УДК 517.9

С.И. ЛЯШКО, В.Г. САМОЙЛЕНКО, Ю.И. САМОЙЛЕНКО, Н.И. ЛЯШКО

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–де ФРИЗА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация. Рассмотрено уравнение Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами и малым параметром первой степени при старшей производной. Введено понятие асимптотического решения ступенчатого типа. На основе нелинейного метода ВКБ разработан алгоритм построения таких решений и дано его обоснование. Установлен порядок по малому параметру асимптотической точности, с которой построенное приближенное решение удовлетворяет исходному уравнению.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами, солитоноподобные решения, асимптотические решения, сингулярные возмущения.

ВВЕДЕНИЕ

Многим явлениям в природе и процессам в технике присущ колебательный характер [1, 2]. Зачастую колебания гармонические или являются суперпозицией нескольких гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами, т.е. квазипериодические. В телекоммуникационных, оптических и других системах часто встречаются так называемые нелинейные волны [3–7] — солитоны, изучению которых уделяется много внимания.

Понятие «солитон» введено в 1965 г. [8], хотя солитонные волны впервые еще в 1834 г. наблюдал Джон Скотт Рассел, который описал довольно сложный механизм их движения и взаимодействия. Обычно под солитоном понимают волновое возмущение в нелинейной среде, характерными свойствами которого являются сохранение формы волны и ее локализация в пространстве; постоянная скорость движения, зависящая от амплитуды волны; особый характер взаимодействия с подобными волнами, который аналогичен столкновению частиц (сохранение формы волны после взаимодействия с такими же волнами). Указанные свойства были обнаружены и детально исследованы на примере уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) [9]

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0. \qquad (1)$$

На протяжении последних 50 лет уравнение КдФ и его обобщения изучались с помощью различных аналитических и численных [10, 11] методов. Установлено, что уравнение (1) имеет решения различных типов: быстроубывающие, в частности, солитонные решения, периодические и квазипериодические (конечнозонные), решения типа ударной волны и др. Уравнение КдФ также имеет сингулярные решения [12], которые разрушаются за конечное время и при этом разрушение может происходить грубо или в соответствии со сценарием градиентной катастрофы.

Несмотря на большое количество работ по уравнению КдФ, оно и в настоящее время представляет значительный интерес. Это связано с тем, что классическое уравнение КдФ получено в качестве универсальной модели для описания нелинейных волн в однородных средах с нелинейной дисперсией без диссипации [13]. В более общем случае, когда среда неоднородная, а ее параметры и свойства зависят как от пространственной [14], так и от временной переменных, рассматривается уравнение КдФ с переменными коэффициентами [15], для которого в англоязычной научной литературе используется аббревиатура vc KdV (variable coefficient Korteweg-de Vries equation). В частности, для уравнения КдФ с переменными коэффициентами и сингулярным возмущением с помощью нелинейного метода ВКБ построены асимптотические решения, названные асимптотическими солитоноподобными решениями [16].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Данная статья посвящена уравнению КдФ с переменными коэффициентами и малым параметром при старшей производной вида

$$\varepsilon u_{xxx} = a(x,t,\varepsilon)u_t + b(x,t,\varepsilon)uu_x, \tag{2}$$

где $a(x,t,\varepsilon)$, $b(x,t,\varepsilon)$ записываются в виде асимптотических рядов:

$$a(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x,t)\varepsilon^j, \quad b(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x,t)\varepsilon^j \tag{3}$$

с бесконечно дифференцируемыми по переменным $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0;T]$ коэффициентами; $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Уравнения вида (2) возникают при описании волновых процессов в неоднородных средах с переменными характеристиками и малой дисперсией и относятся к так называемым сингулярно возмущенным уравнениям, которые эффективно можно исследовать в основном лишь асимптотическими методами [17], позволяющими не только построить их приближенные решения с любой асимптотической точностью, но и изучить качественные свойства решений.

Рассмотрим задачу о построении асимптотических однофазовых солитоноподобных решений [18] уравнения (2). Искомое асимптотическое разложение содержит дробные степени малого параметра и имеет вид

$$u(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2}[u_j(x,t) + V_j(x,t,\tau)] + O(\varepsilon^{N+1/2}), \ \tau = \frac{x-\varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4}$$

где величина $x-\varphi(t)$ называется фазой, а $\tau = (x-\varphi(t))/\sqrt{\varepsilon}$ — фазовой переменной.

