УДК 519.6

В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ

ТОЧНАЯ ТРЕХТОЧЕЧНАЯ СХЕМА И СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аннотация. Предложены точная трехточечная схема и схемы высокого порядка точности, которые представляют собой две системы линейных алгебраических уравнений. Каждое уравнение системы содержит пять неизвестных значений искомого решения и его первой производной в трех точках сетки на отрезке. При построении схем использовался принцип суперпозиции решений и четырех линейно независимых решений задачи Коши. Частичные суммы функциональных рядов, представляющих независимые решения, дают схемы любого порядка точности для граничной и спектральной задач. Для решения линейных систем предложен метод модифицированной прогонки.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения четвертого порядка, граничная задача, спектральная задача, задача Коши, линейно независимые решения, определитель Вронского, суперпозиция решений, функция Грина, метод сеток, точная схема, схемы высокого порядка точности, функциональные ряды, система линейных алгебраических уравнений, метод прогонки.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] исследованы трехточечные схемы высокого порядка точности для обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ) второго порядка. Такие схемы исследовались в [2, 3] для задачи Штурма–Лиувилля. Схемы второго порядка точности использовались при решении граничной и спектральной задач для ДУ четвертого порядка в работе [4, 5]. Методы построения точных пятиточечных схем для ДУ четвертого порядка представлены в статьях [6, 7]. При проектировании бигармонического уравнения на бикубический сплайн в [8] получена схема четвертого порядка точности. В частности, проекция обычной производной четвертого порядка на кубический базисный сплайн [9] является разностной производной четвертого порядка [7]. Интегро-интерполяционный метод дискретизации граничной задачи для ДУ четвертого порядка в частных производных исследовался в [10].

В настоящей статье получены точная схема и схемы высокого порядка точности для граничной задачи и задачи на собственные значения. Каждая из этих схем представляет собой две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицами ленточной структуры. Неизвестными в СЛАУ являются значения искомого решения и его первой производной в точках сетки.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу

$$Lu \equiv (pu'')'' - (qu')' + ru = f, \;\; 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = a_1, \;\; u'(0) = a_2, \;\; u(1) = b_1, \;\; u'(1) = b_2, \tag{2}$$

$$p > 0, \;\; q \geq 0, \;\; r \geq 0, \tag{3}$$

где коэффициенты p, q, r — кусочно-непрерывные функции.

Введем на отрезке $[0,1]$ равномерную сетку

$$x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N,\ h = 1/N.$$

Для построения точного аналога задачи (1)–(3) на сетке используем следующую систему решений однородного уравнения:

$$Lv_j = 0,\ x_{i-1} < x < x_{i+1},\ j = 1, \ldots, 4, \tag{4}$$

$$\left.\begin{matrix} v_1 = v_1' = pv_1'' = 0,\ (pv_1'')' = 1 \\ v_2 = v_2' = 0,\ pv_2'' = 1,\ (pv_2'')' = 0 \end{matrix}\right\}\ x = x_{i-1}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{matrix} v_3 = v_3' = 0,\ pv_3'' = 1,\ (pv_3'')' = 0 \\ v_4 = v_4' = pv_4'' = 0,\ (pv_4'')' = -1 \end{matrix}\right\}\ x = x_{i+1}. \tag{6}$$

Определитель Вронского системы $v_j(x)$ — величина постоянная. Обозначим его Δ. Например, в точках x_{i-1} и x_{i+1} он имеет соответственно вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_3 & v_4 \\ v_3' & v_4' \end{vmatrix}(x_{i-1}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{vmatrix}(x_{i+1}). \tag{7}$$

Покажем, что $\Delta \neq 0$. Предположим противное. Тогда существуют числа γ_1 и γ_2 такие, что $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 \neq 0$; они определяют линейную зависимость столбцов матрицы, например определителя в точке x_{i+1}, т.е. выполняются следующие соотношения:

$$\begin{gathered} \gamma_1 v_1(x_{i+1}) + \gamma_2 v_2(x_{i+1}) = 0, \\ \gamma_1 v_1'(x_{i+1}) + \gamma_2 v_2'(x_{i+1}) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Следовательно, функция $v(x) = \gamma_1 v_1(x) + \gamma_2 v_2(x)$ удовлетворяет уравнению (4) и граничным условиям (5) и (8), т.е. является собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, в задаче

$$Lw = \lambda w,\ x_{i-1} < x < x_{i+1},$$

$$w(x_{i-1}) = w'(x_{i-1}) = w(x_{i+1}) = w'(x_{i+1}) = 0.$$

Однако все собственные числа этой задачи следуют из формулы

$$\lambda = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [p(w'')^2 + qw^2 + rw^2]\,dx$$

и не могут быть нулевыми в силу условий (3). Таким образом, система решений v_j линейно независима.

