)^{1-\gamma} - (j-s)^{1-\gamma}].$$

Здесь  $\sum_{s=0}^{j-1} (\cdot) \equiv 0$  при  $j-1 < 0$ .

Разностные уравнения систем (52), (53) являются трехточечными и эффективно решаются методом прогонки [20, 21]. При этом устойчивость метода прогонки для (52) и (53) вытекает из факта диагонального преобладания в матрицах коэффициентов этих систем алгебраических уравнений. Соответствующие прогоночные соотношения записываются в виде

$$C_{ik}^{j+1/2} = \alpha_{i+1,k} C_{i+1,k}^{j+1/2} + \beta_{i+1,k}^j \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}),$$

$$C_{ik}^{j+1} = \tilde{\alpha}_{i,k+1} C_{i,k+1}^{j+1} + \tilde{\beta}_{i,k+1}^j \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}),$$

а прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам

$$\alpha_{i+1,k} = \frac{A_{ik}}{B_{ik} - S_{ik} \alpha_{ik}}, \quad \beta_{i+1,k}^j = \frac{\alpha_{i+1,k}}{A_{ik}} (S_{ik} \beta_{ik}^j - \Phi_{ik}^j),$$

$$\tilde{\alpha}_{i,k+1} = \frac{P_{ik}}{Q_{ik} - P_{ik} \tilde{\alpha}_{ik}}, \quad \tilde{\beta}_{i,k+1}^j = \frac{\tilde{\alpha}_{i,k+1}}{P_{ik}} (P_{ik} \tilde{\beta}_{ik}^j - \Omega_{ik}^j) \quad (i = \overline{1, m}; k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}).$$

Стартовые значения прогоночных коэффициентов определяются на основе разностных аналогов граничных условий, из которых находим

$$\alpha_{1k} = 0, \beta_{1k}^j = 1 \quad (k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}), \tilde{\alpha}_{i1} = 1, \tilde{\beta}_{i1}^j = 0 \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, N}),$$

$$C_{m+1,k}^{j+1/2} = \frac{\beta_{m+1,k}^j}{1 - \alpha_{m+1,k}} \quad (k = \overline{1, n}; j = \overline{0, N}), C_{i,n+1}^{j+1} = \frac{\tilde{\beta}_{i,n+1}^j}{1 - \tilde{\alpha}_{i,n+1}} \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{0, N}).$$

В заключение приведем краткое описание основных этапов алгоритма компьютерной реализации решения рассматриваемой краевой задачи на основе изложенной конечно-разностной методики, базирующейся на локально-одномерной схеме А.А. Самарского.

На первом этапе на основе аналитических зависимостей [1] вычисляются элементы массива значений поля скоростей, соответствующих рассматриваемой схеме фильтрации.

После вычисления поля фильтрационных скоростей на втором этапе решаются системы алгебраических уравнений (52), (53), что позволяет определить массивы значений полей концентраций в области комплексного потенциала течения.

Завершающий этап алгоритма вычислений состоит в переходе из области комплексного потенциала течения  $G_\omega$  в физическую область  $G_z$  на основе известной из [1] характеристической функции течения  $z = f(\omega)$  для рассматриваемой фильтрационной схемы.

#### РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ

Численное решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в дробных производных имеет высокую вычислительную сложность. Среди подходов к ее снижению выделим использование методов параллельных вычислений [22–24] и применение принципа короткой памяти [25–27]. В контексте балансировки точности и вычислительной сложности аппроксимации согласно базовому принципу фиксированной памяти [25] исключается часть информации о решениях на предыдущих шагах по времени, а использование принципа кусочной памяти [26] уменьшает сложность аппроксимацией ядра дробной производной при учете всех решений на предыдущих шагах.

