УДК 519.85

**Н.И. ГИЛЬ, В.Н. ПАЦУК**

# Ф-ФУНКЦИИ 2D-ОБЪЕКТОВ С ГРАНИЦАМИ В ВИДЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Аннотация.** Рассмотрен один из подходов к представлению в аналитическом виде условий непересечения и включения неориентированных выпуклых 2D-объектов, границами которых являются кривые второго порядка канонического вида. Приведены условия взаимного непересечения пары эллипсов, эллипса и области, ограниченной параболой, а также условия включения круга в эллипс, эллипса в эллипс, эллипса в область, ограниченную параболой. Аналитические условия представлены на основании уравнений границ соответствующих объектов (областей) и приведены к виду системы неравенств, зависящих от параметров размещения объектов и параметра, который является решением некоторого уравнения одной переменной. На основании полученных систем неравенств построены соответствующие Ф-функции.

**Ключевые слова:** эллипсы, парабола, непересечение, включение, Ф-функции.

## ВВЕДЕНИЕ

Представление условий взаимного непересечения в аналитическом либо алгоритмическом виде имеет важное значение в различных прикладных областях: робототехнике, медицине, раскрое материалов, упаковках, укладках и т.п. Достаточно подробно и разносторонне исследованы задачи представления условий непересечения и соблюдения минимальных допустимых расстояний для многоугольников, многогранников, кругов, шаров, а также объектов, получаемых их комбинацией с построением объединений и пересечений [1–3].

При аналитическом моделировании применяются подходы, связанные с построением Ф-функций [1], учетом комбинаторных свойств размещений и построением класса функций, зависящих от площади взаимного пересечения объектов [4–7]. В двумерном случае получены Ф-функции объектов при наличии описания их границы в виде кривой, состоящей из участков прямых, выпуклых и вогнутых дуг окружностей [8]. В работах [9–11] построены Ф-функции для различных пар трехмерных тел, допускающих одновременно непрерывные трансляции и повороты, а в [12] — Ф-функция для $n$-мерных параллелепипедов, допускающих ортогональные повороты. В то же время представление условий взаимного непересечения и включения для объектов, граница которых описывается другими видами кривых, существенно сложнее и результатов в этой области меньше. Так, в [13] успешно применяется для задач оптимизации укладок с использованием эллипсов особое преобразование пространства, упрощающее задачу. В [14–16] рассматривается аппроксимация эллипсов определенным образом построенным набором кругов. Распространенным методом является также аппросимация границы объектов ломаными в двумерном и многогранными поверхностями в трехмерном случаях. Ввиду сложностей построения Ф-функций для упомянутых объектов предложены квази-Ф-функции и с их помощью решен ряд задач, в частности, для эллипсов и эллипсоидов [14, 17–20].

Вместе с тем, до настоящего времени мало внимания уделялось представлению условий непересечения и включения для объектов, границами которых являются другие кривые второго порядка. Такие кривые также являются предметом приведенного далее исследования. Предлагаемый подход имеет преимущество — позволяет работать с невыпуклыми областями (дополнениями до выпуклых областей), хотя квази-Ф-функции для них еще не построены. В то же время используются универсальные свойства гладких объектов, что позволяет распространить этот подход на другие типы объектов.

## УСЛОВИЯ НЕПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОБЪЕКТОВ

Пусть $\bar{S}_i$, $i=1,2,$ — пара выпуклых объектов, границы которых заданы каноническими уравнениями $f_1(X,Y)=0$, $f_2(\bar{X},\bar{Y})=0$ в собственных системах координат $XOY$, $\bar{X}O\bar{Y}$ соответственно. Обозначим $f_i(x,y)=0$, $i=1,2,$ уравнения границ соответствующих объектов $S_i(u_i,\theta_i)$ относительно основной системы координат *xoy*, где $u_i=(x_i,y_i)$ и $\theta_i$ — параметры размещения объекта $\bar{S}_i$ (положение начала и угол поворота собственной системы координат относительно *xoy*). Будем считать, что $(x_i,y_i)\in \operatorname{int}\bar{S}_i$ и знаки уравнений выбраны так, что $f_i(x_i,y_i)<0$. Обозначим $S_2^{\gamma}$ объект, гомотетичный объекту $S_2$ с коэффициентом гомотетии $\gamma$.