Для построения дискретного аналога исходной задачи используем принцип суперпозиции. Он, например, применялся для получения априорных оценок решения граничной задачи для бигармонического уравнения в [11]. Согласно принципу суперпозиции решение задачи (1)–(3) вместе с его производной представим в виде

$$u(x) = \sum_{j=1}^{4} A_j v_j(x) + v_0(x),\ u'(x) = \sum_{j=1}^{4} A_j v_j'(x) + v_0'(x), \tag{9}$$

где $v_j(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения (4), $v_0(x)$ — решение неоднородного уравнения (1) при однородных условиях

$$v_0(x_{i-1}) = v_0'(x_{i-1}) = v_0(x_{i+1}) = v_0'(x_{i+1}) = 0.$$

Как известно, $v_0(x)$ представляется в интегральном виде:

$$v_0(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x,\xi) f(\xi) d\xi.$$

Здесь $G(x,\xi)$ — функция Грина [5], которая удовлетворяет уравнению

$$L_x G(x,\xi) = 0,\ x \neq \xi,\ x_{i-1} < x < x_{i+1},$$

и условиям

$$G(x_{i-1},\xi) = G'(x_{i-1},\xi) = G(x_{i+1},\xi) = G'(x_{i+1},\xi) = 0,$$

$$[G] \equiv G(\xi - 0,\xi) - G(\xi + 0,\xi) = 0, \tag{10}$$

$$[G'] = 0,\ [pG''] = 0,\ [(pG'')' - qG'] = 1.$$

Используя формулу

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \alpha_1(\xi) v_1(x) + \alpha_2(\xi) v_2(x), & x_{i-1} < \xi \le x, \\ \alpha_3(\xi) v_3(x) + \alpha_4(\xi) v_4(x), & x \le \xi < x_{i+1}, \end{cases} \tag{11}$$

и условия (10), в точке $x = \xi$ получим СЛАУ для определения α_j:

$$\begin{gathered} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 - \alpha_3 v_3 - \alpha_4 v_4 = 0, \\ \alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2' - \alpha_3 v_3' - \alpha_4 v_4' = 0, \\ \alpha_1 p v_1'' + \alpha_2 p v_2'' - \alpha_3 p v_3'' - \alpha_4 p v_4'' = 0, \\ \alpha_1 (p v_1'')' + \alpha_2 (p v_2'')' - \alpha_3 (p v_3'')' - \alpha_4 (p v_4'')' = 1, \end{gathered} \tag{12}$$

где α_j — определители третьего порядка, которые вычисляются после раскрытия определителей в (13) по первой строке.

В результате решения системы (12) формула (11) принимает вид

$$\Delta \cdot G(x,\xi) = \begin{cases} \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ pv_1'' & pv_2'' & pv_3'' & pv_4'' \end{vmatrix}, & x_{i-1} < \xi \le x, \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & v_3(x) & v_4(x) \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ v_1' & v_2' & v_3' & v_4' \\ pv_1'' & pv_2'' & pv_3'' & pv_4'' \end{vmatrix}, & x \le \xi < x_{i+1}. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь Δ — определитель в (7). Все функции в строках определителей в (13) ниже первой строки зависят от переменной ξ. После подстановки в (9) точек $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ имеем СЛАУ относительно A_j:

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= A_3 v_{3,\,i-1} + A_4 v_{4,\,i-1}, \\ u_{i-1}' &= A_3 v_{3,\,i-1}' + A_4 v_{4,\,i-1}', \\ u_{i+1} &= A_1 v_{1,\,i+1} + A_2 v_{2,\,i+1}, \\ u_{i+1}' &= A_1 v_{1,\,i+1}' + A_2 v_{2,\,i+1}'. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь и далее индексы указывают на номера точек сетки, в которых взяты значения функций.

При решении системы (14) имеем

$$\Delta \cdot A_1 = (uv_2' - u' v_2)_{i+1}, \quad \Delta \cdot A_2 = (u' v_1 - uv_1')_{i+1},$$
$$\Delta \cdot A_3 = (uv_4' - u' v_4)_{i-1}, \quad \Delta \cdot A_4 = (u' v_3 - uv_3')_{i-1}. \qquad (15)$$

Подставляя A_i из (15) в (9) и полагая $x = x_i$, получаем точный дискретный аналог исходной задачи (1)–(3):

$$\Delta \cdot u_i = \begin{vmatrix} v_{1,i} & v_{2,i} \\ v'_{1,i+1} & v'_{2,i+1} \end{vmatrix} u_{i+1} + \begin{vmatrix} v_{3,i} & v_{4,i} \\ v'_{3,i-1} & v'_{4,i-1} \end{vmatrix} u_{i-1} +$$
$$+ \begin{vmatrix} v_{1,i+1} & v_{2,i+1} \\ v_{1,i} & v_{2,i} \end{vmatrix} u'_{i+1} + \begin{vmatrix} v_{3,i-1} & v_{4,i-1} \\ v_{3,i} & v_{4,i} \end{vmatrix} u'_{i-1} + \Delta \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$
$$\Delta \cdot u'_i = \begin{vmatrix} v'_{1,i} & v'_{2,i} \\ v'_{1,i+1} & v'_{2,i+1} \end{vmatrix} u_{i+1} + \begin{vmatrix} v'_{3,i} & v'_{4,i} \\ v'_{3,i-1} & v'_{4,i-1} \end{vmatrix} u_{i-1} + \qquad (16)$$
$$+ \begin{vmatrix} v_{1,i+1} & v_{2,i+1} \\ v'_{1,i} & v'_{2,i} \end{vmatrix} u'_{i+1} + \begin{vmatrix} v_{3,i-1} & v_{4,i-1} \\ v'_{3,i} & v'_{4,i} \end{vmatrix} u'_{i-1} + \Delta \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G'(x, \xi) f(\xi) d\xi,$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \ u_0 = a_1, \ u'_0 = a_2, \ u_N = b_1, \ u'_N = b_2.$$

