УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ: УСТОЙЧИВОСТЬ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ВХОДНЫХ ДАННЫХ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ

Аннотация. Для векторной задачи оптимизации с непрерывными частными критериальными функциями и множеством допустимых решений произвольной структуры изучены условия устойчивости относительно возмущений входных данных векторного критерия. Получены достаточные и необходимые условия устойчивости трех типов для задачи поиска Парето-оптимальных решений.

Ключевые слова: векторная задача оптимизации, векторный критерий, устойчивость, Парето-оптимальные решения, множество Слейтера, множество Смейла, возмущения входных данных.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа относится к теоретическому направлению исследований проблемы устойчивости задач многокритериальной (векторной) оптимизации. Это направление связано с поиском и изучением условий, при которых множеству решений задачи, оптимальных по Парето, Слейтеру или Смейлу, присуще некоторое наперед заданное свойство, определенным образом характеризующее ее устойчивость к малым возмущениям входных данных. В статье продолжены исследования вопросов корректности векторных задач оптимизации, в том числе их разрешимости и устойчивости, представленные, в частности, в работах [1–9]. Описанные в них результаты расширяют известный класс задач векторной оптимизации, устойчивых относительно возмущений входных данных для векторного критерия. Другое известное направление в исследованиях проблемы устойчивости ориентировано на получение и изучение количественных характеристик допустимых изменений во входных данных задачи, в частности, радиуса максимального шара устойчивости задачи (см., например, [10–12]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим задачу векторной оптимизации вида

$$Q(F, X):\ \max\{F(x) | x \in X\}, \tag{1}$$

где X — множество из R^n произвольной структуры, возможно дискретной; R^n — n-мерное действительное пространство; $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$, $\ell \geq 2$, $f_i : R^n \to R^1$, — непрерывная функция, $i \in N_\ell = \{1, \ldots, \ell\}$, $X \neq \varnothing$. Пусть задача (1) состоит в отыскании элементов множества Парето-оптимальных решений

$$P(F, X) = \{x \in X \,|\, \pi(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x),\ F(y) \neq F(x)\}$.

Рассмотрим также множества решений, оптимальных по Слейтеру:

$$Sl(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$, и по Смейлу:

$$Sm(F, X) = \{x \in X \mid \eta(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\eta(x, F, X) = \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x)\}$.

Легко видеть, что

$$Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset Sl(F, X) \qquad (2)$$

и $\forall x \in X \;\; \sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X) \subset \eta(x, F, X)$.

Множество Парето $P(F, X)$ называется внешне устойчивым, если для любого неоптимального решения $x \in X \setminus P(F, X)$ найдется оптимальное решение $x' \in P(F, X)$, для которого $F(x') \geq F(x)$. Согласно [13] конечность непустого множества X является достаточным условием существования Парето-оптимальных решений векторной задачи и внешней устойчивости множества Парето. Однако в случае бесконечной допустимой области X множество Парето может не быть внешне устойчивым и быть пустым. Согласно теореме В.В. Подиновского [13] множество Парето непусто и внешне устойчиво, если допустимое множество X задачи является непустым компактом, т.е. ограничено и замкнуто, а критериальная вектор-функция $F(x)$ задачи полунепрерывна сверху (покомпонентно) на X.

Отметим также известный результат о замкнутости множества оптимальных по Слейтеру решений для задачи оптимизации непрерывной вектор-функции на замкнутом допустимом множестве [13]. Из него вытекает следующее утверждение, которое касается задачи (1).

Утверждение 1. Пусть допустимое множество X задачи $Q(F, X)$ является замкнутым. Тогда множество $Sl(F, X)$ тоже замкнуто.

Отметим, что множества $P(F, X)$ и $Sm(F, X)$ оптимальных по Парето и по Смейлу решений (например, для частично целочисленной задачи $Q(F, X)$) могут быть незамкнуты даже при условии замкнутости допустимого множества X. Соответствующие примеры для задачи с линейными частными критериями приведены в [1].

Для задачи (1) в качестве входных данных, которые могут подвергаться возмущениям, рассмотрим коэффициенты векторного критерия F. Набор таких входных данных обозначим $u \in U$, U — пространство входных данных задачи. Наряду с введенными обозначениями $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$ для векторной целевой функции и частных критериев задачи $Q(F, X)$ будем использовать, когда это необходимо, также обозначения $F_u(x) = (f_1^u(x), \ldots, f_\ell^u(x))$, уточняющие, какой именно элемент u из пространства U входных данных соответствует рассматриваемой задаче.

