УДК 517.9

Л.А. ВЛАСЕНКО, А.Г. РУТКАС, В.В. СЕМЕНЕЦ, А.А. ЧИКРИЙ

О ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Аннотация. Установлены условия, при которых сложная дескрипторная система управления допускает разложение на более простые подсистемы. Состояние и выход системы описаны линейными уравнениями, не разрешенными относительно производной состояния. Рассмотрены два типа разложений регулярной системы — последовательная декомпозиция и параллельная декомпозиция. Условия для декомпозиции сформулированы в терминах существования инвариантных пар подпространств операторных пучков, состоящих из коэффициентов системы. Результаты проиллюстрированы на примере дескрипторной системы, которая описывает переходные процессы в радиотехническом фильтре. Осуществлена каскадно-параллельная декомпозиция фильтра четвертого порядка на простейшие фильтры первого порядка, содержащие по одному инерционному элементу.

Ключевые слова: дескрипторная система управления, характеристический пучок операторов, инвариантная пара подпространств, последовательная декомпозиция, параллельная декомпозиция, каскадно-параллельная декомпозиция радиотехнического фильтра.

Исследования настоящей работы относятся к системам, состояние и выход которых описываются уравнениями, не разрешенными относительно производной состояния. В теории управления такие системы принято называть дескрипторными. В разд. 1 изложены основные понятия и предположения. В разд. 2 и 3 установлены условия, при которых дескрипторная система допускает последовательную и параллельную декомпозиции на более простые подсистемы меньших размерностей. В разд. 4 показано, как эти результаты можно применить к изучению радиотехнических систем. Для этой цели была реализована каскадно-параллельная декомпозиция сложного четырехполюсного фильтра на простейшие четырехполюсники с одним инерционным элементом.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Методы исследования различных классов систем управления $\Phi = \Phi(u, x, \upsilon)$ со входом (управлением) $u(t)$, состоянием $x(t)$ и выходом $\upsilon(t)$ зависят от математической модели, описывающей связи между вектор-функциями $u(t), x(t), \upsilon(t)$. Мы рассматриваем линейную дескрипторную систему управления, которая описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d}{dt}(Ax) + Bx(t) = Fu(t), \ 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}(Mx) + Nx + Ku, \ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

для состояния и выхода соответственно, а также начальным состоянием

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

Здесь $A, B \in \mathbf{C}^{m\times m}$, $M, N \in \mathbf{C}^{p\times m}$, $F \in \mathbf{C}^{m\times n}$, $K \in \mathbf{C}^{p\times n}$, где символ $\mathbf{C}^{m\times n}$ обозначает множество $m\times n$ матриц с комплексными элементами. Эти матрицы следует понимать как матрицы линейных операторов $A, B : X \to Y$, $F : U \to Y$, $M, N : X \to V$, $K : U \to V$, действующих в конечномерных унитарных пространствах состояний X, образов Y, входов U и выходов V. Тогда $u(t) \in U$, $x(t) \in X$,

[1]Работа частично поддержана грантом № 2020.02/0121 Национального фонда исследований Украины.

$\upsilon(t) \in V$, $\dim X = \dim Y = m$, $\dim U = n$, $\dim V = p$. В примере из разд. 4 выбрано $X = Y = \mathbf{C}^m$, $U = \mathbf{C}^n$, $V = \mathbf{C}^p$ и матрицы операторов рассмотрены относительно канонических базисов этих пространств.