В (4) использовано стандартное обозначение асимптотического анализа: запись $\Psi(x,t,\varepsilon) = O(\varepsilon^N)$ при $\varepsilon \to 0$, $(x,t) \in K$, означает, что существуют значение $\varepsilon_0 > 0$ и величина $C_N(K) > 0$, где $K \subset \mathbf{R} \times [0;T]$ — ограниченное замкнутое множество, что для всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ и $(x,t) \in K$ выполняется неравенство $|\Psi(x,t,\varepsilon)| \le C_N(K)\varepsilon^N$. Суть выражения (4) заключается в том, что с помощью некоторого алгоритма можно определить произвольное количество слагаемых данной суммы (например, $2N+1$) так, что эта сумма будет удовлетворять уравнению (2) в асимптотическом смысле, т.е. с точностью $O(\varepsilon^{N+1/2})$.

Асимптотическое разложение (4) представим в виде $u(x,t,\varepsilon) = Y_N(x,t,\varepsilon) + {}+O(\varepsilon^{N+1/2})$, где $Y_N(x,t,\varepsilon) = U_N(x,t,\varepsilon) + V_N(x,t,\varepsilon)$, причем функция $U_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} u_j(x,t)$ называется регулярной частью, а функция $V_N(x,t,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{2N} \varepsilon^{j/2} V_j(x,t,\varepsilon)$ — сингулярной частью асимптотики. Регулярная часть является фоновой функцией для решения (4) и, в частности, может равняться нулю или быть постоянной.

Члены регулярной части асимптотики определяются как решения дифференциальных уравнений
$$a_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial t}+b_0(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}u_0=0, \tag{5}$$

$$a_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial t}+b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial u_j}{\partial x}+b_0(x,t)u_j(x,t)\frac{\partial u_0}{\partial x}=f_j(x,t),\ \ j=\overline{1,2N}, \tag{6}$$

а члены сингулярной части асимптотики — как решения дифференциальных уравнений
$$\frac{\partial^3 V_0}{\partial \tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau}+V_0\frac{\partial V_0}{\partial \tau}\right)=0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^3 V_j}{\partial \tau^3}+a_0(x,t)\frac{\partial V_j}{\partial \tau}\varphi'(t)-b_0(x,t)\left(u_0\frac{\partial V_j}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial \tau}(V_0V_j)\right)=F_j(x,t,\tau), \tag{8}$$

где функции $f_j(x,t)$, $F_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, являются бесконечно дифференцируемыми и вычисляются рекуррентно.

Системы уравнений (5), (6) и (7), (8) получены стандартным образом [18, 19] подстановкой разложений (3), (4) в уравнение (2), выполнением действий над соответствующими асимптотическими рядами и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра в обеих частях полученных равенств. При этом использованы асимптотические свойства искомых солитоноподобных решений при больших значениях фазовой переменной τ.

Коэффициенты регулярной части асимптотики (4) считаются бесконечно дифференцированными и их можно найти методом характеристик при весьма общих условиях на коэффициенты степенных рядов в (3). Поэтому в дальнейшем полагаем, что регулярная часть асимптотики известна.

Коэффициенты сингулярной части асимптотики (4) считаются бесконечно дифференцированными функциями переменных (x,t,τ), их можно выбрать различным образом и от их определения зависят волновые свойства соответствующих асимптотических решений [20] уравнения (2).

Сформулируем необходимые определения.

Обозначим $G_1=G_1(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$ линейное пространство таких бесконечно дифференцируемых функций $f=f(x,t,\tau)$, $(x,t,\tau)\in\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R}$, что для произвольных неотрицательных целых чисел n, p, q, r равномерно относительно переменных (x,t) на каждом компактном множестве $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ выполняются условия [18]:

1) имеет место соотношение $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\tau^n\dfrac{\partial^p}{\partial x^p}\dfrac{\partial^q}{\partial t^q}\dfrac{\partial^r}{\partial \tau^r}f(x,t,\tau)=0$;

