УДК 519.9

**А.Н. ВОРОНИН, А.С. САВЧЕНКО**

# МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ: СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД

**Аннотация.** Предложен системный подход к решению задач многокритериальной оптимизации. Такой подход позволяет объединить модели отдельных схем компромиссов в единую целостную структуру, адаптирующуюся к ситуации принятия многокритериального решения. Преимуществом концепции нелинейной схемы компромиссов является возможность принятия многокритериального решения формально без непосредственного участия человека. Аппарат нелинейной схемы компромиссов, разработанный как формализованный инструмент для исследования систем управления с противоречивыми критериями, позволяет практически решать многокритериальные задачи широкого класса.

**Ключевые слова:** система, оптимизация, многокритериальность, функция полезности, скалярная свертка, нелинейная схема компромиссов.

## ВВЕДЕНИЕ

Содержательная сущность многих практических задач в различных предметных областях состоит в выборе условий, позволяющих объекту исследования в заданной ситуации проявить свои наилучшие свойства (задачи оптимизации). Условия, от которых зависят свойства объекта, количественно выражаются некоторыми переменными величинами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданными в области определения $X$ и называемыми аргументами оптимизации. Внешние воздействия $r$ от нас не зависят, но они могут принимать свои значения из компактного множества $R$. Обычно считают, что расчеты осуществляются при заданном и известном векторе внешних воздействий $r^0 \in R$, от которого в итоге зависит ситуация принятия решения.

В свою очередь, каждое свойство объекта в области $M$ количественно описывается с помощью переменной $y_k$, $k \in [1, s]$, значение которой характеризует качество объекта $O$ по отношению к этому свойству.

В общем случае показатели $y_1, y_2, \ldots, y_s$, называемые критериями качества, образуют вектор $y = \{y_k\}_{k=1}^{s} \in M$. Его компоненты количественно выражают свойства объекта при заданной совокупности аргументов оптимизации $x = \{x_i\}_{i=1}^{n} \in X$.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Идеи системной оптимизации изложены в работах [1, 2]. Термин «системный подход» означает, что реальный объект, представляемый системой, описывается как совокупность взаимодействующих компонентов, реализующая определенную цель. Из разнообразия компонентов реального объекта «высекается» конечное, но упорядоченное множество элементов и отношений между ними. Можно считать, что система — это модель реального объекта лишь в аспекте той цели, которую он реализует. Цель, требуя для своего достижения конкретных функций, определяет через них состав и структуру системы.

Цель вычленяет, очерчивает в объекте контуры системы. В эту систему (модель объекта) войдет из реального объекта только та информация, которая необ-

© А.Н. Воронин, А.С. Савченко, 2020

ходима и достаточна для достижения цели. Если один и тот же объект может реализовать несколько целей, то относительно каждой из них он выступает как самостоятельная система. Системный подход предполагает, что не только объект, но и сам процесс исследования выступает как сложная система, задача которой состоит в соединении в единое целое различных моделей объекта [3].

Таким образом, при системном подходе к исследователю поступает только та информация о реальном объекте, которая необходима и достаточна для решения поставленной задачи.

### ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ

Если объект реализует только одну цель, то эффективность достижения поставленной цели количественно выражается единственным критерием оптимальности *y*. Решение задачи оптимизации предусматривает достижение экстремального значения критерия посредством выбора совокупности аргументов оптимизации.

Экстремизацию критерия оптимальности часто отождествляют с понятием реализации цели, в то время как в действительности это разные понятия. Можно сказать, что критерий и цель соотносятся друг к другу как модель и оригинал со всеми вытекающими следствиями. Это объясняется тем, что оригиналу обычно ставится в соответствие не одна, а несколько моделей, отражающих тот или иной его аспект. Некоторые цели сложно, а иногда невозможно описать с помощью количественных критериев. В любом случае критерий — всего лишь суррогат цели. Критерии характеризуют цель лишь косвенно — иногда лучше, иногда хуже, но всегда приближенно [4, 5].

Решение оптимизационных задач предполагает наличие некоторой оценки качества работы системы, исходя из которой можно определить, насколько одна система работает лучше другой. Главная проблема количественной оценки объектов и процессов заключается в том, чтобы понятиям «лучше» и «хуже» поставить в соответствие понятия «больше» и «меньше». Для определенности полагают, что, например, «лучше» означает «меньше».

Если описание открывает путь для измерения, то дискуссии можно заменить вычислениями. В применении к рассматриваемым задачам это значит, что если имеются обоснованные количественные критерии качества сложной системы, то ее исследование может быть проведено посредством формализованного математического аппарата. В противном случае неизбежны субъективные оценки, многозначные толкования и произвольные решения.

Функция $y = f(x)$ связывает критерий качества с аргументами оптимизации. В задачах оценивания функция $f(x)$ называется оценочной функцией, а в задачах оптимизации — целевой функцией. С некоторыми оговорками задача оптимизации формулируется как нахождение такого сочетания значений аргументов из области их определения, при котором целевая функция приобретает экстремальное значение:

$$x^* = \arg \operatorname*{extr}_{\substack{x \in X \\ y \in M}} f(x) \Bigg|_{r^0 \in R}.$$

Если термин «лучше» означает «меньше», то на практике при фиксированном $r^0 \in R$ и гарантированном $y \in M$

$$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x).$$

Сложный объект исследования не может характеризоваться каким-то одним (например, «наиболее важным» или «типичным») признаком, при его описании должны учитываться одновременно многие свойства. Иными словами, для исследования сложных объектов современный системный подход требует привлечения всего спектра их свойств. Сложный объект и любой его фрагмент необходимо рассматривать не изолированно, а в многочисленных противоречивых взаимодействиях и, что важно, в различных возможных ситуациях.