Интегрирование по частям в равенствах

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (v_s L v_j - v_j L v_s) dx = 0, \quad \int_{x_{i-1}}^{x_i} (v_s L v_j - v_j L v_s) dx = 0,$$
$$j \neq s, \ \ j, s = 1, 2, 3, 4,$$

с использованием условий (5), (6) приводит соответственно к соотношениям

$$v_{1,i+1} = v_{4,i-1}, \ v_{2,i+1} = -v'_{4,i-1},$$
$$v'_{1,i+1} = v_{3,i-1}, \ v'_{2,i+1} = -v'_{3,i-1}, \qquad (17)$$
$$v_{2,i} = v_{4,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r v_2 dx + v_{2,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r v_4 dx, \quad v_{2,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r v_3 dx + v_{3,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r v_2 dx = 0,$$
$$v_{4,i-1} = v_{1,i} + v_{4,i} - v_{4,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r v_1 dx - v_{1,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r v_4 dx,$$
$$v_{3,i-1} = v_{3,i} - v_{3,i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} r v_1 dx - v_{1,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} r v_3 dx.$$

Для упрощения вычислений согласно (17) значения функций v_3, v'_3, v_4, v'_4 в точке x_{i-1} следует заменить на значения функций v_1, v'_1, v_2, v'_2 в точке x_{i+1} или наоборот. Формулы (17) не противоречат формулам для определителя Вронского (7).

При решении системы (16) следует исключить любые два неизвестных, а затем решать одну СЛАУ, каждая строка которой будет иметь четыре неизвестных значения.

Точность решения дискретного аналога определяется точностью решения задач Коши для v_j и погрешностью метода решения СЛАУ. Если $q(x) \equiv 0$,

$r(x) \equiv 0$, то не требуется решать задачи (4)–(6). В этом случае следует использовать более точные квадратурные формулы, поскольку

$$\overset{\circ}{v}_1(x) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{x_{i-1}}^{z} \frac{tdtdz}{p(t)}, \quad \overset{\circ}{v}_2(x) = \int\limits_{x_{i-1}}^{x} \int\limits_{x_{i-1}}^{z} \frac{dtdz}{p(t)},$$

$$\overset{\circ}{v}_3(x) = \int\limits_{x}^{x_{i+1}} \int\limits_{z}^{x_{i+1}} \frac{dtdz}{p(t)}, \quad \overset{\circ}{v}_4(x) = \int\limits_{x}^{x_{i+1}} \int\limits_{z}^{x_{i+1}} \frac{(1-t)dtdz}{p(t)}.$$

ПОСТРОЕНИЕ СХЕМ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Исходя из формул для коэффициентов точной схемы, получим схему любого порядка точности. Введем в точке x_i локальную систему координат, полагая $x = x_i + sh$. Отрезок $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ переходит в отрезок $-1 \le s \le 1$. Точке x_i соответствует точка $s = 0$. Покажем на примере решения $v_1(x)$, как строить схему любого порядка точности. Положим $v_1(x) = v_1(x_i + sh) = h^3 \alpha(s, h)$. Очевидно, уравнение для $\alpha(s, h)$ переходит в следующее:

$$(\bar{p}\alpha'')'' - h^2 (\bar{q}\alpha')' + h^4 \bar{r}\alpha = 0, \quad -1 < s < 1, \tag{18}$$

где $\bar{p}(s) = p(x_i + sh)$, $\bar{q}(s) = q(x_i + sh)$, $\bar{r}(s) = r(x_i + sh)$.

Из (18) видно, что $\alpha(s, h)$ является аналитической функцией параметра h^2 и поэтому представляет сходящийся ряд

$$\alpha(s, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(s) h^{2k}, \tag{19}$$

где $\alpha_k(s)$ определяются по рекуррентным формулам. Например, после подстановки трех слагаемых ряда в (18) получим для трех коэффициентов ряда следующие уравнения:

$$(\bar{p}\alpha_0'')'' = 0, \; (\bar{p}\alpha_1'')'' - (\bar{q}\alpha_0')' = 0, \; (\bar{p}\alpha_2'')'' - (\bar{q}\alpha_1')' + \bar{r}\alpha_0 = 0. \tag{20}$$

Условия Коши при $s = -1$ для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ следуют из начальных условий (5) для $v_1(x)$:

$$\alpha_0 = \alpha_0' = \bar{p}\alpha_0'' = 0, \; (\bar{p}\alpha_0'')' = 1,$$

$$\alpha_k = \alpha_k' = \bar{p}\alpha_k'' = (\bar{p}\alpha_k'')' = 0, \quad k > 0.$$