Система Ф (1)–(3) является дескрипторной вследствие возможной вырожденности матрицы или оператора A. Отдельные классы дескрипторных систем управления изучены в монографиях [1, 2]. Наличие производной состояния $\frac{d}{dt}(Mx)$ в уравнении выхода (2) объясняют примеры из [3] и разд. 4 настоящей статьи. Уравнение (1) и система Ф называются регулярными, если характеристический пучок матриц или операторов $\lambda A + B$ является регулярным (хотя бы для одной точки λ существует обратная матрица или оператор $(\lambda A + B)^{-1}$), вырожденными, если матрица или оператор A не обратимы, и явными, если $A = E$ [4]. Символ E обозначает единичный оператор или матрицу. Как и в [3, 5, 6], будем рассматривать регулярные дескрипторные системы управления. Решением уравнений (1), (2) называются функции $x(t) \in C([0, T], X)$, $\upsilon(t) \in C([0, T], V)$ такие, что $Ax(t) \in C^1([0, T], Y)$, $Mx(t) \in C^1([0, T], V)$ и при этом удовлетворяются соотношения (1), (2). Символы C и C^1 обозначают множества непрерывных и непрерывно дифференцируемых вектор-функций.

Класс допустимых входов $u(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 из [3], чтобы по выбранному допустимому входу и начальному состоянию x_0 однозначно определить состояние $x(t)$ как решение начальной задачи (1), (3). Допустимый вход также удовлетворяет дополнительному условию гладкости, чтобы обеспечить существование непрерывной производной $\frac{d}{dt}(Mx)$. Это условие гладкости легко усматривается из вида решения (11) в [3]. Тогда выход $\upsilon(t)$ (2) также однозначно определяется. Заметим, что теоремы 1, 2 из [3] сохраняются в случае комплексных пространств.

Если Λ — произвольный линейный оператор из Y в V, то функции $x(t)$, $\upsilon(t)$ есть решение уравнений (1), (2), если и только если они есть решение уравнения (1) и уравнения

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}(\widetilde{M}x) + \widetilde{N}x + \widetilde{K}u, \quad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$\widetilde{M} = \Lambda A + M : X \to V, \quad \widetilde{N} = \Lambda B + N : X \to V, \quad \widetilde{K} = K - \Lambda F : U \to V. \tag{5}$$

Это означает, что систему Ф также можно описать в эквивалентной форме (1), (4), (5), (3).

Различные свойства систем управления можно исследовать, предварительно осуществив ту или иную декомпозицию исходной системы [1–3, 5–9]. Мы изучаем два типа декомпозиций дескрипторных систем управления — последовательную и параллельную. Понятия последовательной и параллельной декомпозиций используются в теории автоматов в монографии [10]. Каждому типу отвечает соответствующее разложение передаточной функции [11]. Последовательной декомпозиции отвечает мультипликативное разложение передаточной функции, а параллельной — аддитивное. Частотная передаточная функция определяется как матрица-функция $w(\lambda)$, удовлетворяющая соотношению

$$\hat{\upsilon}(\lambda) = w(\lambda)\hat{u}(\lambda), \tag{6}$$

где $\hat{u}(\lambda)$, $\hat{\upsilon}(\lambda)$ — преобразования Лапласа входа $u(t)$ и выхода $\upsilon(t)$ с нулевым начальным условием $x_0 = 0$ в (3). Передаточная функция $w(\lambda)$ допускает следующее представление в любой регулярной точке λ характеристического пучка:

$$w(\lambda) = K + (\lambda M + N)(\lambda A + B)^{-1} F. \tag{7}$$

Будем использовать такие обозначения: Lin $\{\dots\}$ — линейная оболочка векторов, Ker K — ядро оператора K, Im K — образ оператора K, $X_1 \dotplus X_2$ — прямая сумма двух подпространств, $X_1 \oplus X_2$ — ортогональная сумма двух подпространств, 0 — нулевой оператор или матрица, $\{\vec{e}_k\}_{k=1}^{m}$ — канонический базис унитарного m-мерного пространства $\mathbf{C}^m$.