Производительность операции вычисления сумм в правых частях СЛАУ (52), (53) имеет наибольшее влияние на быстродействие алгоритмов решения задачи, поскольку время ее выполнения линейно повышается с увеличением номера шага по времени. В качестве примера рассмотрим только суммирование выражения

$$\sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} C_{t,s}.$$

Помимо непосредственного суммирования (алгоритм 1) приведем три алгоритма, снижающих вычислительную сложность.

Согласно принципу фиксированной памяти суммирование проводится до тех пор, пока выполняется условие  $\rho_s^{(j)} > \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1$  — заданная константа (алгоритм 2). В этом случае время выполнения вычислений, а также объем памяти, необходимой для хранения решений, становятся постоянными начиная с некоторого шага.

Следующие два алгоритма строятся с помощью разложения в ряды функции  $g(s, j) = \rho_s^{(j)} / \tau^{1-\alpha} = (j+1-s)^{1-\alpha} - (j-s)^{1-\alpha}$ .

Разложив  $(j-s)^{-\alpha}$  согласно обобщенной формуле бинома Ньютона, аналогично [28] получим

$$g(s, j) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(1,1)}(s) f_n^{(2,1)}(j), \quad f_n^{(2,1)}(j) = (1-\alpha)(-1)^n \binom{-\alpha}{n} j^{-\alpha-n}, \quad (54)$$

$$f_n^{(1,1)}(s) = \frac{1}{n+1} ((s+1)^{n+1} - s^{n+1}).$$

Значения коэффициентов  $f_n^{(1,1)}(s)$  в схеме (54), вычисленные для фиксированного  $s$ , могут быть кэшированы и в дальнейшем использованы при изменении  $j$ .

Суммирование с применением формулы (54) (алгоритм 3) можно рекуррентно выполнять следующим образом:

$$\sum_{s=0}^{j-1} \rho_s^{(j)} C_{t,s} \approx (1-\alpha) \tau^{1-\alpha} \sum_{n=0}^K \left( (-1)^n \binom{-\alpha}{n} j^{-\alpha-n} S_{n,j} \right),$$

$$S_{n,j} = S_{n,j-1} + C_{t,j-1} f_n^{(1,1)}(j-1), \quad S_{n,1} = 0.$$

Алгоритм 4, описанный в [29], базируется на дополнении ряда (54) аппроксимацией функции  $g(s, j)$  в виде ряда Тейлора по  $j$  в точке  $j = b$ . При последовательном вычислении значений  $\Delta_t^{(\alpha)} \hat{C}$  на каждом последующем шаге изменяется и дополняется аппроксимация для предыдущего шага, состоящая из множеств рядов, приближенно описывающих  $g(s, j)$  с заданной точностью  $\varepsilon_2$  на некоторых интервалах изменения  $j$ .

Вычисления правых частей СЛАУ, возникающих в процессе дискретизации рассматриваемой задачи, вместе с их решениями могут выполняться независимо. Это позволяет напрямую применять к ним многопоточное распараллеливание и вычисления на графических процессорах (GPU).

Дополнительно алгоритмы 1–3 допускают коллективное использование локальной памяти потоками GPU-программы для кэширования значений  $b_s^{(j)}$  и  $S_n$ .

GPU-реализация решения задачи на одном шаге по времени выполнена с использованием технологии OpenCL и состоит из параллельного вычисления правых частей СЛАУ (каждый поток вычисляет значение, соответствующее ячейке сетки), решения «горизонтальных», а затем «вертикальных» СЛАУ (каждый поток решает одну СЛАУ методом прогонки). При многопоточной реализации на центральном процессоре (CPU) на основе технологии OpenMP распараллеливалось только вычисление правых частей СЛАУ, так как именно эта операция занимает большую часть времени при вычислениях.