Сложные системы, находясь в разных условиях (ситуациях, режимах), обнаруживают различные системные свойства, в том числе и не совместимые ни с одной из ситуаций в отдельности. При их изучении применяется подход, состоящий в создании и одновременном сосуществовании не одной, а множества теоретических моделей одного и того же явления, причем некоторые из них концептуально противоречат одна другой. Однако никакой из них нельзя пренебречь, поскольку каждая характеризует определенное свойство изучаемого явления и ни одна из них не может быть принята как единая, поскольку не выражает полного комплекса всех свойств. Сопоставим сказанное с принципом дополнительности, введенным в науку Нильсом Бором: «... Для воспроизведения целостности явления следует применять взаимоисключающие «дополнительные» классы понятий, каждый из которых может быть использован в своих, особых условиях, но только взятые вместе исчерпывают всю поддающуюся определению информацию.»

Множественные свойства сложной системы в той или иной ситуации ее функционирования количественно оцениваются соответствующими частными критериями. В разных ситуациях ранг «наиболее важного» приобретают разные свойства и соответственно разные частные критерии. Таким образом, взаимоисключающие «дополнительные» классы понятий, в роли которых выступают отдельные теоретические модели, характеризуются противоречивыми частными критериями, каждый из которых применим в определенных особых условиях. И только полная совокупность частных критериев (векторный критерий) дает возможность адекватной оценки функционирования сложной системы как проявления противоречивого единства всех ее свойств. Поэтому можно полагать, что многокритериальность представляет собой воплощение принципа дополнительности в методологии исследования сложных систем. Однако эта возможность представляет собой только необходимое, но не достаточное условие векторной оценки всей системы в целом. Действительно, пусть известны численные значения всех частных критериев системы. Но это не означает, что зная эти величины, можно оценить эффективность всей системы в целом.

Для целостной оценки необходимо подняться на следующий уровень, т.е. осуществить акт композиции критериев. Сопоставим это с теоремой Курта Гёделя о неполноте. «…В любой достаточно сложной непротиворечивой теории первого порядка существует утверждение, которое средствами самой теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но непротиворечивость одной конкретной теории может быть установлена средствами другой, более мощной формальной теории второго порядка. Однако тогда встает вопрос о непротиворечивости этой второй теории и т.д.». Теорема Гёделя представляется методологической основой композиции критериев, что является достаточным условием векторной оценки всей системы в целом.

Инструментом акта композиции может служить скалярная свертка критериев, представляющая математический способ сжатия информации и количественной оценки ее интегральных свойств одним числом.

Одновременное описание явления (объекта) с разных позиций всегда дает качественно новое, более совершенное представление об описываемом явлении (объекте) по сравнению с любым «односторонним» описанием. Так, два плоских снимка, образующих стереопару, составляют объемное изображение объекта, даже не используя возможности голографии. Многокритериальный подход, «стереоскопически» оценивающий функционирование системы, открывает новые возможности для совершенствования сложных систем управления и принятия решений. Итак, для целостного восприятия сложной системы в разных условиях ее функционирования необходимо применять многокритериальный подход.

В практических задачах реальный объект обычно реализует не одну, а несколько целей и соответственно характеризуется несколькими частными критериями эффективности (качества). Следует отметить, что критерии качества, как правило, противоречивы. Искусство исследователя состоит в системной увязке моделей, характеризуемых противоречивыми показателями. Так, Жан Кольбер (министр Людовика XIV) в 1665 г. говорил: «Искусство налогообложения заключается в том, чтобы, общипывая гуся, получать максимальное количество перьев при минимальном его шипении». При системном подходе возникает задача, которая состоит в соединении в единое целое различных моделей объекта. Задача решается с применением акта композиции критериев.

Для системной увязки в многокритериальных задачах в качестве целевой (или оценочной) функции вместо $y = f(x)$ обычно используется скалярная свертка частных критериев $Y = f[y(x)]$, где $y$ уже не является скаляром, а $s$-мерным вектором критериев: $y = \{y_k\}_{k=1}^{s}$. Скалярная свертка выступает как инструмент акта композиции критериев [6].

В понимании оптимальности кроме критериев не менее важное значение имеют ограничения как относительно оптимизации $x \in X$, так и по критериям эффективности решения $y \in M$. Даже небольшие их изменения могут существенно сказаться на решении [7]. И серьезные последствия можно получить, исключая одни ограничения и вводя другие при той же системе критериев. Такая ситуация может привести к риску получить непредсказуемые результаты при оптимизации сложных систем. На это обратил внимание Н. Винер в первых своих публикациях по кибернетике. Это объясняется тем, что, не задав всех необходимых ограничений, можно одновременно с экстремизацией целевой функции получить непредвиденные и нежелательные сопутствующие эффекты.

Мысль Н. Винера о том, что в сложных системах мы принципиально не в состоянии заранее определить все условия и ограничения, гарантирующие отсутствие нежелательных эффектов оптимизации, позволила ему сделать мрачное предположение о катастрофических последствиях кибернетизации общества.

Тем не менее, с позиций системного анализа отношение к оптимизации можно сформулировать таким образом: это мощное средство повышения эффективности, однако использовать его следует по мере возрастания сложности проблемы.