Для любого натурального числа q действительное векторное пространство R^q будем рассматривать как нормированное. Норму в R^q зададим формулой

$$\|z\| = \sum_{i \in N_q} \|z_i\|, \qquad (3)$$

где $z = (z_1, \ldots, z_q) \in R^q$, $N_q = \{1, \ldots, q\}$. Под нормой некоторой матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times k} \in R^{m \times k}$ будем понимать норму вектора $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{mk})$.

Как известно [14], в конечномерном пространстве R^q любые две нормы: $\|\cdot\|^{(1)}$, $\|\cdot\|^{(2)}$ эквивалентны, т.е. найдутся такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что $\forall z \in R^q$ справедливы неравенства $\alpha \|z\|^{(1)} \leq \|z\|^{(2)} \leq \beta \|z\|^{(1)}$. Согласно этой эквивалентности изложенные далее результаты справедливы и для других норм, введенных в конечномерном пространстве.

Для набора входных данных $u \in U$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество возмущенных входных данных $O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \|u(\delta) - u\| < \delta\}$.

Рассмотрим задачу с возмущенными входными данными векторного критерия $Q(F_{u(\delta)}, X): \max\{F_{u(\delta)}(x) \mid x \in X\}$, где $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), \ldots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

Определим различные типы устойчивости относительно возмущений входных данных для векторного критерия задачи (1), распространив на этот класс задач понятия T_1-, T_2-, T_3-, T_4- и T_5-устойчивости по векторному критерию, введенные в [4] для полностью целочисленной задачи поиска Парето-оптимальных решений с квадратичными частными критериями.

Определение 1. Задачу $Q(F_u, X)$ назовем T_1-устойчивой по векторному критерию, если существует такое число $\delta > 0$, что для любого возмущенного набора $u(\delta) \in O_\delta(u)$ входных данных задачи справедливо неравенство

$$P(F_u, X) \cap P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing.$$

Определение 2. Задачу $Q(F_u, X)$ назовем T_2-устойчивой по векторному критерию, если существует такое число $\delta > 0$, для которого справедливо неравенство

$$\bigcap_{u(\delta) \in O_\delta(u)} P(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing.$$

Определение 3. Задачу $Q(F_u, X)$ назовем T_3-устойчивой (T_4-, T_5-устойчивой) по векторному критерию, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ выполняется условие

$$P(F_u, X) \cap O_\varepsilon(x(\delta)) \neq \varnothing \quad \forall x(\delta) \in P(F_{u(\delta)}, X) \tag{4}$$

(соответственно условие

$$P(F_{u(\delta)}, X) \cap O_\varepsilon(x) \neq \varnothing \quad \forall x \in P(F_u, X) \tag{5}$$

для T_4-устойчивости и оба условия: (4) и (5) для T_5-устойчивости), где $O_\varepsilon(x) = \{x' \in R^n \mid \|x - x'\| < \varepsilon\}$ $\forall x \in R^n$.

Отметим, что условие (4) равносильно включению $P(F_{u(\delta)}, X) \subset O_\varepsilon(P(F_u, X))$, а условие (5) — включению $P(F_u, X) \subset O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)}, X))$, где $O_\varepsilon(B) = \{x \in R^n \mid r(x, B) < \varepsilon\}$ — ε-окрестность некоторого множества $B \subset R^n$. Здесь $r(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|$ — расстояние между любой точкой $x \in R^n$ и множеством B. Таким образом, T_3-устойчивость (T_4-, T_5-устойчивость) по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ означает, что точечно-множественное отображение $P: U \to 2^X$, $u \to P(u) = P(F_u, X)$ полунепрерывно сверху (соответственно полунепрерывно снизу, непрерывно) по Хаусдорфу в точке $u \in U$.

ДОСТАТОЧНЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. Если множество X ограничено и замкнуто, то равенство

$$Sl(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X)), \tag{6}$$

где $\mathrm{cl}B$ — замыкание некоторого множества $B \subset R^n$, является достаточным условием T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть равенство (6) справедливо, но задача $Q(F_u, X)$ не является T_3-устойчивой по векторному критерию. Последнее означает, что $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ найдется такой возмущенный набор входных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$, для которого не выполняется условие (4). Тогда $\forall\, \delta > 0$ существует хотя бы одно решение $x_\delta \in P(F_{u(\delta)}, X)$ возмущенной задачи $Q(F_{u(\delta)}, X)$, которое вместе со всей своей ε-окрестностью не принадлежит множеству Парето задачи $Q(F_u, X)$:

$$O_\varepsilon(x_\delta) \subset R^n \setminus P(F_u, X). \qquad (7)$$

Из принадлежности $x_\delta \in P(F_{u(\delta)}, X)$ следует, что

$$\pi(x_\delta, F_{u(\delta)}, X) = \{z \in X \mid F_{u(\delta)}(z) \ge F_{u(\delta)}(x_\delta), F_{u(\delta)}(z) \ne F_{u(\delta)}(x_\delta)\} = \varnothing,$$

т.е. $\forall\, z \in X$ справедливо одно из соотношений:

$$N^{<}(z) = \{i \in N_\ell \mid f_i^{u(\delta)}(z) < f_i^{u(\delta)}(x_\delta)\} \ne \varnothing,$$

$$N^{=}(z) = \{i \in N_\ell \mid f_i^{u(\delta)}(z) = f_i^{u(\delta)}(x_\delta)\} = N_\ell.$$

В таком случае для любой точки $z \in X$ можно выделить из конечного множества $\{i_\delta \in N^{<}(z) \cup N^{=}(z) \mid \delta > 0\} \subset N_\ell$ стационарную последовательность $\{i_{\delta_r} \mid r \in N\}$. А учитывая теорему Больцано–Вейерштрасса [14], можно также из ограниченного множества $\{x_\delta \mid \delta > 0\} \subset X$ выделить сходящуюся последовательность $\{x_{\delta_r} \mid r \in N\}$, причем $\lim\limits_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Обозначим $\widetilde{x} = \lim\limits_{r\to\infty} x_{\delta_r}$, $i_0 = \lim\limits_{r\to\infty} i_{\delta_r}$. Учитывая замкнутость множества X, заключаем, что $\widetilde{x} \in X$. При $r \to \infty$ получаем неравенство $f_{i_0}^u(z) \le f_{i_0}^u(\widetilde{x})$, которое имеет место для всех $z \in X$. Таким образом, $\sigma(\widetilde{x}, F_u, X) = \{z \in X \mid F_u(z) > F_u(\widetilde{x})\} = \varnothing$ и $\widetilde{x} \in Sl(F, X)$. Учитывая условие (6), приходим к выводу

$$\widetilde{x} \in \mathrm{cl}(P(F_u, X)). \qquad (8)$$

Однако из включения (7) следует, что $\forall\, x \in P(F, X)$ справедливы неравенства $\|x - x_{\delta_r}\| \ge \varepsilon$, $r \in N$, которые, в свою очередь, при $r \to \infty$ приводят к неравенству $\|x - \widetilde{x}\| \ge \varepsilon$. Последнее означает, что $\widetilde{x} \notin \mathrm{cl}(P(F_u, X))$, и приводит к противоречию с принадлежностью (8).

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть множество X ограничено и замкнуто. Достаточным условием T_4-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ является выполнение равенства

$$\mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X)). \qquad (9)$$

Доказательство. Предположим (от противного), что условие (9) выполняется, но задача $Q(F_u, X)$ не является T_4-устойчивой по векторному критерию. Последнее означает, что $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ найдется возмущенный набор входных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$, при котором не выполняется условие (5), и следовательно, найдется по крайней мере одно Парето-оптимальное решение $x_\delta^* \in P(F_u, X)$, не принадлежащее возмущенному множеству Парето $P(F_{u(\delta)}, X)$ вместе со всей своей окрестностью $O_\varepsilon(x_\delta^*)$. Итак,

$$O_\varepsilon(x_\delta^*) \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta)}, X) \qquad (10)$$

и $\forall\, y \in P(F_{u(\delta)}, X) : \|x_\delta^* - y\| \ge \varepsilon$.