Экспериментально изучалась точность и быстродействие описанных выше вычислительных схем. Точность  $\varepsilon$  оценивалась как среднее квадратическое отклонение решений, полученных алгоритмами 2–4, от решения с использованием полного суммирования (алгоритм 1). Во всех проведенных экспериментах применение GPU не приводило к существенному изменению точности. Решение осуществлялось на сетках размером от  $50 \times 50$  до  $150 \times 150$  ячеек с шагом по времени  $\tau = 0.001$  для  $T = [0; 2]$ . Для алгоритмов 2 и 4  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  варьировались в диапазоне  $[0.001; 0.1]$ . Количество  $K$  членов ряда в алгоритме 3 варьировалось в диапазоне  $[25; 125]$ . Размер группы GPU-потоков для алгоритма 4 равнялся  $K$ , а для алгоритмов 1 и 2 — 32. Отметим, что для алгоритма 1 при увеличении размера сетки оптимальный размер группы потоков увеличивался с 32 до 64.

Значения ускорений алгоритмов приведены в табл. 1. Алгоритм 4 прогнозируемо проводит наилучшие аппроксимации дробной производной. При этом наблюдается незначительное ускорение по сравнению с алгоритмом 1. Алгоритм 2 обладает сравнимым быстродействием с алгоритмом 3, что, однако, сопровождается

**Таблица 1**

Конфигурация для определения ускорения	Размер сетки	Ускорение алгоритмов			
		Алгоритм 1	Алгоритм 4 ( $\epsilon_2 = 0.1$ )	Алгоритм 2 ( $\epsilon_1 = 0.001$ )	Алгоритм 3 ( $K = 25$ )
CPU (многопоточность) по сравнению с CPU (один поток)	50 × 50	8.75	5.90	5.74	2.17
	100 × 100	13.42	6.03	8.38	3.21
	150 × 150	15.74	6.13	8.25	3.58
GPU по сравнению с CPU (один поток)	50 × 50	76.09	40.87	16.18	2.97
	100 × 100	170.31	65.98	43.49	4.02
	150 × 150	251.84	78.22	49.26	6.96
CPU (один поток) по сравнению с алгоритмом 1	50 × 50	—	1.60	8.20	58.13
	100 × 100	—	1.95	9.32	72.99
	150 × 150	—	2.70	12.60	89.18
CPU (многопоточность) по сравнению с алгоритмом 1	50 × 50	—	1.08	5.37	14.41
	100 × 100	—	0.87	5.82	17.46
	150 × 150	—	1.05	6.61	20.27
GPU по сравнению с алгоритмом 1	50 × 50	—	0.86	1.74	2.27
	100 × 100	—	0.75	2.38	1.72
	150 × 150	—	0.84	2.47	2.47

ется снижением точности. Алгоритм 3 является существенно более быстрым, чем алгоритм 4, обладая низшей, но сопоставимой с ним точностью.

При увеличении количества членов ряда в алгоритме 3 происходит резкое падение скорости при незначительном улучшении точности. Таким образом, при допустимой утрате точности оптимальным быстродействием обладает алгоритм 3, рассматривающий 25 членов ряда (54). Такая схема ускоряет процесс вычислений по сравнению с базовым алгоритмом в 14 раз при многопоточном исполнении обеих схем на CPU (в 126 раз по сравнению с выполнением алгоритма 1 в однопоточном режиме) и в 2.2 раза при исполнении на GPU (в 172 раза по сравнению с выполнением алгоритма 1 в однопоточном режиме).

Отметим, что время проведения расчетов на  $N$  шагах растет линейно для алгоритмов 2 и 3, приближенно к линейному с определенного шага для алгоритма 4, имеющего логарифмическую сложность [29], и квадратично для алгоритма 1.

Ускорения GPU-алгоритмов по сравнению с исполнением в однопоточном режиме на CPU линейно возрастают при увеличении размера сетки. При этом возрастание больше для более медленных алгоритмов. Ускорение алгоритмов 2–4 по сравнению с алгоритмом 1 также линейно возрастает для случая исполнения на CPU в однопоточном режиме. При многопоточном режиме рост ускорения наблюдается только для более эффективных алгоритмов 2 и 3, а при использовании GPU ускорение всех алгоритмов меняется незначительно.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ МИГРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

Численное моделирование мобильно-немобильной динамики миграционного процесса в рамках рассматриваемой математической модели выполнено относительно безразмерных переменных, определяемых соотношениями (11). Некоторые из полученных при этом результатов графически изображены на рис. 2–5.