Пусть задано множество возможных решений $X \subset E^n$, состоящее из векторов $x = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ $n$-мерного евклидова пространства. По физической природе задачи задана векторная голономная (в статике) или неголономная (в динамике) связь $B(x) \le 0$. Решение принимается при внешних воздействиях, описываемых вектором $r$, который задан на множестве возможных факторов $R$.

Результат решения оценивается по совокупности противоречивых частных критериев, образующих $s$-мерный вектор $y(x) \in F \subset R^s$, который определен на допустимом множестве $X$. Зависимость $y \in F$ означает принадлежность вектора $y$ классу $F$ допустимых векторов эффективности. Вектор частных критериев $y \in M$ ограничен допустимой областью $M \subset R^s$. Вопросы существования различных видов оптимальных решений многокритериальных задач оптимизации детально исследованы в [8]. Предположим, что допустимое множество $X \neq \varnothing$ и оптимальные решения существуют. Ситуация, которая возникает в результате принятия многокритериального решения $x$ в заданных внешних условиях $r$, характеризуется декартовым произведением $S = X \times R$.

Ставится задача: определить такое решение $x^* \in X$, которое при заданных условиях, связях и ограничениях оптимизирует вектор эффективности $y(x)$.

Для конструктивного решения поставленной задачи в различных частных постановках необходимо осуществить структуризацию некоторых понятий. Для этого следует сделать дополнительные частные предположения, способствующие решению следующих проблем векторной оптимизации:

— определить область решений, оптимальных по Парето;
— выбрать схему компромиссов;
— выполнить нормализацию частных критериев;
— выявить приоритет.

Трудности решения проблем векторной оптимизации носят не вычислительный, а концептуальный характер (речь идет не о том, как найти оптимальное решение, а что следует под этим понимать). Поэтому разработка формального аппарата решения многокритериальных задач представляет собой одну из наиболее трудных проблем современной теории принятия решений и управления. Это важно как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

## ВЫБОР СХЕМЫ КОМПРОМИССОВ

При рассмотрении проблем векторной оптимизации особое внимание уделим проблеме выбора схемы компромиссов. Одно из важнейших положений теории принятия решений при многих критериях состоит в том, что не существует наилучшего в каком-то абсолютном смысле решения. Принятое решение может считаться наилучшим лишь для данного лица, принимающего решение (ЛПР) в соответствии с поставленной им целью и с учетом конкретной ситуации. Нормативные модели решения многокритериальных проблем основаны на гипотезе существования в сознании ЛПР некоторой функции полезности [9], измеряемой как в номинальных, так и в порядковых шкалах. Отражением этой функции полезности является схема компромиссов и ее модель в заданной ситуации — скалярная свертка частных критериев $Y[y(x)]$, позволяющая конструктивно решить задачу многокритериальной оптимизации.

Определение многокритериального решения по своей природе компромиссно и принципиально основано на использовании субъективной информации. Получив эту информацию от ЛПР и выбрав схему компромиссов, можно перейти от общего векторного выражения к скалярной свертке частных критериев, что является основой для построения конструктивного аппарата решения многокритериальных задач. С использованием способа скалярной свертки модель решения задачи векторной оптимизации математически представляется в виде экстремизации функции $Y[y(x)]$. Это скалярная функция, являющаяся скалярной сверткой вектора частных критериев, вид которой зависит от выбранной схемы компромиссов.

Наиболее часто применяется аддитивная (линейная) скалярная свертка

$$Y[y(x)] = \sum_{k=1}^{s} a_k y_k(x),$$

где $a_k$ — весовые коэффициенты, определяемые ЛПР, исходя из своей функции полезности в заданной ситуации. Принцип Лапласа в теории принятия решений состоит в экстремизации линейной скалярной свертки. Специфика (недостаток) применения линейной скалярной свертки — это возможность «компенсации» одного критерия за счет других.

Мультипликативная свертка

$$Y[y(x)] = \prod_{k=1}^{s} y_k(x)$$

свободна от этого недостатка. Принцип Паскаля состоит в экстремизации мультипликативной скалярной свертки.

Исторически принцип Блеза Паскаля изложен впервые в работе “Pensees”, изданной в 1670 г. Считается, что эта работа положила начало всей теории принятия решений. Здесь введены два ключевых понятия теории: 1) частных критериев, каждый из которых оценивает определенную сторону эффективности решения; 2) принципа оптимальности, т.е. правила, позволяющего по значениям критериев вычислить некоторую единую числовую меру эффективности решения (акт композиции критериев).

Принцип Паскаля адекватен в задачах с кумулятивным эффектом, когда действие одних факторов эффективности как бы усиливает или уменьшает влияние других факторов. При максимизации частных критериев нулевое значение любого из них нивелирует вклад всех других в общую эффективность решения. В авиационно-космической отрасли подобный подход может быть в некоторой степени оправдан, когда каждый критерий (например, надежности и безопасности) является критическим и никакое улучшение других критериев не может компенсировать низкое значение показателя. Если даже один частный критерий равен нулю, то и глобальный критерий также равен нулю.

Недостаток применения мультипликативной скалярной свертки: дорогостоящая и достаточно эффективная система может иметь такую же оценку, как и дешевая и низкоэффективная. Сравним такие «системы вооружения», как, например, атомная бомба и рогатка, которая при низкой стоимости обладает некоторым поражающим фактором. Руководствуясь мультипликативной сверткой, можно для вооружения армии выбрать рогатку.