Можно утверждать, что объекты $S_1\{u_1,\theta_1\}$ и $S_2\{u_2,\theta_2\}$ не пересекаются, т.е. $S_1\bigcap S_2=\varnothing$, если существует такая точка $(x^*,y^*)$, для которой выполняются следующие условия:

— точки $(x_1,y_1)$ и $(x_2,y_2)$ находятся по разные стороны от касательной к $S_1$ в точке $(x^*,y^*)$;

— точка $(x^*,y^*)$ не является внутренней точкой объекта $S_2$;

— точка $(x^*,y^*)$ принадлежит границам объектов $S_1$ и $S_2^{\gamma}$;

— угловые коэффициенты касательных к объектам $S_1$ и $S_1^{\gamma}$ в точке $(x^*,y^*)$ равны.

Эти условия аналитически можно представить в виде системы равенств и неравенств

$$\begin{cases} -F(x_1,y_1)\cdot F(x_2,y_2)>0, \\ f_2(x^*,y^*)\ge 0, \\ f_1(x^*,y^*)=0, \\ \left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}\cdot\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}-\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}\cdot\left.\dfrac{\partial f_2}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}=0, \end{cases} \qquad (1)$$

где $F(x,y)\equiv(y-y^*)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial y}\right|_{(x^*,y^*)}+(x-x^*)\left.\dfrac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{(x^*,y^*)}=0$ — уравнение касательной к объекту $S_1$ в точке $(x^*,y^*)$.

Значения $x^*$, $y^*$ (при заданных $x_i$, $y_i$, $\theta_i$, $i=1,2$) можно определить на основании равенств системы одним из вычислительных методов. Тогда выполнение неравенств при полученных значениях $x^*$, $y^*$ гарантирует непересечение объектов $S_1$ и $S_2$. Если при этих значениях $x^*$, $y^*$ второе неравенство системы превращается в равенство, то имеет место касание объектов.

В качестве примера рассмотрим реализацию предлагаемого подхода для эллипса и области, ограниченной параболой.

Пусть относительно некоторой системы координат $xoy$ имеем параболу $S_1\{u_1, \theta_1\}$ и эллипс $S_2\{u_2, \theta_2\}$ с параметрами размещения $u_1(x_1, y_1)$, $\theta_1$ и $u_2=(x_2, y_2)$, $\theta_2$, которые в собственных системах координат $XOY$ и $\overline{XOY}$ заданы уравнениями $\overline{f}_1(X,Y) \equiv Y - pX^2 = 0$ и $\overline{f}_2(\overline{X},\overline{Y}) \equiv B^2\overline{X}^2 + A^2\overline{Y}^2 - A^2B^2 = 0$ соответственно, где $A$, $B$ — полуоси эллипса.

Выберем в качестве основной систему координат $XOY$, относительно которой имеем параболу $S_1\{\overline{u}_1, \overline{\theta}_1)$ и эллипс $S_2\{\overline{u}_2, \overline{\theta}_2)$, где $\overline{u}_1=(0{,}0)$, $\overline{\theta}_1=0$, $\overline{u}_2=(X_0, Y_0)$, $\overline{\theta}_2=\theta_2-\theta_1$. Здесь

$$X_0=(x_2-x_1)\cos\theta_1-(y_2-y_1)\sin\theta_1,$$

$$Y_0=(x_2-x_1)\sin\theta_1+(y_2-y_1)\cos\theta_1.$$

С учетом формул преобразования координат

$$\overline{X}=(X-X_0)\cos\overline{\theta}_2+(Y-Y_0)\sin\overline{\theta}_2,$$

$$\overline{Y}=-(X-X_0)\sin\overline{\theta}_2+(Y-Y_0)\cos\overline{\theta}_2$$

уравнение границы эллипса $S_2\{X_0, Y_0, \overline{\theta}_2\}$ в системе координат $XOY$ принимает вид

$$f_2(X,Y)\equiv B^2[(X-X_0)\cos\overline{\theta}_2+(Y-Y_0)\sin\overline{\theta}_2]^2+$$

$$+A^2[-(X-X_0)\sin\overline{\theta}_2+(Y-Y_0)\cos\overline{\theta}_2]^2-A^2B^2=0.$$

Под областью, ограниченной параболой $S_1\{0, 0, 0\}$, будем понимать множество точек $(\overline{X}, \overline{Y})$, для которых $\overline{Y}-p\overline{X}^2\ge 0$. Пусть $(X^*, Y^*)$ — некоторая точка, принадлежащая параболе $S_1\{0, 0, 0\}$ и границе эллипса $S_2^{\gamma}\{X_0, Y_0, \overline{\theta}_2\}$. Угловые коэффициенты $k_i$, $i=1, 2$, касательных к $S_1$ и $S_2^{\gamma}$ в точке $(X^*, Y^*)$ имеют вид

$$k_1=2pX^*,\ k_2=-\frac{(X^*-X_0)L+(Y^*-Y_0)S}{(X^*-X_0)S+(Y^*-Y_0)R},$$

где

$$L=B^2\cos^2\overline{\theta}_2+A^2\sin^2\overline{\theta}_2,\ R=B^2\sin^2\overline{\theta}_2+A^2\cos^2\overline{\theta}_2,$$