2) существует бесконечно дифференцируемая функция $f^-(x,t)$, для которой выполняется равенство
$$\lim_{\tau\to-\infty}\tau^n\frac{\partial^p}{\partial x^p}\frac{\partial^q}{\partial t^q}\frac{\partial^r}{\partial \tau^r}(f(x,t,\tau)-f^-(x,t))=0.$$

Подпространство пространства G_1 в случае, когда $f^-(x,t)=0$ в условии 2, обозначим $G_1^0=G_1^0(\mathbf{R}\times[0;T]\times\mathbf{R})$. Иными словами, G_1^0 — это линейное пространство функций $f=f(x,t,\tau)$ из G_1, для которых равномерно относительно переменных (x,t) на каждом компактном множестве $K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ выполняется соотношение $\lim\limits_{\tau\to-\infty}f(x,t,\tau)=0$. Следовательно, функции из пространства G_1^0 (по фазовой переменной τ) являются элементами пространства Шварца.

В зависимости от свойств коэффициентов сингулярной части асимптотики (4) среди асимптотических солитоноподобных решений уравнения (2) вида (4) различают два типа решений. Если функции $V_j(x,t,\tau)$ при всех $j=0,1,\ldots$ принадлежат пространству G_1^0, то построенное асимптотическое разложение называется асимптотическим решением солитонного типа [18, 19], поскольку при условии $V_j(x,t,\tau)\in G_1^0$, $j=0,1,\ldots$, все его коэффициенты являются быстроубывающими функциями фазовой переменной и разложения вида (4) асимптотически аппроксимируют солитонные решения уравнения (2) в случае постоянных коэффициентов. Решения такого типа детально изучены в [20].

В случае, когда $V_0(x,t,\tau)\in G_1^0$, а $V_j(x,t,\tau)\in G_1$, $j=1,2,\ldots$, разложение вида (4) будем называть асимптотическим решением ступенчатого типа. При этом главный член сингулярной части асимптотики (4) является быстроубывающей функцией фазовой переменной τ, в то время как все остальные члены сингулярной части асимптотики имеют не обязательно нулевой предел (фон) при стремлении фазовой переменной τ к $-\infty$, т.е. по своей форме геометрически подобны профилю ударной волны, а в предельном случае — ступеньке.

Далее описан алгоритм построения асимптотических решений ступенчатого типа для уравнения (2), получены условия существования таких решений и представлен общий результат об асимптотической точности построенных решений.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СТУПЕНЧАТОГО ТИПА

Коэффициенты асимптотического решения (3) определяются следующим образом: вначале находятся члены регулярной части асимптотики, т.е. решения системы уравнений (5), (6), а затем — члены сингулярной части асимптотики, т.е. решения системы уравнений (7), (8).

Задача об определении функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=0,1,\ldots$, более сложная, чем аналогичная задача об отыскании функций $u_j(x,t)$, $j=0,1,\ldots$, которая, как отмечено ранее, решается сравнительно просто. Сложность в определении коэффициентов сингулярной части асимптотики обусловлена тем, что функции $V_j(x,t,\tau)$, $j=0,1,\ldots$, должны принадлежать определенному классу функций — одному из пространств G_1^0 или G_1. Кроме того, необходимо также найти фазовую функцию $\varphi(t)$, определяющую так называемую кривую разрыва.

Алгоритм нахождения функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=0,1,\ldots,2N$, состоит из двух этапов. На первом этапе уравнения (7), (8) рассматриваются на кривой разрыва $\Gamma=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]: x=\varphi(t)\}$, считающейся априори известной, находятся условия существования в соответствующих пространствах (G_1^0 или G_1) решений редуцированных на кривую разрыва уравнений (7), (8), определяется вид искомых решений этих редуцированных уравнений и выводится дифференциальное уравнение для функции $\varphi(t)$. На втором этапе эти редуцированные функции специальным образом продолжаются с кривой Γ.