Аналогично принципу Лапласа обобщим принцип Паскаля введением весовых коэффициентов:

$$Y[y(x)] = \prod_{i=1}^{s} [y_i(x)]^{a_i}.$$

Рассмотрим свертку по концепции Чарнза–Купера, которая основана на принципе «поближе к идеальной (утопической) точке». В пространстве критериев при заданных условиях и ограничениях определяется априори неизвестный идеальный вектор $y^{id}$. В этом случае задача оптимизации решается $s$ раз (по количеству частных критериев), причем всегда с одним (очередным) критерием, как если бы остальных не существовало. Последовательность однокритериальных решений исходной многокритериальной задачи определяет координаты недостижимого идеального вектора $y^{id} = \{y_k^{id}\}_{k=1}^{s}$. Далее критериальная функция

$Y(y)$ вводится как мера приближения к идеальному вектору в пространстве оптимизируемых критериев в виде некоторой неотрицательной функции вектора $(y^{id} - y)$, например в виде квадрата евклидовой нормы этого вектора:

$$Y(y) = \left\| \frac{y^{id} - y}{y^{id}} \right\| = \sum_{k=1}^{s} \left[ \frac{y_k^{id} - y_k}{y_k^{id}} \right]^2 .$$

Недостаток такого способа состоит в громоздкости процедуры определения координат идеального вектора. Кроме того, не исключается возможность нарушения ограничений.

Выбор схемы компромиссов осуществляется лицом, принимающим решение, и носит концептуальный характер.

### ФОРМАЛИЗАЦИЯ В РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

В зависимости от наличия и вида информации подходы к решению многокритериальных задач могут быть различными. Если такой информации не имеется, то иногда ограничиваются нахождением любого вектора решения $x^*$, обеспечивающего только выполнение условия по ограничениям $A = (A_k)_{k=1}^{s}$:

$$y^* \in M = \{ y \,|\, 0 \le y_k(x^*) \le A_k,\ k \in [1, s] \},\ \ x^* \in X .$$

(Здесь представлена структуризация понятия области ограничений $M$.)

Недостатки очевидны — полученное решение часто оказывается грубым и, как правило, не парето-оптимальным. Следовательно, возможности системы в данном случае используются не в полной мере. Такой подход рекомендуется применять для оптимизации достаточно сложных систем, когда выполнить даже такое простейшее согласование противоречивых критериев (лишь бы попасть в ограничения) представляется трудным. Разновидностью такого подхода является широко распространенный способ, когда для оптимизации из совокупности $y_k,\ k \in [1, s]$, ЛПР выбирает в качестве критерия только один (например, первый), а остальные критерии переводятся в разряд ограничений. Таким образом, исходная многокритериальная задача искусственно подменяется однокритериальной с ограничениями:

$$x^* = \arg \min_{x \in X} y_1(x),\ \ 0 \le y_k(x) \le A_k,\ k \in [1, s] .$$

Следствием изложенного подхода является решение в виде полярной точки области Парето, т.е. откровенно грубое и субъективное решение.

В случае скалярной свертки при минимизируемых критериях предусматривается использование формулы

$$x^* = \arg \min_{x \in X} Y[y(x)] .$$

### АНАЛИЗ СКАЛЯРНОЙ СВЕРТКИ

Проблема анализа скалярной свертки заключается в том, что вид функции $Y(y)$ зависит от ситуации принятия многокритериального решения и обычно не известен. Поскольку функцию $Y(y)$ на всей области определения получить сложно, то часто ограничиваются анализом ее поведения в окрестностях той точки пространства аргументов, которая соответствует наиболее типичной ситуации. Так как речь идет о малых окрестностях рабочей точки, то используемую гипотезу о гладкости критериальной функции заменяют гиперплоскостью, касательной к поверхности равных значений $Y(y)$ в рабочей точке. Тогда аппроксимирующая зависимость $Y[\alpha, y(x)]$ приобретает вид линейной скалярной свертки

$$Y^0[a, y(x)] = \sum_{k=1}^{s} a_k^0 y_k(x),$$

где $\alpha_k^0$ — коэффициент регрессии, являющийся частной производной критериальной функции по $k$-му критерию, вычисленной в базовой рабочей точке. Для вычисления коэффициентов $\alpha$ с использованием информации от ЛПР можно решить общую задачу с помощью метода наименьших квадратов, однако более целесообразно воспользоваться методикой эвристического моделирования, описанной в [10].

При использовании полученного выражения следует учитывать, что это лишь линейное приближение скалярной свертки критериальных функций и в ситуациях, отличающихся от базовой, оно может приводить к существенным искажениям.

Для получения критериальной функции на всей области определения необходимо задать вид приближающей зависимости. Как правило, в практике аппроксимации положительный результат зависит от того, насколько адекватно вид задаваемой функции отражает физику исследуемого явления. Если используются сведения о механизмах явлений, то задаваемая модель является содержательной. При отсутствии таких сведений используется подход «черного ящика», и для аппроксимации задаются формальные регрессионные модели общего вида (полиномиальные, степенные и др.). Качество содержательных моделей обычно намного лучше качества формальных.

### СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ

Для повышения эффективности исследования функции следует всегда использовать априорные сведения о физике исследуемого явления и при возможности переходить от формальных моделей к содержательным. В данном случае предметом исследования является такая тонкая субстанция, как воображаемая функция полезности, возникающая в сознании ЛПР при решении конкретной многокритериальной задачи. Кроме того, если она и существует, то у каждого ЛПР имеется своя функция полезности. Тем не менее, можно получить сведения для задания вида содержательной модели критериальной функции, если выявить и проанализировать некоторые общие закономерности, наблюдаемые в процессе принятия многокритериальных решений различными ЛПР в различных ситуациях.