$$S=(B^2-A^2)\sin\overline{\theta}_2\cos\overline{\theta}_2.$$

Тогда условие равенства угловых коэффициентов, сохраняющееся при ортогональных преобразованиях пространства, в точке $(X^*, Y^*)$ представляется в виде

$$\varphi(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, X^*)\equiv$$

$$\equiv(L+2pSX^*)(X^*-X_0)+(S+2pRX^*)(pX^{*2}-Y_0)=0. \qquad (2)$$

Уравнение касательной к параболе в точке $(X^*, Y^*)$ имеет вид $F(X,Y)\equiv \equiv Y-2pX^*X+pX^{*2}=0$. Тогда условия непересечения эллипса $S_2\{u_2, \theta_2\}$ и области, ограниченной параболой $S_1\{u_1, \theta_1\}$, в соответствии с (1) можно представить в виде системы неравенств

$$\begin{cases} F(u_1, u_2, X^*) \equiv -Y_0 + 2pX^*X - pX^{*2} \geq 0, \\ f_2(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, X^*) \equiv B^2[(X^* - X_0)\cos\overline{\theta}_2 + (pX^{*2} - Y_0)\sin\overline{\theta}_2]^2 + \\ +A^2[-(X^* - X_0)\sin\overline{\theta}_2 + (pX^{*2} - Y_0)\cos\overline{\theta}_2]^2 - A^2B^2 \geq 0, \end{cases}$$

где $X^*$ есть одно из решений уравнения (2). Эти условия также можно представить в виде Ф-функции

$$\Phi(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2) = \max_{X_i^*} \min\{F(u_1, u_2, X^*), f_2(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2, X^*)\},$$

где $X_i^*$, $i = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения (2).

## УСЛОВИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ (ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОБЪЕКТА ЗАДАННОЙ ОБЛАСТИ)

Пусть в системе координат $xoy$ задан эллипс $S_1\{0, 0, 0\}$ и круг $S_2\{x_0, y_0\}$, уравнения границ которых $f_1(x, y) \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ и $f_2(x, y) \equiv (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r_0^2 = 0$ соответственно, где $a$, $b\,(a > b)$ — полуоси эллипса; $r_0$ — радиус круга, $r_0 \leq b$; $x_0, y_0$ — параметры размещения круга.

Обозначим $S_2^\gamma$ окружность радиуса $\gamma r_0$ с центром в точке $(x_0, y_0)$. Тогда круг $S_2\{x_0, y_0\}$ является включением в эллипс $S_1\{0, 0, 0\}$, т.е. $S_1 \cap S_2 = S_2$, если существует точка $(x^*, y^*)$, для которой выполняются условия:

1) точка $(x^*, y^*)$ не является внутренней точкой круга $S_2\{x_0, y_0\}$;

2) центр круга $(x_0, y_0)$ находится внутри эллипса $S_1\{0, 0, 0\}$;

3) точка $(x^*, y^*)$ принадлежит полосе, ограниченной прямыми $x = \bar{x}$ и $x = -\bar{x}$, где $\bar{x}$ — абсцисса точки соприкосновения эллипса $S_1\{0, 0, 0\}$ и окружности $S_2\{\bar{x}_0, 0\}$ радиуса $r_0$ с параметрами размещения $(\bar{x}_0, 0)$;

4) точка $(x^*, y^*)$ принадлежит границе эллипса $S_1\{0, 0, 0\}$ и окружности $S_2^\gamma\{x_0, y_0\}$;

5) угловые коэффициенты касательных к $S_1\{0, 0, 0\}$ и $S_2^\gamma\{x_0, y_0\}$ в точке $(x^*, y^*)$ равны.

В данном случае $k_1 = -\dfrac{b^2x^{*2}}{a^2y^{*2}}$, $k_2 = -\dfrac{x^* - x_0}{y^* - y_0}$. Значение $\bar{x}$ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} (\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{y}^2 - r_0^2 = 0, \\ b^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 - a^2b^2 = 0, \\ b^2\bar{x}\,\bar{y} - a^2\bar{y}(\bar{x} - x_0) = 0, \end{cases}$$

которые реализуют условия принадлежности точки $(\bar{x}, \bar{y})$ окружности $S_2\{\bar{x}_0, 0\}$ и эллипсу $S_1\{0, 0, 0\}$, а также равенство угловых коэффициентов касательных к окружности и эллипсу в точке $(\bar{x}, \bar{y})$. Решением этой системы есть

$$\bar{x} = \pm\frac{a^2}{b}\sqrt{\frac{b^2 - r_0^2}{a^2 - b^2}},\quad \bar{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2r_0^2 - b^4}{a^2 - b^2}}$$

при условии $r_0 > \dfrac{b^2}{a}$ (радиус кривизны окружности больше радиуса кривизны эллипса в точке $(a,0)$). В противном случае $\bar{x}=a$, $\bar{y}=0$.