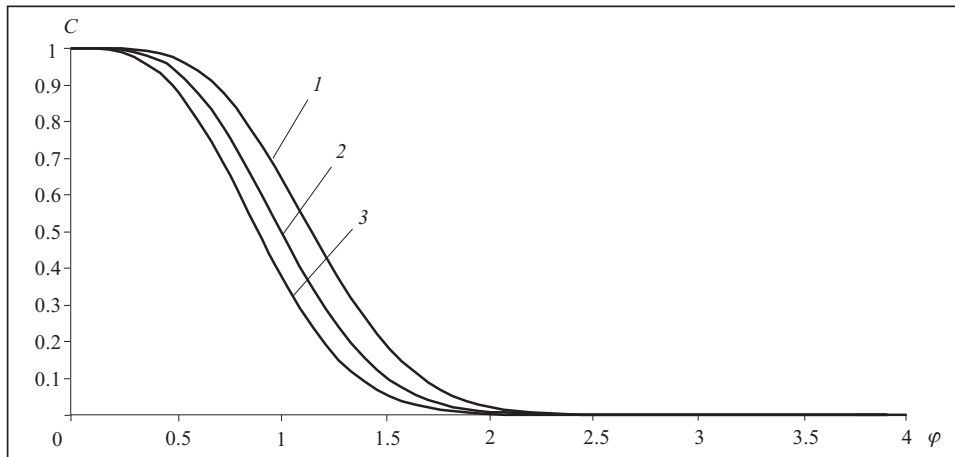


Рис. 2. Кривые распределения полей концентраций  $C(\varphi)$  в мобильной фазе вдоль линии тока  $\psi = 0.5$  в момент времени  $t = 0.01$  для классической математической модели при  $\beta = 0$  (1);  $\beta = 0.2$  (2);  $\beta = 0.4$  (3)

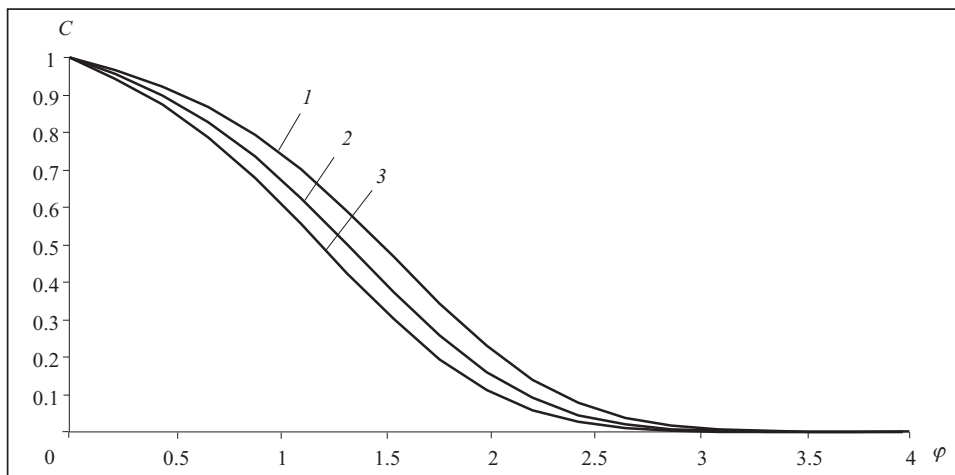


Рис. 3. Кривые распределения полей концентраций  $C(\varphi)$  в мобильной фазе вдоль линии тока  $\psi = 0.5$  в момент времени  $t = 0.01$  в случае неклассической модели при  $\alpha = 0.8$ ,  $\gamma = 0.6$  для  $\beta = 0$  (1);  $\beta = 0.4$  (2);  $\beta = 0.8$  (3)

Анализ результатов численных экспериментов позволяет сделать следующие выводы об особенностях динамики полей концентраций растворимых веществ (с учетом влияния иммобилизации) в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод со свободной поверхностью.