После интегрирования (20) получим следующие формулы:

$$\alpha_0(s) = \int\limits_{-1}^{s} \int\limits_{-1}^{\theta} \frac{tdtd\theta}{\bar{p}}, \quad \alpha_0'(s) = \int\limits_{-1}^{s} \frac{tdt}{\bar{p}},$$

$$\alpha_1(s) = \int\limits_{-1}^{s} \int\limits_{-1}^{\mu} \frac{1}{\bar{p}} \int\limits_{-1}^{\theta} \bar{q}\alpha_0' dtd\theta d\mu, \quad \alpha_1'(s) = \int\limits_{-1}^{s} \frac{1}{\bar{p}} \int\limits_{-1}^{\theta} \bar{q}\alpha_0' dtd\theta,$$

$$\alpha_2(s)=\int_{-1}^{s}\int_{-1}^{v}\frac{1}{\bar{p}}\left[\int_{-1}^{\mu}\left(\bar{q}\alpha'_1-\int_{-1}^{\theta}\bar{r}\alpha_0 dt\right)d\theta\right]d\mu dv, \qquad (21)$$

$$\alpha'_2(s)=\int_{-1}^{s}\frac{1}{\bar{p}}\left[\int_{-1}^{\mu}\left(\bar{q}\alpha'_1-\int_{-1}^{\theta}\bar{r}\alpha_0 dt\right)d\theta\right]d\mu.$$

Аналогичные ряды будут представлять другие решения v_j. Дифференцирование ряда (19) определяет коэффициенты для α'_k, $k=0,1,2,\ldots$, для вычисления производной v'_1 в точках сетки. Если в СЛАУ (16) вместо v_j использовать частичные суммы рядов, например для v_1

$$P_2(s)=\sum_{k=0}^{2}\alpha_k(s)h^{2k},$$

то получим схему шестого порядка точности.

При практическом использовании схем в случае переменных коэффициентов уравнения (1) требуется вычисление многократных интегралов на каждом интервале сетки. Чтобы сохранить точность $O(h^6)$ в точках $s=-1,0,1$, для $\alpha_0(s)$ необходима квадратурная формула с точностью $O(h^6)$, для $\alpha_1(s)$ — с точностью $O(h^4)$, для $\alpha_2(s)$ — с точностью $O(h^2)$. Точность схем увеличивается с ростом слагаемых в частичной сумме ряда, т.е. $P_m(s)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k(s)h^{2k}$ определяет точность $O(h^{2m+2})$.

Из формул (21) следует, что схемы сохраняют порядок точности в случае разрывных функций $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, когда точки разрыва являются точками сетки. Поэтому точная схема и схемы любого порядка точности могут быть построены при произвольном расположении точек x_i на исходном интервале.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОЙ СХЕМЫ И СХЕМ ЛЮБОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим спектральную задачу

$$LW=\lambda\rho W,\ \ 0<x<1, \qquad (22)$$

$$W(0)=W'(0)=W(1)=W'(1)=0, \qquad (23)$$

$$0<c_1\le p,\ \ \rho\le c_2,\ \ 0\le q\le c_2,\ \ 0\le r\le c_2. \qquad (24)$$

Для построения точного сеточного аналога этой задачи используем систему решений w_j, $j=1,2,3,4$, удовлетворяющих на интервале (x_{i-1},x_{i+1}) уравнению (22) и (как и для v_j) начальным условиям (5), (6). Общее решение однородного уравнения (22) представим в виде

$$W(x,\lambda)=\sum B_j w_j(x,\lambda),\ \ x_{i-1}<x<x_{i+1}.$$

По аналогии с решением задачи (16) получим две однородные СЛАУ:

$$\delta\cdot W_i=\begin{vmatrix} w_{1,i} & w_{2,i}\\ w'_{1,i+1} & w'_{2,i+1}\end{vmatrix}W_{i+1}+\begin{vmatrix} w_{3,i} & w_{4,i}\\ w'_{3,i-1} & w'_{4,i-1}\end{vmatrix}W_{i-1}+$$

$$+\begin{vmatrix} w_{1,i+1} & w_{2,i+1} \\ w_{1,i} & w_{2,i} \end{vmatrix} W'_{i+1} + \begin{vmatrix} w_{3,i-1} & w_{4,i-1} \\ w_{3,i} & w_{4,i} \end{vmatrix} W'_{i-1},$$

$$\delta \cdot W'_i = \begin{vmatrix} w'_{1,i} & w'_{2,i} \\ w'_{1,i+1} & w'_{2,i+1} \end{vmatrix} W_{i+1} + \begin{vmatrix} w'_{3,i} & w'_{4,i} \\ w'_{3,i-1} & w'_{4,i-1} \end{vmatrix} W_{i-1} +$$

$$+\begin{vmatrix} w_{1,i+1} & w_{2,i+1} \\ w'_{1,i} & w'_{2,i} \end{vmatrix} W'_{i+1} + \begin{vmatrix} w_{3,i-1} & w_{4,i-1} \\ w'_{3,i} & w'_{4,i} \end{vmatrix} W'_{i-1},$$

$$i = 1, \ldots, N-1, \; W_0 = W'_0 = W_N = W'_N = 0. \tag{25}$$

Здесь δ — определитель Вронского:

$$\delta = \begin{vmatrix} w_3 & w_4 \\ w'_3 & w'_4 \end{vmatrix} (x_{i-1}, \lambda) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w'_1 & w'_2 \end{vmatrix} (x_{i+1}, \lambda).$$