Для реализации указанного алгоритма рассмотрим уравнения для функций $v_j=v_j(t,\tau)=V_j(x,t,\tau)|_{x=\varphi(t)}$, $j=\overline{0,2N}$:

$$\frac{\partial^3 v_0}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi,t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_0}{\partial\tau}\right]=0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^3 v_j}{\partial\tau^3}+a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\varphi'(t)-b_0(\varphi,t)\left[u_0(\varphi,t)\frac{\partial v_j}{\partial\tau}+v_j\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+v_0\frac{\partial v_j}{\partial\tau}\right]=F_j(t,\tau), \tag{10}$$

где $F_j(t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, являются бесконечно дифференцируемыми и легко вычисляются рекуррентно. В частности,

$$F_1(t,\tau)=a_0(\varphi,t)\frac{\partial v_0}{\partial t}+[-\tau a_{0x}(\varphi,t)\varphi'(t)+\tau b_{0x}(\varphi,t)u_0(\varphi,t)+\tau b_0(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)+$$

$$+\tau b_{0x}(\varphi,t)v_0+b_0(\varphi,t)u_1(\varphi,t)]\frac{\partial v_0}{\partial\tau}+b_0(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)v_0. \qquad (11)$$

Несложно убедиться, что если $a_0(x,t)$, $b_0(x,t)$, $u_0(x,t)\in C^\infty(\mathbf{R}\times[0;T])$ и

$$A(\varphi,\varphi',t)=-a_0(\varphi,t)\varphi'(t)+b_0(\varphi,t)u_0(\varphi,t)>0,\ \varphi=\varphi(t), \qquad (12)$$

то уравнение (9) имеет решение

$$v_0(t,\tau)=-3\frac{A(\varphi,\varphi',t)}{b_0(\varphi,t)}\cosh^{-2}\left(\frac{\sqrt{A(\varphi,\varphi',t)}}{2}(\tau+c_0)\right),\ c_0=\mathrm{const},$$

принадлежащее пространству G_1^0.

Из вида уравнения (10) следует, что если $v_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{0,2N}$, то выполняется условие $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N}$, поскольку функции v_0v_j, $v_{j\tau}$, $v_{j\tau\tau\tau}$ принадлежат пространству G_1^0. Иными словами, условие $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N}$, является необходимым для разрешимости уравнений (10) в пространстве G_1. Если это условие выполняется, т.е. если $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N}$, то уравнение (10) имеет решение в пространстве G_1 тогда и только тогда, когда выполняются условия ортогональности [18, 21]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_j(t,\tau)v_0(t,\tau)d\tau=0,\ \ j=\overline{1,N}, \qquad (13)$$

и такое решение можно записать следующим образом [18]:

$$v_j(t,\tau)=\nu_j(t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\ \ j=\overline{1,2N}. \qquad (14)$$

Здесь

$$\nu_j(t)=[a_0(\varphi(t),t)\varphi'(t)-b_0(\varphi(t),t)u_0(\varphi(t),t)]^{-1}\lim_{\tau\to-\infty}\Phi_j(t,\tau),$$

функция $\eta_j(t,\tau)\in G_1$ и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\tau\to-\infty}\eta_j(t,\tau)=1$, функция $\psi_j(t,\tau)\in G_1^0$ и

$$\Phi_j(t,\tau)=\int_{-\infty}^{\tau}F_j(t,\xi)d\xi+E_j(t),\ \lim_{\tau\to+\infty}\Phi_j(t,\tau)=0.$$

Таким образом, определены коэффициенты сингулярной части асимптотики (4) на кривой разрыва Γ и одновременно решена задача о нахождении фазовой функции $\varphi(t)$, для которой из условия ортогональности (13) при $j=1$ получаем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$15a_0(\varphi,t)b_0(\varphi,t)\frac{d}{dt}A(\varphi,\varphi',t)+[(10a_{0x}(\varphi,t)b_0(\varphi,t)-36a_0(\varphi,t)b_{0x}(\varphi,t))\varphi'+$$

$$+10b_0^2(\varphi,t)u_{0x}(\varphi,t)-20a_0(\varphi,t)b_{0t}(\varphi,t)+3(b_0^2(\varphi,t))_xu_0(\varphi,t)]A(\varphi,\varphi',t)=0, \qquad (15)$$

где функция $A(\varphi,\varphi',t)$ определена формулой (12).

Уравнение (15) при довольно общих условиях на его коэффициенты имеет решение в некоторой окрестности начальной точки $t=0$ и поэтому в дальнейшем предполагается существование его решения как минимум на интервале $[0;T]$, где $T>0$ — некоторое число. Заметим также, что во многих частных случаях уравнение (15) значительно упрощается.