С учетом $x^* = a\cos t^*$, $y^* = b\sin t^*$ условие 5 представляется в виде

$$\varphi(x_0, y_0, t^*) \equiv (a^2 - b^2)\sin t^* \cos t^* + by_0 \cos t^* - ax_0 \sin t^* = 0. \qquad (3)$$

Таким образом, условия 1–5 (условия включения круга в эллипс) в аналитическом представлении сводятся к системе неравенств вида

$$\begin{cases} f_2(x_0, y_0, t^*) \equiv (a\cos t^* - x_0)^2 + (b\sin t^* - yx_0)^2 - r_0^2 \geq 0, \\ f_1(x_0, y_0) \equiv -b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 + a^2 b^2 \geq 0, \\ h_1(t^*) \equiv \bar{x} - a\cos t^* \geq 0, \\ h_2(t^*) \equiv \bar{x} + a\cos t^* \geq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где $t^*$ есть одно из решений уравнения (3), которое можно найти с помощью одного из вычислительных методов.

Отметим, что условия включения $S_2\{x_0, y_0\}$ в $S_1\{0,0,0\}$ можно рассматривать как условия непересечения объектов $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{int} S_1\{0,0,0\}$ и $S_2\{x_0, y_0\}$, т.е. представить в виде Ф-функции

$$\Phi(x_0, y_0, t^*) = \max_{t_i^*} \min\{f_2(x_0, y_0, t^*), f_1(x_0, y_0), h_1(t^*), h_2(t^*)\},$$

где $t_i^*$, $i = 1, 2, \ldots,$ — корни уравнения (3).

**УСЛОВИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ ЭЛЛИПСА В ЭЛЛИПС**

Пусть в системе координат $\bar{x}o\bar{y}$ задан эллипс $S_1$, а в системе координат $x'oy'$, повернутой относительно $\bar{x}o\bar{y}$ на угол $\theta$ с началом в точке $(\bar{x}_0 \bar{y}_0)$, задан эллипс $S_2$, уравнения границ которых $b^2\bar{x}^2 + a^2\bar{y}^2 - a^2b^2 = 0$ $(a > b)$ и $B^2 x'^2 + A^2 y'^2 - A^2 B^2 = 0$ $(A > B)$ соответственно. Будем считать, что $b \geq B$, так как в противном случае включения эллипса $S_2$ в эллипс $S_1$ не существует. Итак, условия включения эллипса в эллипс могут быть сведены к условиям включения круга в эллипс следующим образом. В новой системе координат $\bar{X}'O\bar{Y}'$, повернутой на угол $\theta$ относительно $\bar{x}o\bar{y}$, с учетом формул преобразования координат эллипс $S_1$ описывается уравнением $b^2(\bar{X}'^2\cos\theta - -\bar{Y}'^2\sin\theta)^2 + a^2(\bar{X}'^2\sin\theta + \bar{Y}'^2\cos\theta)^2 - a^2b^2 = 0$, а эллипс $S_2$ — уравнением $B^2(\bar{X} - \bar{X}'_0)^2 + A^2(\bar{Y} - \bar{Y}'_0)^2 - A^2B^2 = 0$, где $\bar{X}'_0 = \bar{x}_0\cos\theta + \bar{y}_0\sin\theta$, $\bar{Y}'_0 = = -\bar{x}_0\sin\theta + \bar{y}_0\cos\theta$.

Осуществим преобразование сжатия по оси $O\bar{X}'$ на основании формул $\bar{X}' = (A/B)X$, $\bar{Y}' = Y$. Тогда в новой системе координат $XOY$ уравнение границы эллипса $S_1$ имеет вид

$$b^2(AX\cos\theta - BY\sin\theta)^2 + a^2(AX\sin\theta + BY\cos\theta)^2 - a^2b^2B^2 = 0,$$

а эллипс $S_2$ превращается в круг, граница которого описывается уравнением $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 - B^2 = 0$, где

$$X_0 = (B/A)(\bar{x}_0\cos\theta + \bar{y}_0\sin\theta),$$

$$Y_0 = -\bar{x}_0\sin\theta + \bar{y}_0\cos\theta. \qquad (5)$$

Уравнение эллипса $S_1$ преобразуем к виду

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a_{13}X + 2a_{23}Y + a_{33} = 0, \qquad (6)$$