Поскольку множество $\{x_\delta^* \mid \delta > 0\} \subset P(F_u, X) \subset X$ является ограниченным (в связи с ограниченностью X), согласно теореме Больцано–Вейерштрасса из него можно выделить сходящуюся последовательность $\{x_{\delta_r}^* \mid r \in N\}$, для которой $\lim\limits_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Введем обозначение $x^* = \lim\limits_{r\to\infty} x_{\delta_r}^*$. Учитывая замкнутость множества X, приходим к выводу

$$x^* \in \mathrm{cl}(P(F_u, X)) \subset X. \tag{11}$$

Рассмотрим окрестность $O_{\varepsilon/2}(x^*)$, для которой, исходя из определения предела последовательности, можно указать такой номер $r_0 \in N$, что $\forall\, r \ge r_0$ $x_{\delta_r}^* \in O_{\varepsilon/2}(x^*)$. На основании включения (10), которое имеет место $\forall\, \delta > 0$, делаем вывод, что $\forall\, r \ge r_0$: $O_{\varepsilon/2}(x^*) \subset O_\varepsilon(x_{\delta_r}^*) \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta_r)}, X)$. Отсюда следует, что для любой точки $v \in O_{\varepsilon/2}(x^*) \bigcap X$ и номера $r \ge r_0$ найдется Парето-оптимальное решение $\bar{x}_{\delta_r} = \bar{x}_{\delta_r}(v) \in P(F_{u(\delta_r)}, X)$ возмущенной задачи, для которого справедливы неравенства $f_i^{u(\delta_r)}(\bar{x}_{\delta_r}) \ge f_i^{u(\delta_r)}(v)$, $i \in N_\ell$.

Последний вывод сделан с учетом внешней устойчивости, присущей множеству $P(F_{u(\delta_r)}, X)$ в связи с непрерывностью (покомпонентно) критериальной вектор-функции задачи $Q(F_{u(\delta_r)}, X)$ и с тем, что непустое допустимое множество X этой задачи является компактом [13].

Зафиксировав некоторую точку v из множества $O_{\varepsilon/2}(x^*) \bigcap X$, рассмотрим последовательность $\{\bar{x}_{\delta_r} \mid r \ge r_0, r \in N\} \subset X$. Из нее выделим сходящуюся подпоследовательность $\{\bar{x}(\delta_{r_k}) \mid k \in N\}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{r_k} = 0$. Обозначим $\bar{x} = \lim\limits_{k\to\infty} \bar{x}(\delta_{r_k})$. Учитывая замкнутость множества X, имеем $\bar{x} \in X$. Очевидно, что $\|x^* - \bar{x}\| > \varepsilon/2$, $\bar{x} \notin O_{\varepsilon/2}(x^*)$ и, следовательно, $\bar{x} \ne v$.

От неравенств $f_i^{u(\delta_{r_k})}(\bar{x}(\delta_{r_k})) \ge f_i^{u(\delta_{r_k})}(v)$, $i \in N_\ell$, $k \in N$, перейдем при $k \to \infty$ к таким: $f_i^u(\bar{x}) \ge f_i^u(v)$, $i \in N_\ell$.

Последние неравенства вместе с неравенством $v \ne \bar{x}$ позволяют сделать вывод, что $\bar{x} \in \eta(v, F, X) \ne \varnothing$ и $v \notin Sm(F, X)$. Таким образом, $O_{\varepsilon/2}(x^*) \bigcap$ $\bigcap Sm(F, X) = \varnothing$ и точка x^* не является точкой прикосновения множества $Sm(F, X)$. Поэтому она не принадлежит и замыканию $\mathrm{cl}(Sm(F, X))$ этого множества. Учитывая предположение о справедливости равенства $\mathrm{cl}(P(F, X)) =$ $= \mathrm{cl}(Sm(F, X))$, приходим к выводу: $x^* \notin \mathrm{cl}(P(F, X))$, что противоречит принадлежности (11).

Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 с очевидностью вытекает следующая.

Теорема 3. Если множество X ограничено и замкнуто, то выполнение соотношений $Sl(F, X) = \mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X))$ является достаточным условием T_5-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$.

Далее сформулируем необходимые условия T_3- и T_4-устойчивости задачи (1) при таких дополнительных условиях, наложенных на ее целевую вектор-функцию $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$:

$$f_i(x) = g_i(x) + \langle c_i, x \rangle, \ i \in N_\ell, \tag{12}$$

где $f_i : R^n \to R^1$, $g_i : R^n \to R^1$, $c_i = (c_{i1}, \dots, c_{in}) \in R^n$. В частности, речь может идти о квадратичных и линейных функциях, составляющих векторный критерий. Входные данные $u \in U$ для рассматриваемого векторного критерия представим в виде пары $u = (u^g, C)$, где u^g — набор всех входных данных, необходимых для представления функций $g_i(x)$, $i \in N_\ell$, $C = [c_{ij}] \in R^{\ell \times n}$.