Непосредственным интегрированием уравнения (10) находим его решение:

$$v_j(t,\tau)=\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)d\tau_1+c_1\right)v_{0\tau}(t,\tau)\int_{\tau_0}^{\tau}v_{0\tau}^{-2}(t,\tau_1)d\tau_1-$$

$$-\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\Phi_j(t,\tau_1)v_{0\tau}(t,\tau_1)\int_{\tau_0}^{\tau_1}v_{0\tau}^{-2}(t,\xi)d\xi d\tau_1+c_2\right)v_{0\tau}(t,\tau), \qquad (16)$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные.

С учетом формулы (14) для нахождения функций $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,2N}$, рассмотрим задачу Коши

$$\Lambda u_j^-(x,t)=f_j^-(x,t), \qquad (17)$$

$$u_j^-(x,t)|_\Gamma=\nu_j(t),\ \ j=\overline{1,2N}, \qquad (18)$$

где дифференциальный оператор Λ записывается следующим образом:

$$\Lambda=a_0(x,t)\frac{\partial}{\partial t}+b_0(x,t)u_0(x,t)\frac{\partial}{\partial x}+b_0(x,t)u_{0x}(x,t).$$

Функции $f_j^-(x,t)$, $j=\overline{1,2N}$, в правой части уравнения (17) определяются подстановкой асимптотического разложения (4) в уравнение (2) и переходом к пределу при $\tau\to-\infty$.

Задача Коши (17), (18) имеет решение, по крайней мере, в некоторой μ-окрестности $\Omega_\mu(\Gamma)=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:|x-\varphi(t)|<\mu\}$ кривой Γ, поскольку эта задача корректна в силу трансверсальности кривой Γ характеристикам оператора Λ при всех $t\in[0;T]$.

Считая, что решения $u_j^-(x,t)\in C^{(\infty)}(\Omega_\mu(\Gamma))$, $j=\overline{1,2N}$, известны, определяем продолжение функций $v_j(t,\tau)$, $j=\overline{0,2N}$, с кривой Γ в область $\Omega_\mu(\Gamma)$ следующим образом:

$$V_0(x,t,\tau)=v_0(t,\tau),\ V_j(x,t,\tau)=u_j^-(x,t)\eta(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),\ \ j=\overline{1,2N}.$$

Имеет место следующая теорема о порядке точности построенного асимптотичекого реширения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия:

— функции $a_k(x,t)$, $b_k(x,t)\in C^{(\infty)}(\mathbf{R}\times[0;T])$, $k=\overline{0,N}$;

— имеет место неравенство (12) для функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей уравнению (15);

— функции $F_j(t,\tau)\in G_1^0$, $j=\overline{1,2N}$, и выполняются условия ортогональности (13);

— задача Коши (17), (18) имеет решение в области $\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x-\varphi(t)<0\}$.

Тогда асимптотическое однофазовое решение ступенчатого типа для уравнения (2) записывается в виде

$$u_N(x,t,\varepsilon)=\begin{cases}Y_N^-(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in D^-\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\\ Y_N(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma),\\ Y_N^+(x,t,\varepsilon), & (x,t)\in D^+\setminus\Omega_\mu(\Gamma),\end{cases} \qquad (19)$$

где

$$Y_N^-(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}[u_j(x,t)+u_j^-(x,t)],\ (x,t)\in D^-,$$

$$Y_N(x,t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}[u_j(x,t)+V_j(x,t,\tau)],\ \tau=\frac{x-\varphi(t)}{\sqrt{\varepsilon}},\ (x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma),$$

$$Y_N^+(x,t,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}u_j(x,t),\ (x,t)\in D^+,$$

$$D^-=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x-\varphi(t)<0\},\ D^+=\{(x,t)\in\mathbf{R}\times[0;T]:x-\varphi(t)>0\},$$

и это решение на множестве $\mathbf{R}\times[0;T]$ удовлетворяет уравнению (2) с точностью $O(\varepsilon^N)$, причем функция (19) при $\tau\to\pm\infty$ удовлетворяет уравнению (2) с точностью $O(\varepsilon^{N+1/2})$.