Если $\delta = 0$, то, например, линейная комбинация $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$, учитывая условия (23), является собственной функцией, соответствующей собственному числу (с.ч.) λ. Покажем, как можно обеспечить $\delta \neq 0$, т.е. линейную независимость функций w_j. Переходим к переменной s. Положим, например, что $w_1(x, \lambda) = h^3 \beta(s, \lambda, h)$. Тогда вместо (22) получим уравнение

$$L^{(s)} \beta \equiv (\bar{p}\beta'')'' - h^2 (\bar{q}\beta')' + h^4 \bar{r}\beta = h^4 \lambda \bar{\rho}\beta, \; -1 < s < 1, \tag{26}$$

$$\bar{p}(s) = p(x_i + sh), \; \bar{q}(s) = q(x_i + sh), \; \bar{r}(s) = r(x_i + sh), \; \bar{\rho}(s) = \rho(x_i + sh).$$

Достаточным условием линейной независимости w_j является выбор параметра h из неравенства

$$h^4 \lambda_m \leq h^4 \frac{c_2}{c_1} \lambda_m^0 < \mu_{\min}^0 \frac{c_2}{c_1} \leq \mu_{\min}. \tag{27}$$

Здесь $\mu_{\min}$ — минимальное с.ч. задачи

$$L^{(s)} W = \mu \rho W, \; -1 < s < 1,$$

$$W(-1) = W'(-1) = W(1) = W'(1) = 0,$$

$\mu_{\min}^0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^4$ — минимальное с.ч. задачи

$$W^{IV} = \mu^0 W, \; -1 < s < 1,$$

$$W(-1) = W''(-1) = W(1) = W''(1) = 0,$$

λ_m^0 — с.ч. номера m задачи

$$W^{IV} - W'' + W = \lambda^0 W, \; 0 < x < 1,$$

$$W(0) = W'(0) = W(1) = W'(1) = 0,$$

λ_m — с.ч. номера m задачи (22), (23).

Из (27) следует ограничение на параметр h в зависимости от номера m:

$$h \leq h_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt[4]{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 \frac{1}{\lambda_m^0}} = O\left(\frac{1}{2m}\right). \tag{28}$$

Неравенство (27) получено при использовании вариационного принципа минимакса в спектральных задачах и неравенства (24). При ограничении (28) w_j не являются собственными функциями уравнения (22) и поэтому не обращают в нуль определитель Вронского.

Из (26) видно, что $\beta(s, \lambda, h)$ является аналитической функцией параметра h^2, поэтому представляется рядом

$$\beta(s, \lambda, h) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(s, \lambda) h^{2k}. \tag{29}$$

Согласно (5) начальные условия при $s = -1$ имеют вид

$$\beta_0 = \beta'_0 = \bar{p}\beta''_0 = 0, \ (\bar{p}\beta''_0)' = 1,$$
$$\beta_k = \beta'_k = \bar{p}\beta''_k = (\bar{p}\beta''_0)' = 0, \ k > 0. \tag{30}$$

Подставляя (29) в (26), получаем следующие уравнения:

$$(\bar{p}\beta''_0(s))' = 0, \ (\bar{p}\beta''_1(s))' - (\bar{q}\beta'_0(s))' = 0, \quad -1 < s < 1,$$
$$(\bar{p}\beta''_{n+2}(s, \lambda))' - (\bar{q}\beta'_{n+1}(s, \lambda))' + (\bar{r} - \lambda\bar{\rho})\beta_n(s, \lambda) = 0, \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{31}$$

После интегрирования (31) с учетом (30) для первых трех слагаемых, как и в (21), получим рекуррентные формулы

$$\beta_0(s) = \int_{-1}^{s}\int_{-1}^{\theta} \frac{t}{\bar{p}} dt d\theta, \ \beta'_0(s) = \int_{-1}^{s} \frac{t}{\bar{p}} dt,$$

$$\beta_1(s) = \int_{-1}^{s}\int_{-1}^{\mu} \frac{1}{\bar{p}} \int_{-1}^{\theta} \bar{q}\beta'_0 dt d\theta d\mu, \ \beta'_1(s) = \int_{-1}^{s} \frac{1}{\bar{p}} \int_{-1}^{\theta} \bar{q}\beta'_0 dt d\theta,$$

$$\beta_2(s, \lambda) = \int_{-1}^{s}\int_{-1}^{v} \frac{1}{\bar{p}} \left[\int_{-1}^{\mu} (\bar{q}\beta'_1 + \int_{-1}^{\theta} (\lambda\bar{\rho} - \bar{r})\beta_0 dt) d\theta \right] d\mu dv, \tag{32}$$

$$\beta'_2(s, \lambda) = \int_{-1}^{s} \frac{1}{\bar{p}} \left[\int_{-1}^{\mu} (\bar{q}\beta'_1 + \int_{-1}^{\theta} (\lambda\bar{\rho} - \bar{r})\beta_0 dt) d\theta \right] d\mu.$$

Коэффициенты β'_k используются при вычислении производной w'_1 в точках сетки. Аналогичные ряды представляют и другие решения w_j. Если (как и в случае граничной задачи) при неизвестных в СЛАУ (25) вместо w_j использовать частичные суммы соответствующих рядов из трех слагаемых, то получим схему шестого порядка точности. Кратные интегралы в каждом слагаемом должны вычисляться по квадратурной формуле различной точности, как указано выше для v_j. Из (31) и (32) видно, что схема на основе двух слагаемых ряда линейна по λ, а при более двух слагаемых — нелинейна по λ. Для реализации нелинейной схемы вначале находим решение по линейной схеме, а затем найденные с.ч. $\tilde{\lambda}$ подставляем в нелинейную часть. Тем самым проводим линеаризацию. Подобным образом с высокой точностью решалась задача Штурма–Лиувилля в [2].