Сопоставление частных критериев разной физической природы возможно только в нормализованном (безразмерном) пространстве. Пронормируем вектор эффективности $y$ вектором ограничений $A$ и получим вектор относительных частных критериев (нормализованный вектор эффективности)

$$y_0(x) = \{y_k(x) / A_k\}_{k=1}^{s} = \{y_{0k}(x)\}_{k=1}^{s}.$$

Эта операция является монотонной, а в соответствии с известной теоремой Гермейера любое монотонное преобразование не изменяет результатов сравнения. Поэтому заменим модель решения задачи векторной оптимизации с исходными критериальными функциями моделью

$$x^* = \arg\min_{x \in X} Y[y_0(x)], \ y_{0k}(x) \in [0; 1], \ k \in [1, s],$$

в которой практически используемые схемы компромиссов имеют физический смысл. Вид функции $Y(y_0)$ зависит от выбранной схемы компромиссов.

Схема компромиссов определяет, в каком именно ракурсе полученное многокритериальное решение лучше других парето-оптимальных решений. В настоящее время выбор схемы компромиссов не определяется теорией, а осуществляется эвристически на основании индивидуальных предпочтений и профессионального опыта разработчика, а также сведений о ситуации, в которой принимается многокритериальное решение.

Сложность перехода от векторного критерия качества к скалярной свертке состоит в том, что свертка должна представлять конгломерат частных критериев, значение (важность) каждого из которых в общей оценке изменяется в зависимости от ситуации. В разных ситуациях ранг «наиболее важного» могут приобретать различные частные критерии. Иными словами, скалярная свертка частных критериев должна быть выражением схемы компромиссов, зависящей от ситуации. При анализе возможностей формализации выбора схемы компромиссов этот тезис положим в основу.

Предполагается, что существуют некоторые инварианты, правила, которые обычно являются общими для всех ЛПР независимо от их индивидуальности и которых необходимо придерживаются в той или иной ситуации. Неизбежная субъективность ЛПР имеет свои границы [11]. В деловых решениях человек должен быть рациональным, чтобы уметь объяснить мотивы своего выбора, логику своей субъективной модели. Поэтому любые предпочтения ЛПР должны находиться в рамках определенной рациональной системы. Это и делает возможной формализацию.

Понятие ситуации, выражаемое двойкой $S = < r, x >$ из декартова произведения $R \times X$, фундаментально для теории векторной оптимизации, поскольку оно, будучи объективным, является единственным фактором при попытке формализовать выбор схемы компромиссов. Введем понятие напряженности ситуации [12] как меры близости относительных частных критериев к своему предельному значению (единице):

$$\rho_k(r, x) = 1 - y_{0k}(r, x), \ \ \rho_k \in [0; 1], \ \ k \in [1, s].$$

Эта система является структурированной характеристикой понятия ситуации $S = < r, x >, \ r \in R, \ x \in X$.

Если многокритериальное решение принимается в сложной ситуации: $S_1 = \{S \mid \rho_k \approx 0, \ k \in [1, s]\}$, то в заданных внешних условиях $r$ один или несколько частных критериев $y_{0k}(r, x), \ k \in [1, s]$, в результате решения $x$ могут оказаться в опасной близости к своим предельным значениям ($\rho_k = 0$). И в случае достижения одним из них предела или превышения его это событие не компенсируется возможным малым уровнем остальных критериев (обычно не допускается нарушение любого из ограничений).

В этой ситуации необходимо не допустить опасного возрастания наиболее неблагополучного (т.е. наиболее близкого к своему пределу) частного критерия, даже не считаясь в это время с поведением остальных критериев. Поэтому в достаточно напряженных ситуациях (при малых значениях $\rho_k$) ЛПР если и допускает ухудшение максимального (наиболее важного в данных условиях) частного критерия на единицу, то только компенсируя это большим количеством единиц улучшения остальных критериев. В достаточно напряженной ситуации (первый полярный случай: $\rho_k \approx 0$) внимание ЛПР сосредоточено только на этом единственном наиболее неблагоприятном частном критерии, при этом остальные критерии им не принимаются во внимание.

Следовательно, адекватным выражением схемы компромиссов в случае напряженной ситуации является минимаксная (чебышевская) модель

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \max_{k \in [1, s]} y_{0k}(x) . \qquad (1)$$

В менее напряженных ситуациях необходимо одновременно удовлетворять и другие критерии, учитывая противоречивое единство всех интересов и целей системы. При этом ЛПР варьирует свою оценку выигрыша по одним критериям и проигрыша по другим в зависимости от ситуации. В промежуточных случаях выбираются схемы компромиссов, дающие различные степени частичного выравнивания частных критериев. С уменьшением напряженности ситуации предпочтения по отдельным критериям выравниваются.

Во втором полярном случае ($\rho_k \approx 1$) ситуация настолько спокойная: $S_2 = \{S \mid \rho_k \approx 1,\ k \in [1, s]\}$, что частные критерии представляются малыми и не возникает угрозы нарушения ограничений. В данной ситуации ЛПР считает, что единица ухудшения любого частного критерия вполне компенсируется равнозначной единицей улучшения любого другого критерия. Такому положению соответствует экономичная схема компромиссов, обеспечивающая минимальные для заданных условий суммарные потери по частным критериям. Эта схема выражается моделью интегральной оптимальности

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} y_{0k}(x) . \qquad (2)$$

Анализ показывает, что схемы компромиссов группируются у двух полюсов, отражающих различные принципы оптимальности: 1) эгалитарный — принцип равномерности и 2) утилитарный — принцип экономичности.