Доказательство. Рассмотрим функцию вида (19) в области $\Omega_\mu(\Gamma)$. После подстановки $Y_N(x,t,\varepsilon)$, $N\ge 0$, в уравнение (2) находим

$$\varepsilon\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial^3 u_j}{\partial x^3}+\varepsilon^{-3/2}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial^3 V_j}{\partial\tau^3}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k a_k(x,t)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial t}-\varphi'(t)\varepsilon^{-1/2}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k b_k(x,t)\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}u_j+\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}V_j\right)\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial x}+\varepsilon^{-1/2}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right).$$

Отсюда, принимая во внимание уравнения для регулярной и сингулярной части асимптотики (4), получаем, что для доказательства теоремы необходимо для всех $(x,t)\in K\subset\mathbf{R}\times[0;T]$ оценить функцию

$$g_N(x,t,\varepsilon)=\left[a_0(x,t)-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k a_0(\varphi,t)}{\partial x^k}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left(a_1(x,t)-\sum_{k=0}^{2N-2}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k a_1(\varphi,t)}{\partial x^k}\right)+\ldots+\varepsilon^N(a_N(x,t)-a_N(\varphi,t))\right]\times$$

$$\times\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial t}-\varphi'(t)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right)+\left[b_0(x,t)-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_0(\varphi,t)}{\partial x^k}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left(b_1(x,t)-\sum_{k=0}^{2N-2}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_1(\varphi,t)}{\partial x^k}\right)+\ldots+\varepsilon^N(b_N(x,t)-b_N(\varphi,t))\right]\times$$

$$\times\left[u_0(x,t)-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k u_0(\varphi,t)}{\partial x^k}+\varepsilon\left(u_1(x,t)-\sum_{k=0}^{2N-2}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k u_1(\varphi,t)}{\partial x^k}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\varepsilon^N(u_N(x,t)-u_N(\varphi,t))\right]\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right)+$$

$$+\left[b_0(x,t)-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_0(\varphi,t)}{\partial x^k}+\varepsilon\left(b_1(x,t)-\sum_{k=0}^{2N-2}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_1(\varphi,t)}{\partial x^k}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\varepsilon^N(b_N(x,t)-b_N(\varphi,t))\right]\left[\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^{k+1}u_0(\varphi,t)}{\partial x^{k+1}}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\left(\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}-\sum_{k=0}^{2N-1}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^{k+1}u_1(\varphi,t)}{\partial x^{k+1}}\right)+\ldots+\varepsilon^{N+1}\frac{\partial u_{N+1}(x,t)}{\partial x}\right]\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}V_j+$$

$$+\left[b_0(x,t)-\sum_{k=0}^{2N}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_0(\varphi,t)}{\partial x^k}+\varepsilon\left(b_1(x,t)-\sum_{k=0}^{2N-2}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k b_1(\varphi,t)}{\partial x^k}\right)+\right.$$

$$\left.+\ldots+\varepsilon^N(b_N(x,t)-b_N(\varphi,t))\right]\times\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}V_j\left(\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sum_{j=0}^{2N}\varepsilon^{j/2}\frac{\partial V_j}{\partial\tau}\right),$$

где $\varphi=\varphi(t)$; K — ограниченное замкнутое множество, так как все остальные слагаемые в полученном равенстве относительно малого параметра имеют порядок $O(\varepsilon^{N+1/2})$.

Поскольку функция $a_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, бесконечно дифференцирумая, для всех $(x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma)\subset K$ выполняется неравенство

$$\left|a_j(x,t)-\sum_{k=0}^{2(N-j)}(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k\frac{\partial^k a_j(\varphi,t)}{\partial x^k}\right|\le C_j\left|(\sqrt{\varepsilon}\tau)^{2(N-j)+1}\right|,\ \varphi=\varphi(t),\qquad(20)$$

где величины C_j, $j=\overline{0,N}$, зависят только от множества K.

С учетом гладкости функций $b_j(x,t)$, $j=\overline{0,N}$, $V_j(x,t,\tau)$, $u_j(x,t)$, $j=\overline{0,2N}$, для них можно записать неравенства, аналогичные (20). Отсюда следует, что для всех $(x,t)\in\Omega_\mu(\Gamma)\subset K$ функция $g_N(x,t,\varepsilon)$ удовлетворяет асимптотическому равенству $g_N(x,t,\varepsilon)=O(\varepsilon^N)$.