где

$$a_{11} = A^2(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta),\ a_{12} = AB(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta,$$

$$a_{22} = B^2(a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta),\ a_{33} = -a^2b^2B^2,\ a_{13} = a_{23} = 0.$$

Известно [21], что если ввести новую систему координат *xoy*, совершив поворот осей на угол, соответствующий уравнению

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}, \qquad (7)$$

то уравнение (6) приводится к каноническому виду $\bar{b}^2x^2 + \bar{a}^2y^2 - \bar{a}^2\bar{b}^2$, где $\bar{a}^2 = -\dfrac{1}{\lambda_2}\dfrac{A}{D}$, $\bar{b}^2 = -\dfrac{1}{\lambda_1}\dfrac{A}{D}$. Здесь $\lambda_1$, $\lambda_2$ — корни характеристического уравнения $\lambda^2 - J\lambda + D = 0$, где $J = a_{11} + a_{22}$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$, $A = (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)a_{33}$.

После несложных преобразований имеем

$$\bar{a}^2 = -\frac{2a_{33}}{a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}},$$

$$\bar{b}^2 = -\frac{2a_{33}}{a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}. \qquad (8)$$

Отметим, что переход из системы координат $XOY$ в *xoy* (поворот на угол $2\varphi$, соответствующий уравнению (7)) осуществлялся в соответствии с формулами перехода $x = X\cos 2\varphi + Y\sin 2\varphi$, $y = -X\sin 2\varphi + Y\cos 2\varphi$, где

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}},\ \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}.$$

Координаты $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ центра круга в системе координат *xoy* определяются следующим образом:

$$\bar{x}_0 = X_0\cos 2\varphi + Y_0\sin 2\varphi,\ \bar{y}_0 = -X_0\sin 2\varphi + Y_0\cos 2\varphi, \qquad (9)$$

где $X_0, Y_0$ имеют вид (5).

Таким образом, в системе координат *xoy* имеем эллипс $S_1\{0, 0, 0\}$ и круг $S_2\{\bar{x}_0, \bar{y}_0\}$, границы которых заданы уравнениями

$$f_1(x, y) \equiv \bar{b}^2x^2 + \bar{a}^2y^2 - \bar{a}^2\bar{b}^2 = 0 \text{ и } f_2(x, y) \equiv (x - \bar{x}_0)^2 + (y - \bar{y}_0)^2 - B^2 = 0$$

соответственно, где $\bar{a}^2$, $\bar{b}^2$ определяются из (8), а $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ — из (9).

Тогда условия включения эллипса $S_2$ в $S_1$ по аналогии с (4) принимают вид

$$\begin{cases} f_2(\bar{x}_0, \bar{y}_0, t^*) \equiv (\bar{a}\cos t^* - \bar{x}_0)^2 + (\bar{b}\sin t^* - \bar{y}_0)^2 - B^2 \ge 0, \\ f_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \equiv -\bar{b}^2\bar{x}_0^2 - \bar{a}^2\bar{y}_0^2 + \bar{a}^2\bar{b}^2 \ge 0, \\ h_1(t^*) \equiv \hat{x} - \bar{a}\cos t^* \ge 0, \\ h_2(t^*) \equiv \hat{x} + \bar{a}\cos t^* \ge 0, \end{cases}$$

где $\hat{x} = \pm\sqrt{\dfrac{\bar{b}^2 - B^2}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}}$, $\hat{y} = \pm\sqrt{\dfrac{\bar{a}^2 B^2 - \bar{b}^4}{\bar{a}^2 - \bar{b}^2}}$, $t^*$ — одно из решений уравнения

$$\bar{\varphi}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, t^*) \equiv (\bar{a}^2 - \bar{b}^2)\sin t^* \cos t^* + \bar{b}\bar{y}_0 \cos t^* - \bar{a}\bar{x}_0 \sin t^* = 0. \qquad (10)$$

Кроме того, эти условия можно представить в виде Ф-функции

$$\Phi(\bar{x}_0, \bar{y}_0, t^*) = \max_{t_i^*} \min\{f_2(\bar{x}_0, \bar{y}_0, t^*), f_1(\bar{x}_0, \bar{y}_0), h_1(t^*), h_2(t^*)\},$$

где $t_i^*$, $i = 1, 2, \ldots,$ — решения уравнения (10).

**УСЛОВИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ ЭЛЛИПСА В ОБЛАСТЬ, ОГРАНИЧЕННУЮ ПАРАБОЛОЙ**

Пусть в системе координат $xoy$ задана область $D$, ограниченная параболой $y = px^2$, и эллипс $S\{x_0, y_0, \theta\}$ с параметрами размещения $x_0, y_0, \theta$. В собственной системе координат $X'OY'$, повернутой относительно $xoy$ на угол $\theta$ с началом в точке $x_0, y_0$, эллипс задан уравнением $B^2 X'^2 + A^2 Y'^2 - A^2 B^2 = 0$. Введем новую систему координат $x'oy'$, повернутую на угол $\theta$ относительно $xoy$. С учетом формул преобразования в этой системе координат уравнения параболы и эллипса имеют вид $x' \sin\theta + y' \cos\theta = p(x' \sin\theta - y' \cos\theta)^2$ и $B^2(x' - x_0')^2 + A^2(y' - y_0')^2 - A^2 B^2 = 0$ соответственно, где $x_0' = x_0 \cos\theta + {}$ $+ y_0 \sin\theta$, $y_0' = -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta$.

Если перейти в новую систему координат $\bar{X}O\bar{Y}$ в соответствии с формулами преобразования $x' = (A/B)\bar{X}$, $y' = \bar{Y}$ (сжатие в направлении оси $Ox'$), то в ней парабола описывается уравнением $\dfrac{A}{B}\bar{X}\sin\theta + \bar{Y}\cos\theta = p\left(\dfrac{A}{B}\bar{X}\cos\theta - \bar{Y}\sin\theta\right)^2$, а эллипс превращается в круг, уравнение которого имеет вид $(\bar{X} - \bar{X}_0)^2 + {}$ $+ (\bar{Y} - \bar{Y}_0)^2 - B^2 = 0$, где $\bar{X}_0 = \dfrac{B}{A}(x_0 \cos\theta + y_0 \sin\theta)$, $\bar{Y}_0 = -x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta$.

Уравнение параболы представим в виде

$$a_{11}\bar{X}^2 + 2a_{12}\bar{X}\bar{Y} + a_{22}\bar{Y}^2 + 2a_{13}\bar{X} + 2a_{23}\bar{Y} + a_{33} = 0, \qquad (11)$$

где

$$a_{11} = pA^2 \cos^2\theta, \; a_{22} = pB^2 \sin^2\theta, \; a_{12} = -pAB \sin\theta\cos\theta,$$

$$a_{13} = -\frac{1}{2}AB\sin\theta, \; a_{23} = -\frac{1}{2}B^2\cos\theta, \; a_{33} = 0. \qquad (12)$$

Известно [21], что если ввести новую систему координат $XOY$, совершив поворот на угол $\varphi$, удовлетворяющий уравнению $\operatorname{tg} 2\varphi = \dfrac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$, то уравнение (11) приводится к каноническому уравнению параболы $X = \dfrac{1}{2p'}Y^2$, где $p' \dfrac{1}{J}\sqrt{-\dfrac{A}{J}}$, $J = a_{11} + a_{22}$, $A = \det[a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, 3$ $(a_{ij} = a_{ji})$.

С учетом (12) после несложных преобразований имеем

$$p' = \frac{AB^2}{2p(A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta)^{3/2}}. \qquad (13)$$

Таким образом, в системе координат $XOY$ имеем область $\overline{D}$, ограниченную параболой $X=(1/2p')Y^2$, и круг $\overline{S}\{X_0,Y_0\}$, ограниченный окружностью $(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2-B^2=0$, где

$$X_0=\frac{B}{A}(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)\cos 2\varphi+(x_0\sin\theta-y_0\cos\theta)\sin 2\varphi,$$

$$Y_0=-\frac{B}{A}(x_0\cos\theta+y_0\sin\theta)\sin 2\varphi+(x_0\sin\theta-y_0\cos\theta)\cos 2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi=-2\frac{AB\sin\theta\cos\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta},\ \cos 2\varphi=\frac{A^2\cos^2\theta-B^2\sin^2\theta}{A^2\cos^2\theta+B^2\sin^2\theta}. \quad (14)$$

Тогда условия включения эллипса $S\{x_0,y_0,\theta\}$ в область $D$ сводятся к условиям включения круга $\overline{S}(X_0,Y_0)$ в область $\overline{D}$. Обозначим $S^\gamma$ окружность радиуса $\gamma B$ с центром в точке $(X_0,X_0)$. Можно утверждать, что круг $\overline{S}\{X_0,Y_0\}$ является включением в область $\overline{D}$, если существует точка $(X^*,Y^*)$, удовлетворяющая условиям:

а) точка $(X^*,Y^*)$ не является внутренней точкой круга $\overline{S}\{x_0,y_0\}$;

б) центр круга $(X_0,Y_0)$ находится внутри области $\overline{D}$;

в) точка $(X^*,Y^*)$ находится в положительной полуплоскости, ограниченной прямой $X-\overline{X}=0$, где $\overline{X}$ — абсцисса точки соприкосновения параболы $X=(1/2p')Y^2$ и окружности радиуса $B$ с центром в точке $(\overline{X}_0,0)$;

г) точка $(X^*,Y^*)$ принадлежит параболе и окружности $\overline{S}^\gamma$;

д) угловые коэффициенты касательных к параболе и окружности $\overline{S}^\gamma$ в точке $(X^*,Y^*)$ равны.