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Последовательная декомпозиция $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ системы Φ на две более простые регулярные подсистемы Φ_1 и Φ_2 изучена в работе [3]. Последовательная декомпозиция соответствует каскадному соединению четырехполюсников в теории цепей (например, раздел VI.2 в [12]). Пусть системы $\Phi_j(u_j, x_j, v_j)$, $j = 1, 2$, описываются соотношениями

$$\frac{d}{dt}(A_j x_j) + B_j x_j(t) = F_j u_j(t),$$
$$v_j(t) = \frac{d}{dt}(M_j x_j) + N_j x_j + K_j u_j, \; 0 \le t \le T, \; x_j(0) = x_{j0}, \tag{8}$$

с операторами $A_j, B_j : X_j \to Y_j$, $F_j : U_j \to Y_j$, M_j, $N_j : X_j \to V_j$, $K_j : U_j \to V_j$ в пространствах состояний X_j, образов Y_j, входов U_j и выходов V_j. Последовательная декомпозиция означает, что пространства состояний X и образов Y системы Φ являются прямыми суммами соответствующих пространств подсистем Φ_1, Φ_2, а именно,

$$X = X_1 \dotplus X_2, \; Y = Y_1 \dotplus Y_2; \tag{9}$$

пространства входов U, U_1, U_2 и выходов V, V_1, V_2 удовлетворяют равенствам

$$U = U_1, \; V = V_2, \; U_2 = V_1; \tag{10}$$

входы, состояния и выходы систем Φ, Φ_1, Φ_2 связаны соотношениями $u(t) = u_1(t)$, $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, $v(t) = v_2(t)$, $u_2(t) = v_1(t)$. Согласно прямым суммам (9) и равенствам (10) операторы A, B, F, M, N, K в (1), (2) представимы в блочной форме

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ -F_2 M_1 & A_2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ -F_2 N_1 & B_2 \end{bmatrix}, \; F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 K_1 \end{bmatrix},$$
$$M = [K_2 M_1 \;\; M_2], \; N = [K_2 N_1 \;\; N_2], \; K = K_2 K_1. \tag{11}$$

Если существует обратный оператор $K^{-1} : V \to U$, то пара подпространств X_2, Y_2 инвариантна относительно характеристического пучка $\lambda A + B$, а пара подпространств X_1, Y_1 инвариантна относительно возмущенного пучка $\lambda(A + FK^{-1}M) +$ $+ (B + FK^{-1}N)$ в смысле

$$AX_2 \subset Y_2, \; BX_2 \subset Y_2, \; (A + FK^{-1}M)X_1 \subset Y_1, \; (B + FK^{-1}N)X_1 \subset Y_1. \tag{12}$$

В теореме 2 из [3] приведены достаточные условия, при выполнении которых система управления Φ (1)–(3) допускает последовательную декомпозицию. Одно из этих условий состоит в том, что оператор $K : U \to V$ имеет обратный оператор $K^{-1} : V \to U$. Если это условие не выполняется, то в лемме, приведенной ниже, устанавливается переход от описания системы Φ в виде (1)–(3) к ее описанию в виде (1), (4), (5), (3) с обратимым оператором $\widetilde{K} : U \to V$.

Лемма 1. Предположим, что для системы Φ (1)–(3) выполнены следующие соотношения:

$$\dim U = \dim V, \; \text{Ker } F \cap \text{Ker } K = \{0\}. \tag{13}$$

Тогда существует линейный оператор $\Lambda : Y \to V$ такой, что система Φ допускает описание (1), (4), (3) с операторами $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{K}$ (5), причем оператор $\widetilde{K}$ имеет обратный $\widetilde{K}^{-1}: V \to U$.

Доказательство. Если оператор $K: U \to V$ имеет обратный оператор $K^{-1}: V \to U$, то выбираем $\Lambda = 0$ и лемма доказана. Иначе рассматриваем ортогональные разложения

$$U = \mathrm{Im}\, F^* \oplus \mathrm{Ker}\, F,\ Y = \mathrm{Im}\, F \oplus \mathrm{Ker}\, F^*,\ V = \mathrm{Im}\, K \oplus \mathrm{Ker}\, K^*,$$

относительно которых операторы $K: U \to V$, $\Lambda: Y \to V$, $F: U \to Y$ имеют структуру