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ

Уравнения (16) следует решать параллельной прогонкой. Запишем их в следующем виде:

$$\Delta \cdot u_i = A_i u_{i-1} + B_i u_{i+1} + D u'_{i-1} + E u'_{i+1} + F_i,$$
$$\Delta \cdot u'_i = \tilde{A}_i u'_{i-1} + \tilde{B}_i u'_{i+1} + \tilde{D} u_{i-1} + \tilde{E} u_{i+1} + \tilde{F}_i. \tag{33}$$

Здесь введены обозначения, удобные для сравнения с известной прогонкой, например [12]:

$$A_i = \begin{vmatrix} v_{3,i} & v_{4,i} \\ v'_{3,i-1} & v'_{4,i-1} \end{vmatrix}, \ B_i = \begin{vmatrix} v_{1,i} & v_{2,i} \\ v'_{1,i+1} & v'_{2,i+1} \end{vmatrix},$$

$$D_i = \begin{vmatrix} v_{3,i-1} & v_{4,i-1} \\ v_{3,i} & v_{4,i} \end{vmatrix}, \ E_i = \begin{vmatrix} v_{1,i+1} & v_{2,i+1} \\ v'_{1,i} & v'_{2,i} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{A}_i = \begin{vmatrix} v_{3,i-1} & v_{4,i-1} \\ v'_{3,i} & v'_{4,i} \end{vmatrix}, \ \widetilde{B}_i = \begin{vmatrix} v_{1,i+1} & v_{2,i+1} \\ v'_{1,i} & v'_{2,i} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{D}_i = \begin{vmatrix} v'_{3,i} & v'_{4,i} \\ v'_{3,i-1} & v'_{4,i-1} \end{vmatrix}, \ \widetilde{E}_i = \begin{vmatrix} v'_{1,i} & v'_{2,i} \\ v'_{1,i+1} & v'_{2,i+1} \end{vmatrix},$$

$$F_i = \Delta \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x_i, \xi) f(\xi) d\xi, \ \ \widetilde{F}_i = \Delta \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G'_x(x_i, \xi) f(\xi) d\xi.$$

В силу свойств линейной независимости решений v_j все определители в (33) отличны от нуля. Доказательство от противного.

Решения уравнений (33) находим соответственно в виде

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \ u'_i = \widetilde{\alpha}_{i+1} u'_{i+1} + \widetilde{\beta}_{i+1}, \ i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{34}$$

После подстановки $u_i, u_{i-1}, u'_i, u'_{i-1}$ в (33) получим

$$\begin{gathered} [(\Delta - A_i \alpha_i) \alpha_{i+1} - B_i] u_{i+1} - (D_i \widetilde{\alpha}_i \widetilde{\alpha}_{i+1} + E_i) u'_{i+1} = \\ = (A_i \alpha_i - \Delta) \beta_{i+1} + D_i \widetilde{\alpha}_i \widetilde{\beta}_{i+1} + A_i \beta_i + D_i \widetilde{\beta}_i + F_i, \\ [(\Delta - \widetilde{A}_i \widetilde{\alpha}_i) \widetilde{\alpha}_{i+1} - \widetilde{B}_i] u'_{i+1} - (\widetilde{D}_i \alpha_i \alpha_{i+1} + \widetilde{E}_i) u_{i+1} = \\ = (\widetilde{A}_i \widetilde{\alpha}_i - \Delta) \widetilde{\beta}_{i+1} + \widetilde{D}_i \alpha_i \beta_{i+1} + \widetilde{A}_i \widetilde{\beta}_i + \widetilde{D}_i \beta_i + \widetilde{F}_i. \end{gathered} \tag{35}$$

Выражения (35) для любых значений $u_{i+1}, \ u'_{i+1}$ выполняются при условиях

$$\begin{gathered} [\Delta - (A_i + \widetilde{D}_i) \alpha_i] \alpha_{i+1} = B_i + \widetilde{E}_i, \\ [\Delta - (\widetilde{A}_i + D_i) \widetilde{\alpha}_i] \widetilde{\alpha}_{i+1} = \widetilde{B}_i + E_i, \end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered} (\Delta - A_i \alpha_i) \beta_{i+1} - D_i \widetilde{\alpha}_i \widetilde{\beta}_{i+1} = \Phi_i, \\ -\widetilde{D}_i \alpha_i \beta_{i+1} + (\Delta - \widetilde{A}_i \widetilde{\alpha}_i) \widetilde{\beta}_{i+1} = \widetilde{\Phi}_i. \end{gathered} \tag{37}$$