Значение $\overline{X}$ определяется из системы уравнений

$$\begin{cases}\overline{X}-(1/2p')\overline{Y}^2=0,\\ (\overline{X}-\overline{X}_0)^2+\overline{Y}^2-B^2=0,\\ p'\overline{Y}+\overline{Y}(\overline{X}-\overline{X}_0)=0,\end{cases}$$

которые реализуют условия принадлежности точки $(\overline{X},\overline{Y})$ окружности $\overline{S}\{\overline{X}_0,0\}$ и параболе $X=(1/2p')Y^2$, а также равенство угловых коэффициентов касательных к окружности и параболе в точке $(\overline{X},\overline{Y})$. Решением этой системы есть $\overline{X}=(1/2p')(B^2-p'^2)$, $\overline{Y}=\pm\sqrt{B^2-p'^2}$ при уловии $p'<B$ (радиус кривизны параболы в точке $(0,0)$ меньше радиуса круга). В противном случае $\overline{X}=\overline{Y}=0$.

Условие д) в данном случае представляется в виде

$$\varphi(X_0,Y_0,Y^*)\equiv p'(Y^*-Y_0)+Y^*((1/2p')Y^{*2}-X_0)=0. \quad (15)$$

Таким образом, условия включения круга $\overline{S}\{X_0,Y_0\}$ в область $\overline{D}$ сводятся к выполнению системы неравенств

$$\begin{cases}f_2(X_0,X_0,Y^*)\equiv\left(\frac{1}{2p'}Y^{*2}-X_0\right)^2+(Y^*-Y_0)^2-B^2\geq 0,\\ f_1(X_0,X_0)\equiv X_0-\frac{1}{2p'}Y_0^2\geq 0,\\ h(Y^*)\equiv\frac{1}{2p'}Y^{*2}-\overline{X}>0,\end{cases}$$

где $p'$ определяется из (13), $X_0$, $Y_0$ — из (14), а $Y^*$ есть одно из решений уравнения (15).

Условия включения $\bar{S}(X_0, Y_0)$ в область $\overline{D}$ можно рассматривать как условия непересечения объектов $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{int} \overline{D}$ и $\bar{S}(X_0, Y_0)$, т. е. представить в виде Ф-функции:

$$\Phi(X_0, Y_0, Y^*) = \max_{Y_i^*} \min \{f_2(X_0, Y_0, Y^*), f_1(X_0, Y_0), h(Y^*)\},$$

где $Y_i^*$, $i = 1, 2, \ldots$, — корни уравнения (15), $\sqrt{B^2 - p'^2} \le Y^* < \sqrt{2p'X_0}$, если $Y_0 \ge 0$, $-\sqrt{2p'X_0} < Y^* < -\sqrt{B^2 - p'^2}$, если $Y_0 < 0$.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Предлагаемый подход позволяет построить Ф-функции для объектов с границей в виде кривых второго порядка. В ряде случаев возможно и прямое аналитическое представление с использованием решений уравнения четвертой степени. Однако оно крайне громоздкое. Поэтому предлагаемое построение Ф-функции сводится к численному решению уравнения одной переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T., Fasano G., Pinter J, Stoian Y. E., Chugay A. Optimized packings in space engineering applications: Part I. *Springer Optimization and Its Applications*. 2019. T. 5. C. 395–437. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10501-3_15.
2. Стоян Ю.Г., Шайтхауер Г., Яськов Г.Н. Упаковка неравных шаров в различные контейнеры. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 3. С. 97–105.
3. Стоян Ю.Г., Сёмкин В.В., Чугай А.М. Оптимизация компоновки трехмерных объектов в многосвязной области с учетом кратчайших расстояний. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 3. С. 58–70.
4. Yakovlev S.V. On some classes of spatial configurations of geometric objects and their formalization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 9. P. 38–50.
5. Yakovlev S.V. Formalizing spatial configuration optimization problems with the use of a special function class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 4. P. 581–589.
6. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration space of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 716–726.
7. Yakovlev S.V. The method of artificial dilation in problems of optimal packing of geometric objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 5. P. 725–731.
8. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Чернов Н.И, Панкратов А.В. Полный класс Ф-функций для базовых двумерных $\varphi$-объектов. *Доп. НАН України*. 2010. № 12. С. 25–30.
9. Stoyan Y., Chugay A. Mathematical modeling of the interaction of non-oriented convex polytopes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2012. Vol. 48, N 6. C. 837–845.
10. Stoyan Y.G., Chugay A.M. Packing different cuboids with rotations and spheres into a cuboid. *Advances in Decision Sciences*. 2014. URL: https://www.hindawi.com /journals/ads/2014/571743.
11. Stoyan Y.G., Semkin V.V., Chugay A.M. Modeling close packing of 3D objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 2. P. 296–304.
12. Grebennik I.V., Pankratov A.V., Chugay A.M., Baranov A.V. Packing *n*-dimensional parallelepipeds with the feasibility of changing their orthogonal orientation in an n-dimensional parallelepiped. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 5. P. 393–802.
13. Birgin E., Bustamante L., Callisaya H., Martínez J.M. Packing circles within ellipses. *International Transactions in Operational Research*. 2013. Vol. 20, Issue 3. P. 365–389. https://doi.org/10.1111/itor.12006.
14. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А. Разработка эффективных алгоритмов оптимальной упаковки эллипсов. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 5(4). С. 28–35.
15. Панкратов А. В., Романова Т.Е., Хлуд О.М. О задаче упаковки эллипсов. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. 2016. № 3. С. 51–63.