1. В рамках мобильно-немобильного подхода, при заданных постоянных значениях порядков дробных производных  $\alpha$  и  $\gamma$ , с увеличением значения параметра  $\beta$  наблюдается явление запаздывания формирования поля концентраций в точках фильтрационной области (рис. 2 и 3).

2. Запаздывание формирования поля концентраций в точках области фильтрации наблюдается также в случае возрастания величины параметра  $\gamma$  при фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 4).

3. Явление запаздывания при формировании полей концентраций с использованием мобильно-немобильного подхода в наибольшей степени проявляется в начальной стадии развития миграционного процесса (рис. 5).

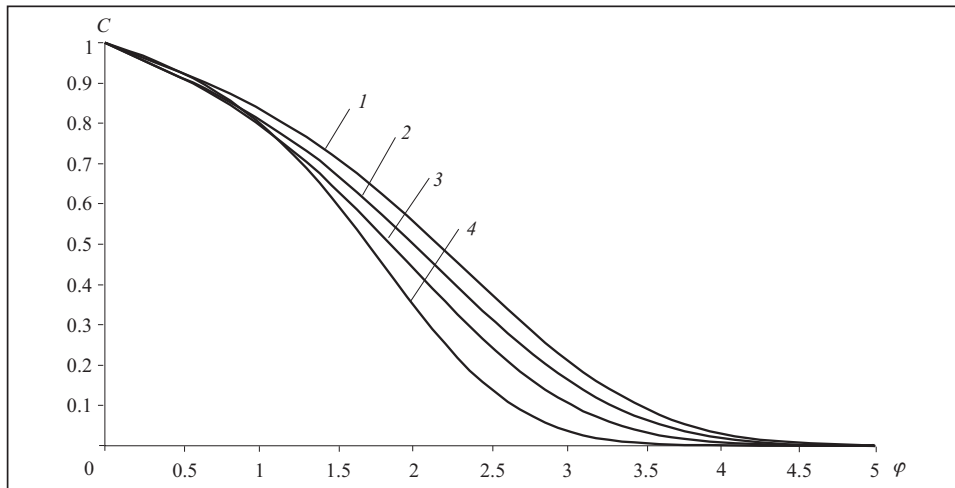


Рис. 4. Кривые распределения полей концентраций  $C(\varphi)$  в мобильной фазе вдоль линии тока  $\psi = 0.5$  в момент времени  $t = 0.01$  в случае неклассической модели при  $\alpha = 0.7$  для  $\beta = 0$  (1);  $\beta = 0.2, \gamma = 0.6$  (2);  $\beta = 0.2, \gamma = 0.8$  (3);  $\beta = 0.2, \gamma = 1.0$  (4)