Здесь

$$\Phi_i = A_i \beta_i + D_i \widetilde{\beta}_i + F_i, \ \widetilde{\Phi}_i = \widetilde{A}_i \widetilde{\beta}_i + \widetilde{D}_i \beta_i + \widetilde{F}_i.$$

Определитель СЛАУ (37) имеет вид

$$\delta_i = (\Delta - A_i \alpha_i)(\Delta - \widetilde{A}_i \widetilde{\alpha}_i) - D_i \widetilde{D}_i \alpha_i \widetilde{\alpha}_i. \tag{38}$$

Формула (38) упрощается, если использовать равенство

$$A_i \widetilde{A}_i - D_i \widetilde{D}_i = \Delta \cdot \begin{vmatrix} v_3 & v_4 \\ v'_3 & v'_4 \end{vmatrix} i,$$

которое отлично от нуля в силу линейной независимости решений v_j.

Из (36) и (37) следуют рекуррентные формулы

$$\alpha_{i+1}=\frac{B_i+\widetilde{E}_i}{\Delta-(A_i+\widetilde{D}_i)\alpha_i},\ \widetilde{\alpha}_{i+1}=\frac{\widetilde{B}_i+E_i}{\Delta-(\widetilde{A}_i+D_i)\alpha_i},$$

$$\beta_{i+1}=\frac{\Phi_i(\Delta-\widetilde{A}_i\widetilde{\alpha}_i)-\widetilde{\Phi}_iD_i\widetilde{\alpha}_i}{\delta},\ \widetilde{\beta}_{i+1}=\frac{\widetilde{\Phi}_i(\Delta-A_i\alpha_i)-\Phi_i\widetilde{D}_i\alpha_i}{\delta}. \qquad (39)$$

Если в (39) положить $D=\widetilde{D}=E=\widetilde{E}=0$, то получим известные формулы прогонки.

Для значений функции $\alpha, \widetilde{\alpha}, \beta, \widetilde{\beta}$ задачи Коши решаются слева направо. При $i=0$ из (34)

$$u_0=\alpha_1u_1+\beta_1,\ u_0'=\widetilde{\alpha}_1u_1'+\beta_1.$$

Граничные условия слева имеют вид

$$u_0=a_1,\ u_0'=b_1.$$

Поэтому

$$\alpha_1=\widetilde{\alpha}_1=0,\ \beta_1=a_1,\ \widetilde{\beta}_1=b_1.$$

Используя (39), получаем все значения $\alpha_i, \widetilde{\alpha}_i, \beta_i, \widetilde{\beta}_i$, в том числе $\alpha_N, \widetilde{\alpha}_N, \beta_N, \widetilde{\beta}_N$.

Для значений u_i, u_i' задачи Коши решаются справа налево. При $i=N-1$ из (34) имеем

$$u_{N-1}=\alpha_Nu_N+\beta_N,\ u_{N-1}'=\widetilde{\alpha}_Nu_N'+\widetilde{\beta}_N.$$

Граничные условия справа имеют вид

$$u_N=a_2,\ u_N'=b_2.$$

Из (34) при $i=N-1, N-2,\ldots,1$ получим все значения u_i, u_i'.

Достаточными условиями, при которых формулы (39) имеют смысл, являются

$$|\Delta|\geq\max_i\{|A_i|+|\widetilde{D}_i|+|B_i|+|\widetilde{E}_i|,\ |\widetilde{A}_i|+|D_i|+|\widetilde{B}_i|+|E_i|\}. \qquad (40)$$

Предположим, что $|\alpha_i|\leq 1$, и покажем, что $|\alpha_{i+1}|\leq 1$. Используя неравенство

$$|\Delta|\ \geq\ |A_i|+|\widetilde{D}_i|+|B_i|+|\widetilde{E}_i|,$$

оценим снизу следующую разность:

$$|\Delta-(A_i+\widetilde{D}_i)\alpha_i|-|B_i+\widetilde{E}_i|\ \geq\ |\Delta-A_i\alpha_i|-|\widetilde{D}_i\alpha_i|-|B_i|-|\widetilde{E}_i|\geq$$

$$\geq\ |\Delta|-|A_i||\alpha_i|-|\widetilde{D}_i||\alpha_i|-|B_i|-|\widetilde{E}_i|\geq(|A_i|+|\widetilde{D}_i|)(1-|\alpha_i|)\geq 0.$$

Из (39) следует

$$|\alpha_{i+1}|\ =\ \frac{|B_i+\widetilde{E}_i|}{|\Delta-(A_i+\widetilde{D}_i)\alpha_i|}\leq 1.$$

Так как $\alpha_1=0$, то $|\alpha_i|\leq 1$, $i=1,\ldots,N$.

Поскольку для линейно независимых решений

$$B_i+\widetilde{E}_i=\begin{vmatrix} v_{1,i}+v'_{1,i} & v_{2,i}+v'_{2,i} \\ v'_{1,i+1} & v'_{2,i+1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

то из (40) при $i=1,\ldots,N$ следует

$$|\alpha_i|<1,\ |\Delta-A_i\alpha_i|-|\widetilde{D}_i||\alpha_i|>0.$$

Используя второй вариант неравенства

$$|\Delta| \geq |\widetilde{A}_i| + |D_i| + |\widetilde{B}_i| + |E_i|,$$

получаем строгие неравенства

$$|\widetilde{\alpha}_i| < 1, \ |\Delta - \widetilde{A}_i \widetilde{\alpha}_i| - |D_i||\widetilde{\alpha}_i| > 0.$$

Таким образом, знаменатели в (39) отличны от нуля.