Теорема 4 [2]**.** Необходимым условием T_3-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ с линейными частными критериями $f_i(x) = \langle c_i, x \rangle$, $i \in N_\ell$, является выполнение равенства (6).

Теорема 5. Пусть множество X замкнуто. Необходимым условием T_4-устойчивости по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ с частными критериями $f_i(x)$, $i \in N_\ell$, представленными формулами (12), является выполнение равенства (9).

Доказательство. Предположим (от противного), что для T_4-устойчивой по векторному критерию задачи $Q(F, X)$ не выполняется условие $\mathrm{cl}(P(F, X)) = \mathrm{cl}(Sm(F, X))$ и, следовательно, найдется некоторая точка $v \in \mathrm{cl}(P(F, X)) \setminus \mathrm{cl}(Sm(F, X))$. С одной стороны, принадлежность точки v замыканию $\mathrm{cl}(P(F, X))$ означает, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \, y \in O_\varepsilon(v) \bigcap P(F, X)$. С другой стороны, рассматривая v как точку открытого множества $R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F, X))$, заключаем, что $\exists \varepsilon' > 0$: $O_{\varepsilon'}(v) \subset R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F, X))$. Это позволяет сделать вывод о существовании точки $y = (y_1, \dots, y_n) \in O_{\varepsilon'}(v) \bigcap P(F, X) \subset R^n \setminus \mathrm{cl}(Sm(F, X))$. Поскольку $y \in P(F, X) \setminus Sm(F, X)$, найдется также точка $z = (z_1, \dots, z_n) \in \eta(y, F, X) \setminus \pi(y, F, X)$, для которой справедливы соотношения

$$F(z) = F(y), \quad z \neq y. \tag{13}$$

Для получения противоречия с приведенным ранее предположением о T_4-устойчивости задачи $Q(F_u, X)$ покажем, что $\exists \varepsilon'' > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ найдется такой набор возмущенных входных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$, при котором $P(F_{u(\delta)}, X) \bigcap O_{\varepsilon''}(y) = \varnothing$. В связи с этим для произвольного $\delta > 0$ введем в рассмотрение возмущенный набор входных данных $u(\delta) = (u^g, C(\delta))$, в котором компонента u^g, представляющая входные данные, необходимые для описания функций g_i, $i \in N_\ell$, остается неизменной по сравнению с начальным набором $u = (u^g, C) \in U$ входных данных, а матрицу $C(\delta) = [c_{ij}(\delta)] \in R^{\ell \times n}$ построим, исходя из таких формул для вычисления отдельных ее элементов:

$$c_{ij}(\delta) = c_{ij} + \alpha \, \mathrm{sgn}(z_j - y_j), \quad i \in N_\ell, \ j \in N_n, \ 0 < \alpha < \frac{\delta}{n\ell}.$$

С учетом (3) легко убедиться, что $\| C(\delta) - C \| = \sum_{i \in N_\ell} \sum_{j \in N_n} | c_{ij}(\delta) - c_{ij} | < \delta$ и, следовательно, $u(\delta) = (u^g, C(\delta)) \in O_\delta(u)$. Кроме того, с учетом формул (3) и (13) для всех $i \in N_\ell$ выполняются соотношения

$$f_i^{u(\delta)}(z) - f_i^{u(\delta)}(y) = g_i(z) + \langle c_i(\delta), z \rangle - g_i(y) - \langle c_i(\delta), y \rangle = f_i^u(z) - f_i^u(y) +$$

$$+ \alpha \sum_{j \in N_n} (z_j - y_j) \, \mathrm{sgn}(z_j - y_j) = \alpha \sum_{j \in N_n} | z_j - y_j | = \alpha \| z - y \| > 0.$$