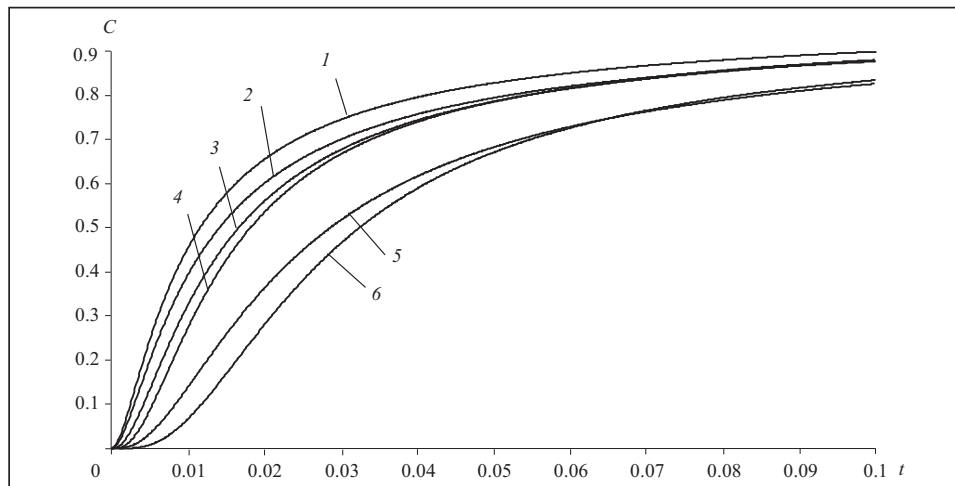


Рис. 5. Динамика изменения концентрации  $C(t)$  в мобильной фазе в точке  $\varphi = 0.5, \psi = 0.5$  при  $\alpha = 0.7$  для  $\beta = 0$  (1);  $\beta = 0.2, \gamma = 0.6$  (2);  $\beta = 0.2, \gamma = 0.8$  (3);  $\beta = 0.2, \gamma = 0.9$  (4);  $\beta = 0.6, \gamma = 0.8$  (5);  $\beta = 0.6, \gamma = 0.9$  (6)

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для дробно-дифференциальной математической модели диффузионного процесса выполнена постановка некоторых двумерных краевых задач конвективной диффузии растворимых веществ (с учетом явления иммобилизации) в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод из водоема в береговую дрена. В случае осреднения скорости фильтрации по области комплексного потенциала течения получены замкнутые решения краевых задач, соответствующих вариантам классических и нелокальных граничных условий. В общем случае переменной фильтрационной скорости разработана методика численного решения краевой задачи конвективной диффузии в дробно-дифференциальной постановке. Рассмотрены вопросы использования методов параллельных вычислений и результаты экспериментального изучения некоторых вычислительных схем. Приведены результаты компьютерных экспериментов по моделированию особенностей динамики конвективно-диффузионного процесса распространения примесей в подземном фильтрационном потоке.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наук. думка, 1990. 376 с.
2. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
3. Мистецкий Г.Е. Гидростроительство. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах. Киев: Будівельник, 1985. 136 с.
4. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Москва: Наука, 1977. 664 с.
5. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of dynamics of the process of filtration convection diffusion under the condition of time nonlocality. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. Vol. 44, N 4. P. 13–22.
6. Bulavatsky V.M. Numerical modeling of the dynamics of a convection diffusion process locally non-equilibrium in time. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. P. 861–869.
7. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modeling of the dynamics of nonequilibrium in time convection-diffusion processes in domains with free boundaries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 427–440.
8. Deans H.A., Rice U. A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media. *Soc. Petrol. Eng. Journal*. 1963. Vol. 3, Iss. 01. P. 49–52.
9. van Genuchten M.Th., Wierenga P.J. Mass transfer studies in sorbing porous media, 1: Analytical solutions. *Soil Science Society of America Journal*. 1976. Vol. 40. P. 473–480.
10. Shumer R., Benson D.A., Meershaert M.M., Baeumer B. Fractal mobile/immobile solute transport. *Water Resour. Res.* 2003. Vol. 39, N 10. P. 1296–1309.
11. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
12. Su N. Distributed-order infiltration, absorption and water exchange in mobile and immobile zones of swelling soils. *Journal of Hydrology*. 2012. Vol. 468–469. P. 1–10.
13. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. 539 p.
14. Luchko Yu., Gorenflo R. An operational method for solving fractional differential equations with Caputo derivatives. *Acta Mathematica Vietnamica*. 1999. Vol. 24, N 2. P. 207–233.
15. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Mineola, New York: Dover, 1965. 831 p.
16. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
17. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения*. 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
18. Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. *Дифференциальные уравнения*. 2009. Т. 45, № 1. С. 123–137.
19. Mokin A.Yu. Application of nonclassical separation of variables to a nonlocal heat problem. *Differential Equations*. 2013. Vol. 49, N 1. P. 59–67.
20. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1977. 656 с.
21. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Computational heat transfer. New York: Wiley, 1995. Vol. 2. 422 p.
22. Diethelm K. An efficient parallel algorithm for the numerical solution of fractional differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2011. Vol. 14, N 3. P. 475–490.
23. Gong C., Bao W., Tang G. A parallel algorithm for the Riesz fractional reaction-diffusion equation with explicit finite difference method. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2013. Vol. 16, N 3. P. 654–669.
24. Biala T.A., Khaliq A.Q.M. Parallel algorithms for nonlinear time-space fractional parabolic PDEs. *Journal of Computational Physics*. 2018. Vol. 375. P. 135–154.
25. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
26. Gong C., Bao W., Liu J. A piecewise memory principle for fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2017. Vol. 20, N 4. P. 1010–1022.