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

причем существует обратный оператор $F_{11}^{-1}: \mathrm{Im}\, F \to \mathrm{Im}\, F^*$. В силу второго соотношения в (13) ядро оператора K_{12} тривиально: $\mathrm{Ker}\, K_{12} = \{0\}$. Используя этот факт, нетрудно проверить, что существуют операторы $\widetilde{K}_{11}: \mathrm{Im}\, F^* \to \mathrm{Im}\, K$ и $\widetilde{K}_{21}: \mathrm{Im}\, F^* \to \mathrm{Ker}\, K^*$ такие, что оператор

$$\widetilde{K} = \begin{bmatrix} \widetilde{K}_{11} & K_{12} \\ \widetilde{K}_{21} & 0 \end{bmatrix}: U \to V$$

имеет обратный $\widetilde{K}^{-1}: V \to U$. Оператор $\widetilde{K}$ допускает представление в виде (5), если блоки $\Lambda_{11}, \Lambda_{21}$ оператора Λ положить равными $\Lambda_{11} = (K_{11} - \widetilde{K}_{11}) F_{11}^{-1}$, $\Lambda_{21} = -\widetilde{K}_{21} F_{11}^{-1}$. На этом доказательство леммы завершается.

Из леммы 1 следует результат, обобщающий теорему 2 из [3].

Теорема 1. Пусть в регулярной системе Φ (1)–(3) либо оператор $K: U \to V$ имеет обратный оператор $K^{-1}: V \to U$, либо выполнены соотношения (13). Система Φ (1), (4), (3) с обратимым оператором $\widetilde{K}$ в (5) допускает последовательную декомпозицию $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ на регулярные подсистемы Φ_1, Φ_2 с $\dim U_1 = \dim V_1$, если и только если существуют прямые разложения вида (9) такие, что $\dim X_2 = \dim Y_2$, подпространства X_2, Y_2 инвариантны относительно характеристического пучка $\lambda A + B$, подпространства X_1, Y_1 инвариантны относительно возмущенного пучка $\lambda(A + F\widetilde{K}^{-1}\widetilde{M}) + (B + F\widetilde{K}^{-1}\widetilde{N})$. Передаточная оператор-функция $w(\lambda)$ системы Φ допускает мультипликативное представление через передаточные оператор-функции $w_j(\lambda)$ систем Φ_j (8): $w(\lambda) = w_2(\lambda) w_1(\lambda)$.

Замечание 1. Из доказательства достаточности теоремы 2 из [3] следует, что в искомой декомпозиции $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ системы Φ на подсистемы Φ_1, Φ_2 можно выбрать

$$V_1 = U_2 = V_2 = V,\ U_1 = U,\ K_1 = \widetilde{K},\ K_2 = E. \tag{14}$$

3. ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Для системы управления, которая возникает при описании переходных режимов параллельно соединенных четырехполюсников (раздел VI.2 в [12]), можно ввести понятие параллельной декомпозиции, отличающееся от понятия последовательной декомпозиции.

Система $\Phi(u, x, v)$ (1)–(3) допускает параллельную декомпозицию $\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2$ на регулярные подсистемы $\Phi_j(u_j, x_j, v_j)$ (8) (рис. 1), если выполнены соотношения (9) и равенства

$$U = U_1 = U_2,\ V = V_1 = V_2; \tag{15}$$

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t),\ x(t) = x_1(t) + x_2(t),\ v(t) = v_1(t) + v_2(t). \tag{16}$$

Нетрудно показать, используя равенства (15) и (16), что согласно прямым суммам (9) операторы A, B, F, M, N, K представимы в виде

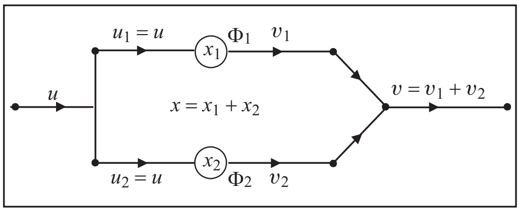

Рис. 1. Схема параллельной декомпозиции

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$
$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix},$$
$$M = [M_1 \ \ M_2], \ N = [N_1 \ \ N_2], \ K = K_1 + K_2. \tag{17}$$