Итак, $F_{u(\delta)}(z) - F_{u(\delta)}(y) > 0$. Следовательно, $z \in \sigma(y, F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$, и в соответствии с определением множества Слейтера точка y не принадлежит возмущенному множеству $Sl(F_{u(\delta)}, X)$, которое замкнуто согласно утверждению 1. Тогда точка y принадлежит открытому множеству $R^n \setminus Sl(F_{u(\delta)}, X)$ и найдется число $\varepsilon'' > 0$, для которого выполняется включение $O_{\varepsilon''}(y) \subset R^n \setminus Sl(F_{u(\delta)}, X)$. Учитывая соотношения (2), получаем также включение $O_{\varepsilon''}(y) \subset \subset R^n \setminus P(F_{u(\delta)}, X)$. Однако существование такой окрестности $O_{\varepsilon''}(y)$ точки $y \in P(F_u, X)$ противоречит предположению о T_4-устойчивости задачи $Q(F, X)$, потому что по определению T_4-устойчивости $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ выполняется условие (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье исследованы качественные характеристики различных понятий устойчивости векторных оптимизационных задач с непрерывными частными критериальными функциями и множеством допустимых решений произвольной структуры. Вопросы устойчивости изучены для случая возможных возмущений исходных данных векторного критерия оптимизации. Определены условия, при которых множество Парето-оптимальных решений задачи имеет некоторое наперед заданное свойство инвариантности по отношению к внешним воздействиям на входные данные. Доказаны достаточные (теоремы 1–3) и необходимые (теорема 5) условия устойчивости трех различных типов, при выполнении которых гарантируется, что достаточно малые изменения во входных данных векторного критерия либо не приводят к появлению новых Парето-оптимальных решений, либо сохраняют все Парето-оптимальные решения задачи и допускают появление новых, либо не изменяют множество Парето-оптимальных решений исходной задачи. Полученные результаты расширяют известный класс задач векторной оптимизации, устойчивых относительно возмущений входных данных для векторного критерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kozeratskaya L.N., Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Mixed integer vector optimization: Stability issues. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1991. Vol. 27, N 1. P. 76–80.
2. Kozeratskaya L.N. Vector optimization problems: Stability in the decision space and in the space of alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 6. P. 891–899.
3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
4. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability of vector problems of integer optimization: Relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2005. Vol. 41, N 4. P. 551–558.
5. Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Stability of a vector integer quadratic programming problem with respect to vector criterion and constraints. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2006. Vol. 42, N 5. P. 667–674.
6. Lebedeva T.T., Sergienko T.I. Different types of stability of vector integer optimization problem: General approach. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, N 3. P. 429–433.
7. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 228–233.
8. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828.
9. Sergienko T.I. Conditions of Pareto optimization problems solvability. Stable and unstable solvability. *In: Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications*. Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (Eds.). Cham: Springer, 2017. Vol. 130. P. 457–464.

10. Emelichev V.A., Kuzmin K.G. Stability radius of a vector integer linear programming problem: Case of a regular norm in the space of criteria. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 1. P. 72–79.

11. Emelichev V.A., Kotov V.M., Kuzmin K.G., Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, N 2. P. 27–41.

12. Emelichev V., Nikulin Yu. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 949–957.

13. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.

14. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Вища шк., 1992. 495 с.

Надійшла до редакції 17.08.2020

Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко

БАГАТОКРИТЕРІЙНА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ: СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ ВХІДНИХ ДАНИХ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРІЮ

Анотація. Для векторної задачі оптимізації з неперервними частковими критерійними функціями і множиною допустимих розв'язків довільної структури вивчено умови стійкості щодо збурень вхідних даних векторного критерію. Отримано достатні і необхідні умови стійкості трьох типів для задачі пошуку Парето-оптимальних розв'язків.

Ключові слова: векторна задача оптимізації, векторний критерій, стійкість, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, множина Смейла, збурення вхідних даних.

T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION PROBLEM: STABILITY WITH RESPECT TO INITIAL DATA PERTURBATIONS IN VECTOR CRITERION

Abstract. The conditions of stability with respect to initial data perturbations in vector criterion for multi-objective optimization problem with continuous partial criterion functions and feasible set of arbitrary structure are established. The sufficient and necessary conditions of three types of stability for the problem of finding Pareto-optimal solutions are proved.

Keywords: vector optimization problem, vector criterion, stability, Pareto optimal solutions, Slater set, Smale set, perturbations of initial data.

Лебедева Татьяна Тарасовна,
кандидат экон. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: lebedevatt@gmail.com.

Семенова Наталия Владимировна,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: nvsemenova@meta.ua.

Сергиенко Татьяна Ивановна,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: taniaser62@gmail.com.