Принцип равномерности выражает стремление равномерно, т.е. в одинаковой мере снижать уровень всех относительных критериев при функционировании системы управления. Важной реализацией принципа равномерности служит чебышевская модель (1) — полярная схема этой группы. Схема требует минимизации худшего (наибольшего) из числа относительных критериев, сводя его к уровню остальных, т.е. выравнивая все частные критерии. К недостаткам эгалитарных схем равномерности следует отнести их неэкономичность. Обеспечение наиболее близкого относительно один другого уровня критериев часто достигается за счет значительного повышения их суммарного уровня. Кроме того, даже небольшое отступление от принципа равномерности позволяет существенно уменьшить один или несколько важных критериев.

Принцип экономичности, в основу которого положена возможность компенсации некоторого ухудшения качества по одним критериям определенным улучшением по другим, лишен этих недостатков. Полярная схема этой группы реализуется моделью интегральной оптимальности (2). Утилитарная схема обеспечивает минимальный суммарный уровень относительных критериев. Общим недостатком схем принципа экономичности является возможность резкой дифференциации уровня отдельных критериев.

Проведенный анализ свидетельствует о закономерности, в силу которой ЛПР варьирует свой выбор от модели интегральной оптимальности (2) в спокойных ситуациях до минимаксной модели (1) в напряженных ситуациях. В промежуточных случаях ЛПР выбирает схемы компромиссов, определяющие различные степени удовлетворения отдельных критериев в соответствии со своими индивидуальными предпочтениями, но сообразуясь с заданной ситуацией. Если принять заключение анализа за логическую основу для формализации выбора схемы компромиссов, то можно рекомендовать различные конструктивные концепции, одной из которых является концепция нелинейной схемы компромиссов.

## НЕЛИНЕЙНАЯ СХЕМА КОМПРОМИССОВ

Относительно системного подхода целесообразно задачу выбора схемы компромиссов заменить эквивалентной задачей синтеза некоторой единой скалярной свертки частных критериев, которая в различных ситуациях выражала бы разные принципы оптимальности. Отдельные модели схем компромиссов объединяются в единую целостную модель, структура которой адаптируется к ситуации принятия многокритериального решения. Требования к синтезируемой функции $Y(y_0)$:

— гладкость и дифференцируемость;

— в напряженных ситуациях выражает принцип минимакса;

— в спокойных условиях выражает принцип интегральной оптимальности;

— в промежуточных случаях приводит к парето-оптимальным решениям, определяющим различные меры частичного удовлетворения критериев.

Иными словами, такая универсальная свертка должна быть выражением схемы компромиссов, адаптирующейся к ситуации. Таким образом, адаптация и способность к адаптации — главная содержательная сущность исследования многокритериальных систем. Необходимо, чтобы в выражение для скалярной свертки в явном виде входили характеристики напряженности ситуации. Можно рассмотреть несколько функций, удовлетворяющих изложенным выше требованиям. Простейшей из них является скалярная свертка

$$Y(\alpha,\, y_0) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - y_{0k}(x)]^{-1};\; \alpha_k \ge 0,\, \sum_{k=1}^{s} \alpha_k = 1,$$

где $\alpha_k = \text{const}$ — формальные параметры, определенные на симплексе и имеющие двоякий физический смысл. С одной стороны, это коэффициенты, выражающие предпочтения ЛПР по отдельным критериям. С другой — это коэффициенты регрессии содержательной регрессионной модели, построенной на основе концепции нелинейной схемы компромиссов.

Таким образом, основной является нелинейная схема компромиссов, которой соответствует модель векторной оптимизации, в явном виде зависящая от характеристик напряженности ситуации:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k [1 - y_{0k}(x)]^{-1}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что если какой-либо относительный частный критерий, например $y_{0i}(x)$, начнет приближаться к своему пределу (единице), т.е. ситуация станет напряженной, то соответствующий член $Y_i = \alpha_i / [1 - y_{0i}(x)]$ в минимизируемой сумме возрастет настолько, что проблема минимизации всей суммы сведется к минимизации только данного наихудшего члена, т.е. критерия $y_{0i}(x)$. Это эквивалентно действию минимаксной модели (1). Если относительные частные критерии далеки от единицы, т.е. ситуация спокойная, то модель (3) действует эквивалентно модели интегральной оптимальности (2). В промежуточных ситуациях имеем различные степени частичного выравнивания критериев.

Следовательно, нелинейная схема компромиссов обладает свойством непрерывной адаптации к ситуации принятия многокритериального решения. Исходя из этого традиционные схемы компромиссов можно рассматривать как результат линеаризации нелинейной схемы в различных рабочих точках — ситуациях. Этим объясняется название предложенной нелинейной схемы компромиссов, так как в других отношениях она не в большей степени «нелинейна», чем другие схемы, рассматриваемые в теории принятия решений. Отметим, что адаптация нелинейной схемы к ситуации осуществляется непрерывно, в то время как традиционный выбор схемы компромиссов проводится дискретно, что к субъективным погрешностям добавляет ошибки, связанные с квантованием схем компромиссов.

Как отмечалось выше, выбор схемы компромиссов является прерогативой человека, отражением его субъективной функции полезности при решении конкретной многокритериальной задачи. Тем не менее нам удалось выявить некоторые закономерности и на этой объективной основе построить скалярную свертку критериев, вид которой вытекает из содержательных представлений о сути изучаемого явления. Феномен же индивидуальных предпочтений ЛПР формально представлен наличием вектора $\alpha$ в структуре содержательной модели (3).