27. Ford N.J., Simpson A.C. The numerical solution of fractional differential equations: Speed versus accuracy. *Numerical Algorithms*. 2001. Vol. 26, N 4. P. 333–346.
28. Bohaienko V.O. A fast finite-difference algorithm for solving space-fractional filtration equation with a generalised Caputo derivative. *Computational and Applied Mathematics*. 2019. Vol. 38, N 3. Article 105. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0878-5>.
29. Bohaienko V.O. Numerical schemes for modelling time-fractional dynamics of non-isothermal diffusion in soils. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2019. Vol. 157. P. 100–114.

*Надійшла до редакції 03.06.2019*

**В.М. Булавацький, В.О. Богаєнко**

**ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДРОБОВО-ДИФЕРЕНЦІЙНОЇ МОБІЛЬНО-НЕМОБІЛЬНОЇ  
МІГРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ В ПРОФІЛЬНОМУ ФІЛЬТРАЦІЙНОМУ ПОТОЦІ**

**Анотація.** Для дробово-диференційної математичної моделі виконано постановку крайових задач конвективної дифузії розчинних речовин з урахуванням іммобілізації за умов усталеної профільної фільтрації ґрунтових вод з водою до дренажу. У випадку осереднення швидкості фільтрації по області комплексного потенціалу отримано замкнуті розв'язки крайових задач, що відповідають варіантам класичних та нелокальних граничних умов. У загальному випадку змінної фільтраційної швидкості розроблено методичку чисельного розв'язання крайової задачі конвективної дифузії в дробово-диференційній постановці, висвітлено питання розпаралелювання обчислень та наведено результати комп'ютерних експериментів.

**Ключові слова:** математичне моделювання, некласичні моделі, конвективно-дифузійний процес, мобільно-немобільні моделі міграції в пористих середовищах, рівняння дифузії дробового порядку, крайові задачі, наближені розв'язки.

**V.M. Bulavatsky, V.O. Bohaienko**

**SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FRACTIONAL-DIFFERENTIAL  
MOBILE-IMMOBILE MIGRATION DYNAMICS IN A PROFILE FILTRATION FLOW**

**Abstract.** Within the framework of the fractional differential mathematical model, the formulation of boundary-value problems of convective diffusion of soluble substances with regard to immobilization under the conditions of stationary filtration of groundwater from the reservoir to drainage is performed. In the case of averaging the filtration rate over the complex potential region, closed solutions of boundary value problems corresponding to classical and nonlocal boundary conditions are obtained. In the general case of a variable filtration velocity, a technique is developed for the numerical solution of a boundary-value problem of convective diffusion in a fractional-differential formulation, the problems of parallelizing computations are covered, and the results of computer experiments are presented.

**Keywords:** mathematical modeling, nonclassical models, convective-diffusion process, mobile-immobile porous media migration models, fractional diffusion equation, boundary-value problems, approximation solutions.

**Булавацький Володимир Михайлович,**

доктор техн. наук, професор, ведучий научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: v\_bulav@ukr.net.

**Богаєнко Всеволод Александрович,**

кандидат техн. наук, старший научний співробітник Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: sevab@ukr.net.