16. Панкратов А.В., Романова Т.Е., Суббота И.А. Development of efficient algorithms for optimal ellipse packing. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2014. Vol. 5, N 4(71). 28 p. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.28015.

17. Pankratov A., Romanova T. Litvinchev I. Packing ellipses in an optimized rectangular container. Wireless Networks. 2018. P. 1–11. https://doi.org/10.1007/s11276-018-1890-1.

18. Стоян Ю.Г., Панкратов А.В., Романова Т.Е., Чернов Н.И. Квази-phi-функции для математического моделирования отношений геометрических объектов. *Доповіді Національної академії наук України*. 2014. № 9. С. 49–54. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/88249.

19. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. June 2016. Vol. 65, Iss. 2. P. 283–307.

20. Komyak Va., Komyak Vl., Danilin A. A study of ellipse packing in the high-dimensionality problems. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2017. № 1(4). С. 17–23. URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vejpte_2017_1(4)_3.

21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука, 1984. 832 с.

*Надійшла до редакції 06.11.2019*

**М.І. Гіль, В.М. Пацук**

**Φ-ФУНКЦІЇ 2D-ОБ'ЄКТІВ З ГРАНИЦЯМИ У ВИГЛЯДІ КРИВИХ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

**Анотація.** Розгляуто один з підходів до побудови в аналітичному вигляді умов неперетину і включення неорієнтованих опуклих 2D-об'єктів, границями яких є криві другого порядку канонічного виду. Наведено умови взаємного неперетину пари еліпсів; еліпса і області, обмеженої параболою; умови включення кола в еліпс, еліпса в еліпс, еліпса в область, обмежену параболою. Аналітичні умови наведено відповідно до рівнянь границь відповідних об'єктів (областей) і приведено до вигляду системи нерівностей, що залежать від параметрів розміщення об'єктів і параметра, який є розв'язком деякого рівняння однієї змінної. З урахуванням отриманих систем нерівностей побудовано відповідні Φ-функції.

**Ключові слова:** еліпси, парабола, неперетин, включення, Φ-функції.

**M.I. Gil, V.M. Patsuk**

**PHI-FUNCTIONS OF 2D OBJECTS WITH BOUNDARIES BEING SECOND ORDER CURVES**

**Abstract.** An approach to constructing analytical conditions of non-intersection and inclusion of non-oriented convex 2D objects is considered, the boundaries of objects being second-order curves in the canonical form. In particular, the conditions of mutual non-intersection of a pair of ellipses; an ellipse and an area bounded by a parabola; conditions of containment of a circle in an ellipse, an ellipse in an ellipse, an ellipse in a region bounded by a parabola are constructed. The analytical conditions are constructed on the basis of the equations of the boundaries of the corresponding objects (areas) and then are reduced to the form of a system of inequalities depending on the placement parameters of the objects and the parameter, which is the solution of a certain equation of one variable. Based on the obtained systems of inequalities, the corresponding Φ-functions are constructed.

**Keywords:** ellipses, parabola, non-intersection, containment, Φ-functions.

**Гиль Николай Иванович,**
доктор техн. наук, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков.

**Пацук Владимир Николаевич,**
кандидат техн. наук, старший научный сотрудник Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, e-mail: vmpatsuk@gmail.com.