Рассмотрим теперь множество $D^+\setminus\Omega_\mu(\Gamma)\subset K$. Поскольку каждая функция $f(x,t,\tau)\in G_1$ при всех $k\in\mathbf{N}$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x,t,\tau)|\le\frac{C_k(f)}{\tau^k},\ k\ge1,\ \tau\ge\tau_0,$$

где постоянная $C_k(f)$, $k\in\mathbf{N}$, зависит только от множества K, $\tau_0>0$ — некоторое постоянное значение, то для всех $k\in\mathbf{N}$ и $\tau>0$ имеем

$$|(\sqrt{\varepsilon}\tau)^k f(x,t,\tau)|\le\varepsilon^{k/2}C_k(f),$$

откуда и следует утверждение теоремы для всех $(x,t)\in D^+\setminus\Omega_\mu(\Gamma)\subset K$.

Рассмотрим теперь множество $D^-\setminus\Omega_\mu(\Gamma)\subset K$. Поскольку функция $V_j(x,t,\tau)$, $j=\overline{1,N}$, представима формулой

$$V_j(x,t,\tau)=u_j^-(x,t)\eta_j(t,\tau)+\psi_j(t,\tau),$$

где $\eta_j(t,\tau) \in G_1$, $\lim\limits_{\tau \to -\infty} \eta_j(t,\tau) = 1$, $\psi_j \in G_1^0$, то при всех $k \in \mathbf{N}$ и $\tau \le -\tau_0$ имеем $|V_j(x,t,\tau) - u_j^-(x,t)| \le \dfrac{C_{1k}}{|\tau|^k}$, $\left|\dfrac{\partial}{\partial \tau} V_j(x,t,\tau)\right| \le \dfrac{C_k(V_j)}{|\tau|^k}$. Здесь C_{1k}, $C_k(V_j)$ — некоторые постоянные, зависящие только от множества K. Отсюда, как и в случае множества $D^+ \setminus \Omega_\mu(\Gamma)$, получаем утверждение теоремы.

Из изложенного следует, что асимптотическое решение (19) удовлетворяет при $\tau \to \pm\infty$ уравнению (2) с точностью $O(\varepsilon^{N+1/2})$.

Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для сингулярно возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза с переменными коэффициентами предложено понятие асимптотического решения ступенчатого типа. Получены условия существования таких решений, с помощью нелинейного метода ВКБ построены решения ступенчатого типа и доказан общий результат об асимптотической точности построенных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lyashko I.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. Control of pseudo-hyperbolic systems by concentrated impacts. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2000. Vol. 32, N 12. P. 23–36. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i12.40.
2. Lyashko S.I., Nomirovskij D.A., Sergienko T.I. Trajectory-final controllability in hyperbolic and pseudo-hyperbolic systems with generalized actions. *Cybernetics and System Analysis*. 2001. Vol. 37, N 5. P. 756–763. https://doi.org/10.1023/a:1013871026026.
3. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. New Jersey: John Wiley & Sons, 1999. 636 p. https://doi.org/10.1002/9781118032954.
4. Newel A.C. Solitons in mathematics and physics. Philadelphia: SIAM, 1985. 260 p.
5. Selezov I.T. Diffraction of elastic waves by a sphere in the semi-bounded region. *Cybernetics and System Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 393–399. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00146-3.
6. Davydov A.S. Solitons in biology. In: *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*. Ch. 1. Amsterdam: North-Holland Physics Publishing, 1986. Vol. 17. P. 1–51. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-87002-5.50007-2.
7. Haus H.A., Wong W.S. Solitons in optical communications. *Reviews of Modern Physics*. 1996. Vol. 68, N 2. P. 423–444. https://doi.org/10.1103/RevModPhys.68.423.
8. Zabusky N.J., Kruskal M.D. Interaction of solitons in a collisionless plasma and recurrence of initial states. *Phys. Review Lett*. 1965. Vol. 15. P. 240–243. http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.15.240.
9. Blacmore D., Prykarpatsky A.K., Samoylenko V.H. Nonlinear dynamical systems of mathematical physics. Spectral and integrability analysis. Singapore: World Scientific, 2011. 564 p.
10. Zadiraka V.K. Using reserves of computing optimization to solve complex problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 1. P. 40–54. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00111-0.
11. Galba E.F., Deineka V.S., Sergienko I.V. Weighted pseudoinverses and weighted normal pseudosolutions with singular weights. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. Vol. 49, N 8. P. 1281–1297. https://doi.org/10.1134/S0965542509080016.
12. Pokhozhaev S.I. On the singular solutions of the Korteweg–de Vries equation. *Mathematical Notes*. 2010. Vol. 88, N 5. P. 741–747. https://doi.org/10.1134/S0001434610110131.
13. Novikov S.P., Manakov S.V., Pitaevskii L.P., Zakharov V.E. Theory of solitons. The inverse scattering method. Springer US, 1984. 288 p.
14. Nakonechnyi O.G., Kapustian O.A., Chikrii A.O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 5. P. 785–795. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00189-6.
15. Ji J., Zhang L., Wang L. et al. Variable coefficient KdV equation with time-dependent variable coefficient topographic forcing term and atmospheric blocking. *Advance Difference Equation*. 2019. Vol. 320. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2045-0.