Вопросы парето-оптимальности нелинейной схемы компромиссов и ее аксиоматики детально исследованы в [10, 13].

## УНИФИКАЦИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

Возможны различные оценки роли субъективных факторов в решении многокритериальных задач. Субъективность допустима и даже целесообразна, если такая задача решается в интересах конкретного человека. Поэтому механизм индивидуальных предпочтений часто применяется в практике решения многокритериальных задач. Однако субъективность в их решении допустима и желательна лишь в случае, когда результат предназначается для конкретных ЛПР или лиц со сходными предпочтениями. Если результат предназначен для общего использования, то он должен быть вполне объективным. Результат решения многокритериальной задачи, предназначенный для широкого использования, унифицируется и индивидуальные предпочтения нивелируются по статистике. Если априорные сведения о разноценности критериев отсутствуют, то принцип недостаточного основания Бернулли–Лапласа свидетельствует о том, что в выражении (3) все весовые коэффициенты следует принять равными между собой. Из нормировки на симплексе следует $\alpha_k \equiv 1/s \; \forall k \in [1, s]$. Тогда

$$Y(\alpha, y_0) = \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}[1 - y_{0k}(x)]^{-1}.$$

Учитывая, что умножение на $1/s$ является монотонным преобразованием, которое по теореме Гермейера не изменяет результатов сравнения, переходим к унифицированному (без весовых коэффициентов) выражению для скалярной свертки критериев

$$Y(y_0) = \sum_{k=1}^{s}[1 - y_{0k}(x)]^{-1}. \qquad (4)$$

Эту формулу целесообразно применять в случаях, когда многокритериальная задача решается не в интересах одного конкретного ЛПР, а для широкого использования.

Унифицированная скалярная свертка по нелинейной схеме имеет вид (4) или в эквивалентной форме

$$Y(y)=\sum_{k=1}^{s} A_k [A_k - y_k(x)]^{-1},$$

т.е. без предварительной нормализации частных критериев. Концепция нелинейной схемы компромиссов соответствует принципу «подальше от ограничений».

Для максимизируемых критериев унифицированная скалярная свертка имеет вид

$$Y(y)=\sum_{k=1}^{s} B_k [y_k(x)-B_k]^{-1},$$

где $B_k$ — минимально допустимые значения критериев, подлежащих максимизации.

### ДУАЛЬНЫЙ МЕТОД

Если многокритериальная задача решается в интересах конкретного ЛПР, то следует вначале получить унифицированное (базовое) решение и предъявить его конкретному лицу. И только в случае, если это решение его не удовлетворяет и требуется коррекция, необходимо перейти к определению весовых коэффициентов, отражающих его индивидуальные предпочтения. При этом процесс поиска начинается не от произвольной точки в критериальном пространстве, а от общего базового решения.

Практика решения многокритериальных задач показывает, что предположение о наличии в начальной стадии готовой и стабильной (даже в неявном виде) функции полезности у ЛПР не всегда имеет место. Решая многокритериальную задачу, ЛПР сравнивает совокупности конкретных значений критериев при различных альтернативах, делает пробные шаги (при этом может допускать ошибки) и осмысливает соотношение между своими потребностями и возможностями их удовлетворения заданным объектом в заданной ситуации. При противоречивых критериях это соотношение по своей природе компромиссно, однако осознанной априори схемы компромиссов у ЛПР нет или она имеется лишь в зарождающем состоянии. Обычно представление о схеме компромиссов, необходимое для решения задачи, возникает и постепенно совершенствуется лишь в результате попыток ЛПР улучшить многокритериальное решение в серии пробных шагов. Очевидно, что подразумевается наличие интерактивной компьютерной технологии, поскольку в действительности такая процедура невозможна.

Таким образом, человек, с одной стороны, адаптируется к решаемой многокритериальной задаче, осуществляя структуризацию предпочтений и совершенствуя свое представление о функции полезности, а с другой — последовательно находит серию оптимальных относительно текущей функции полезности решений. Взаимообусловленные процессы адаптации ЛПР к задаче и нахождение наилучшего результата представляют дуальный характер и принципиально входят в методику человеко-машинного решения многокритериальных задач.

Как отмечалось, в начальной стадии процесса решения у ЛПР практически отсутствует не только аналитическое описание функции полезности, но и полное априорное представление о ней. Поэтому интерактивная процедура должна быть организована как дуальная, а поисковый метод оптимизации должен допускать диалоговое программирование в порядковых шкалах и использовать минимальную информацию о функции полезности. Таким методом, основанным на сопоставлении предпочтений при специально рассчитываемых альтернативах, является порядковый аналог метода симплекс-планирования [10, 13].

Важный фактор, обусловливающий эффективность метода, заключается в том, что начальная точка поиска выбирается не как произвольная точка в паретовском множестве, а как аксиоматически обоснованное базовое решение, которое следует лишь скорректировать в соответствии с неформальными предпочтениями конкретного ЛПР. Процесс корректировки обеспечивает взаимную адаптацию: человек адаптируется к данной конкретной многокритериальной задаче, а модель нелинейной схемы компромиссов становится отражением индивидуальных предпочтений данного человека.