Следовательно, прямые разложения (9) приводят пучок операторов $\lambda A + B$ в смысле

$$AX_j \subset Y_j, \ BX_j \subset Y_j, \ j = 1, 2. \tag{18}$$

Теорема 2. Пусть в регулярной системе Φ (1)–(3) пространства состояний X и образов Y допускают прямые разложения (9), приводящие пучок $\lambda A + B$ в смысле (18). Тогда для любых линейных операторов $K_1, K_2 : U \to V$ таких, что $K = K_1 + K_2$, существуют регулярные системы $\Phi_j(u_j, x_j, v_j)$ вида (8), на которые система Φ допускает параллельную декомпозицию $\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2$. Передаточная функция $w(\lambda)$ системы Φ допускает аддитивное представление $w(\lambda) = w_1(\lambda) + w_2(\lambda)$ через передаточные функции $w_j(\lambda)$ систем Φ_j.

Доказательство. В искомой декомпозиции $\Phi = \Phi_1 \oplus \Phi_2$ системы Φ_1, Φ_2 строятся следующим образом. Выберем пространства входов $U_1 = U_2 = U$ и выходов $V_1 = V_2 = V$. Относительно разложений (9) с использованием (18) представим операторы A, B, F, M, N в виде (17). Операторы A_j, B_j, F_j, M_j, N_j в (8) положим равными соответствующим блокам операторов в (17). Операторы K_j заданы в условии теоремы. Из регулярности пучка $\lambda A + B$ и системы Φ следует регулярность пучков $\lambda A_j + B_j$ и систем Φ_j. Выберем входы $u_j(t) = u(t)$. Начальные состояния x_{j0} положим равными проекциям начального состояния x_0 на подпространства X_j в (9). Тогда справедливы равенства (16). Аддитивное представление передаточной функции $w(\lambda)$ следует из (17).

Теорема доказана.

4. ДЕКОМПОЗИЦИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Применим полученные результаты к системе, возникающей при описании переходных режимов четырехполюсника, схема которого изображена на рис. 2.

Токи и напряжения удовлетворяют уравнениям Кирхгофа

$$\begin{gathered} I_C + I_{L_1} + I_L + I_g = I^-, \ I_C + I_g + I_L - I_{C_1} - I_{g_1} = I^+, \\ U_{L_1} + U_{r_1} = U^-, \ U_L + U_r = U_C, \ U_{L_1} + U_{r_1} = U_C + U_{C_1}, \ U^+ = U_{C_1}. \end{gathered} \tag{19}$$

Учитывая уравнения колебаний и алгебраические уравнения

$$\begin{gathered} U_L = \frac{d}{dt}(LI_L), \ U_{L_1} = \frac{d}{dt}(L_1 I_{L_1}), \ I_C = \frac{d}{dt}(CU_C), \ I_{C_1} = \frac{d}{dt}(C_1 U_{C_1}), \\ U_r = rI_L, U_{r_1} = r_1 I_{L_1}, \ I_g = gU_C, \ I_{g_1} = g_1 U_{C_1}, \end{gathered} \tag{20}$$