16. Maslov V.P., Omel'yanov G.A. Geometric asymptotics for PDE. I. Providence: American Mathematical Society, 2001. 243 p.
17. Prikazchikov V.G., Khimich A.N. Asymptotic estimates of the accuracy of eigenvalues of fourth order elliptic operator with mixed boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 358–365. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9935-5.
18. Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I. Asymptotic expansions for one-phase soliton-type solutions of the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. Vol. 57, N 1. P. 132–148. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0176-9.
19. Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I. Asymptotic m-phase soliton-type solutions of a singularly perturbed Korteweg–de Vries equation with variable coefficients. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 64, N 7. P. 1109–1127. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0702-5.
20. Samoilenko V.H., Samoilenko Yu.I., Limarchenko V.O., Vovk V.S., Zaitseva K.S. Asymptotic solutions of soliton type of the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and singular perturbation. *Mathematical Modeling and Computing*. 2019. Vol. 6, N 2. P. 374–384. https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.374.
21. Samoilenko V.Hr., Samoilenko Yu.I. Existence of a solution to the inhomogeneous equation with the one-dimensional Schrodinger operator in the space of quickly decreasing functions. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 187, N 1. P. 70–76. https://doi.org/10.1007/s10958-012-1050-6.

Надійшла до редакції 08.04.2020

С.І. Ляшко, В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко, Н.І. Ляшко

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТИПУ СХОДИНКИ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА–де ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШІЙ ПОХІДНІЙ

Анотація. Розглянуто рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами і малим параметром першого степеня при старшій похідній. Запропоновано поняття асимптотичного розв'язку типу сходинки. На основі нелінійного методу ВКБ розроблено алгоритм побудови таких розв'язків і наведено його обгрунтування. Встановлено порядок за малим параметром асимптотичної точності, з якою побудований наближений розв'язок задовольняє вихідному рівнянню.

Ключові слова: рівняння Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами, солітоноподібні розв'язки, асимптотичні розв'язки, сингулярні збурення.

S.I. Lyashko, V.H. Samoilenko, Yu.I. Samoilenko, N.I. Lyashko

ASYMPTOTIC STEP-LIKE SOLUTIONS TO THE KORTEWEG–de VRIES EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS AND A SMALL PARAMETER AT THE HIGHEST DERIVATIVE

Abstract. The paper deals with the Korteweg–de Vries equation with variable coefficients and a small parameter of the first degree at the highest derivative. The notion of an asymptotic solution of a step type is proposed. By means of the non-linear WKB technique, an algorithm for constructing such solutions is proposed and justified. The order, on the small parameter, of the asymptotic accuracy with which the constructed approximate solution satisfies the given equation is established.

Keywords: Korteweg–de Vries equation with variable coefficients, soliton-like solutions, asymptotic solutions, singular pertubation.

Ляшко Сергей Иванович,
чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: lyashko.serg@gmail.com.

Самойленко Валерий Григорьевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: valsamyul@gmail.com.

Самойленко Юлия Ивановна,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: yusam@univ.kiev.ua.

Ляшко Наталья Ивановна,
кандидат техн. наук, научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: dept165@insyg.kiev.ua; lyashko.natali@gmail.com.