Фундаментальным отличием свертки по нелинейной схеме от других известных скалярных сверток является органическая связь с ситуацией принятия многокритериального решения. По сути, предложенная свертка представляет собой нелинейную функцию регрессии (линейную по параметрам), выбранную по физическим соображениям и поэтому эффективную. Коэффициенты $\alpha$ в выражении для нелинейной скалярной свертки представляют собой параметры нелинейной содержательной функции регрессии, поэтому, будучи найденными, они не изменяются от одной ситуации к другой, как в случае линейной и других известных сверток, не адаптирующихся к сиитуации.

Задача определения коэффициентов $\alpha$ в дуальной процедуре может рассматриваться как задача синтеза решающего правила, которое, будучи применяемо формально, отражает адекватным образом логику конкретного ЛПР в любой возможной ситуации. Такая задача возникает, например, когда многокритериальная система работает в режиме консультанта-оператора в условиях дефицита времени. Целесообразно, чтобы система в любой ситуации оперативно принимала такое же решение, как и данный оператор, у которого есть возможность проанализировать ситуацию. Аналогичные проблемы возникают и при разработке решающей системы интеллектуального робота, который должен так реализовать поставленные перед ним цели, как если бы выполнял задание обучивший его человек.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате системного подхода получена модель многокритериальной оптимизации, позволяющая объекту реализовать все поставленные цели во всем диапазоне возможных ситуаций. Системный подход к проблеме многокритериальной оптимизации позволил объединить модели отдельных схем компромиссов в единую целостную структуру, адаптирующуюся к ситуации принятия многокритериального решения. Преимуществом концепции нелинейной схемы компромиссов является возможность принятия многокритериального решения формально без непосредственного участия человека. При этом на единой идейной основе решаются как задачи, имеющие значение для общего использования, так и задачи, основной содержательной сущностью которых является удовлетворение индивидуальных предпочтений ЛПР. Аппарат нелинейной схемы компромиссов, разработанный как формализованный инструмент для исследования систем управления с противоречивыми критериями, позволяет практически решать многокритериальные задачи широкого класса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Глушков В.М. Системная оптимизация. *Кибернетика*. 1980. № 5. С. 89–90.
2. Глушков В.М., Михалевич В.С., Волкович В.Л., Доленко Г.А. К вопросу системной оптимизации в многокритериальных задачах линейного программирования. *Кибернетика*. 1982. № 3. С. 4–8.
3. Semenova N.V. Methods of searching for guaranteeing and optimistic solutions to integer optimization problems under uncertainty. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 1. P. 85–93.·

4. Антонов А.В. Системный анализ: учебник для вузов. Москва: Высш. шк., 2004. 454 с.
5. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. Москва: Радио и связь, 1989. 320 с.
6. Воронин А.Н. Вложенные скалярные свертки векторного критерия. *Проблемы управления и информатики*. 2003. № 5. С. 10–21.
7. Lebedeva T.T., Semenova N.V., Sergienko T.I. Qualitative characteristics of the stability vector discrete optimization problems with different optimality principles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 228–233.
8. Sergienko I.V., Lebedeva T.T., Semenova N.V. Existence of solutions in vector optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 823–828.
9. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. Москва: Наука, 1978. 352 с.
10. Воронин А.Н., Зиатдинов Ю.К., Куклинский М.В. Многокритериальные решения: Модели и методы. Киев: НАУ, 2010. 348 с.
11. Ларичев О.И. Наука и искусство принятия решений. Москва: Наука, 1979. 200 с.
12. Воронин А.Н. Нелинейная схема компромиссов в многокритериальных задачах оценивания и оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2009. № 4. С. 106–114.
13. Voronin A. Multi-criteria decision making for the management of complex systems. USA: IGI Global, 2017. 201 p.

*Надійшла до редакції 10.09.2019*

**А.М. Воронін, А.С. Савченко**

**БАГАТОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ: СИСТЕМНИЙ ПІДХІД**

**Анотація.** Запропоновано системний підхід до розв'язання задач багатокритерійної оптимізації. Такий підхід дозволив об'єднати моделі окремих схем компромісів в єдину цілісну структуру, яка адаптується до ситуації прийняття багатокритерійного рішення. Перевагою концепції нелінійної схеми компромісів є можливість прийняття багатокритерійного рішення формально без безпосередньої участі людини. Апарат нелінійної схеми компромісів, розроблений як формалізований інструмент для дослідження систем керування з суперечливими критеріями, дозволяє практично розв'язувати багатокритерійні задачі широкого класу.

**Ключові слова:** система, оптимізація, багатокритерійність, функція корисності, скалярна свертка, нелінійна схема компромісів.

**A.N. Voronin, A.S. Savchenko**

**A SYSTEMATIC APPROACH TO MULTIOBJECTIVE OPTIMIZATION**

**Abstract.** A systematic approach to solving multiobjective optimization problems is proposed. The system approach allows combining the models of individual schemes of compromises into an integrated structure that adapts to the situation of making multiobjective decisions. An advantage of the concept of non-linear scheme of compromises is the possibility of making a multiobjective decision formally, without a direct human participation. The apparatus of the non-linear scheme of compromises, developed as a formalized tool for the analysis of control systems with conflicting criteria, makes it possible to solve practically multicriteria problems of a broad class.

**Keywords:** system, optimization, multicriteria, utility function, scalar convolution, nonlinear scheme of compromises.

**Воронин Альберт Николаевич,**
доктор техн. наук, профессор Национального авиационного университета, Киев, e-mail: alnv@ukr.net.

**Савченко Алина Станиславовна,**
кандидат техн. наук, заведующая кафедрой Национального авиационного университета, Киев, e-mail: a.v.savchenko@ukr.net.