Следует заметить, что условие диагонального преобладания (40) позволяет использовать для решения уравнений (33) итерационные методы. Однако в данном случае для матриц ленточной структуры экономичнее применить модифицированный метод прогонки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрен алгоритм высокой точности для решения граничной и спектральной задач. Для реализации требуется решать две СЛАУ, матрицы которых имеют три ленты. Элементами матриц являются частичные суммы рядов, представляющих линейно независимые решения задач Коши в точках сетки. Слагаемые рядов выражаются через кратные интегралы по рекуррентным формулам. Точность алгоритма повышается с увеличением слагаемых в частичной сумме. Исключив любые два неизвестных из двух СЛАУ, получим одну систему. Каждое уравнение СЛАУ содержит значения искомого решения и его первой производной только в трех точках сетки. Для решения двух линейных систем ленточной структуры обоснован метод параллельной прогонки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.Н. Об однородных разностных схемах высокого порядка точности на неравномерных сетках. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1963. Т. 3, № 3. С. 99–108.
2. Приказчиков В.Г. Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1969. Т. 9, № 2. С. 315–335.
3. Приказчиков В.Г. Схемы высокого порядка точности для задачи Штурма–Лиувилля с параметром в краевых условиях. Сб. «Математическое обеспечение ЭЦВМ». Киев: Ин-т кибернетики АН УССР. 1970. № 3. С. 26–45.
4. Хао Шоу. Однородные разностные схемы для уравнения 4-го порядка с разрывными коэффициентами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 1963. Т. 3, № 5. С. 841–860.
5. Хао Шоу. Разностная задача Штурма–Лиувилля для уравнения 4-го порядка с разрывными коэффициентами. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1963. Т. 3, № 6. С. 1014–1031.
6. Бурханов Ш.А., Гуминская Н.А., Макаров В.Л., Приказчиков В.Г. О точных разностных схемах для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. *Докл. АН УССР. Сер. А.* 1978. № 9. С. 778–780.
7. Приказчиков В.Г. Методы построения точной разностной схемы для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 2. С. 1–7.
8. Приказчиков В.Г., Клунник О.О., Любомирська О.В. Сплайнові проекційні схеми для рівнянь 4-го порядку. *Обчислювальна та прикладна математика*. 1992. № 76. С. 49–59.
9. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980. 352 с.
10. Химич А.Н., Приказчиков В.Г. Точность интегро-интерполяционного метода в задаче прогиба консольной пластины. Киев: Вища школа. 1979. Вып. 38. С. 90–97.
11. Приказчиков В.Г., Клунник А.А. Априорная оценка решения бигармонического уравнения. *Дифференциальные уравнения*. 1994. Т. 30, № 10. С. 1800–1805.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1983. 616 с.

Надійшла до редакції 29.07.2019

В.Г. Приказчиков

ТОЧНА ТРИТОЧКОВА СХЕМА ТА СХЕМИ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Анотація. Запропоновано точну триточкову схему та схеми високого порядку точності, які є двома системами лінійних алгебраїчних рівнянь. Кожне рівняння системи має п'ять невідомих значень шуканого розв'язку та його першої похідної в трьох точках сітки на відрізку. Для побудови схем використано принцип суперпозиції розв'язків та чотирьох лінійно незалежних розв'язків задачі Коші. Частинні суми функціональних рядів, які є незалежними розв'язками, дають схеми довільного порядку точності для крайової та спектральної задач. Для розв'язування лінійних систем запропоновано метод модифікованої прогонки.

Ключові слова: диференціальне рівняння четвертого порядку, крайова задача, спектральна задача, задача Коші, лінійно незалежні розв'язки, визначник Вронського, суперпозиція розв'язків, функція Гріна, метод сіток, точна схема, схема високого порядку точності, функціональні ряди, система лінійних алгебраїчних рівнянь, метод прогонки.

V. Prikazchikov

EXACT THREE-POINT SCHEME AND SCHEMES OF HIGH ORDER OF ACCURACY FOR A FORTH-ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

Abstract. We propose a exact three-point scheme and schemes of high order of accuracy, which are two systems of linear algebraic equations. Each equation of the system contains five unknown values of the exact solution and its first derivative at three grid points on the interval. In constructing the scheme, the principle of superposition of solutions was used. Partial sums of the functional series representing independent solutions give schemes of arbitrary order of accuracy for the boundary problem and for the spectral one. To solve systems of linear equations, the modified ribbon matrix algorithm is proposed.

Keywords: forth-order differential equation, boundary-value problem, spectral problem, initial value problem, linearly independent solutions, Wronskian, superposition of solutions, Green function, grid method, exact scheme, scheme of high order of accuracy, functional series, system of linear algebraic equations, ribbon matrix algorithm.

Приказчиков Виктор Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: viktorprikazchikov@gmail.com.