уравнения (19) перепишем в виде

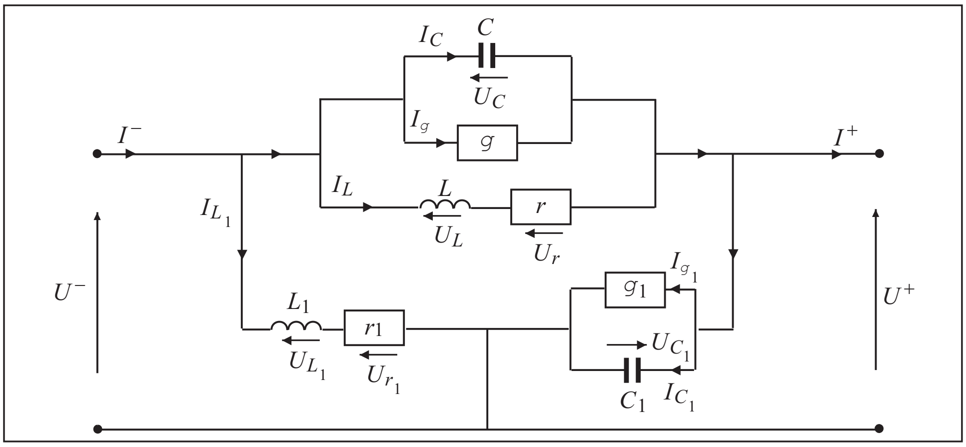

Рис. 2. Схема четырехполюсного фильтра

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(L_1 I_{L_1}) + r_1 I_{L_1} = U^-, \ \frac{d}{dt}(L I_L) + r I_L - U_C = 0, \\
\frac{d}{dt}(C U_C) + I_{L_1} + I_L + g U_C = I^-, \ U_C + U_{C_1} = U^-, \\
U^+ = U_{C_1}, \ I^+ = \frac{d}{dt}(C U_C - C_1 U_{C_1}) + I_L + g U_C - g_1 U_{C_1}.
\end{gathered} \tag{21}
$$

Здесь $L, L_1, C, C_1, r, r_1, g, g_1$ — положительные параметры.

С фильтром связываем систему управления $\Phi(u, x, v)$ с входом $u = (U^- I^-)^{\mathrm{T}}$, состоянием $x = (I_{L_1} I_L U_C U_{C_1})^{\mathrm{T}}$, выходом $v = (U^+ I^+)^{\mathrm{T}}$ и пространствами $X = Y = \mathbf{C}^4$, $U = V = \mathbf{C}^2$. Система описывается соотношениями (21), которые принимают вид (1), (2) в обозначениях

$$
A = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & -1 & 0 \\ 1 & 1 & g & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}
$$

$$
M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -C_1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & g & -g_1 \end{pmatrix}, \ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}
$$

Очевидно, Φ есть дескрипторная вырожденная регулярная система. Согласно теореме 1 из [3] состояние системы Φ, т.е. энергетические переменные $I_{L_1}(t)$, $I_L(t), U_C(t)$, $U_{C_1}(t)$, определяются однозначно по известным входным функциям $U^-(t)$ и $I^-(t)$, а также согласованными с ними начальными значениями $I_{L_1}(0), I_L(0)$, $U_C(0), U_{C_1}(0)$. Остальные токи и напряжения фильтра вычисляются непосредственно по формулам (19) и (20).

Для декомпозиции радиотехнической системы Φ воспользуемся теоремой 1. Так как в описании системы (1)–(3) с матрицами (22), (23) матрица K является вырожденной, то осуществим переход к описанию системы Φ в виде (1), (4), (3) с матрицами $\widetilde{M}$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{K}$ (5), где $\widetilde{K}$ — обратимая матрица. В доказательстве леммы 1 указан алгоритм нахождения оператора $\Lambda: \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^2$ или соответствующей ему матрицы Λ (в канонических базисах), с помощью которых реализуется этот переход. Имеем

$$
\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -g_1 \end{pmatrix}, \ \widetilde{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}
$$

Нетрудно видеть, что ортогональные разложения

$$X = Y = \mathbf{C}^4 = X_1 \oplus X_2 = Y_1 \oplus Y_2,$$
$$X_1 = Y_1 = \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\},\ \ X_2 = Y_2 = \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_4\} \tag{25}$$

являются разложениями типа (9), относительно которых условия теоремы 1 выполнены.

Опишем подсистемы Φ_1, Φ_2 (8) в декомпозиции $\Phi = \Phi_1 \otimes \Phi_2$. Система Φ_2 имеет одномерные пространства состояний и образов $X_2 = Y_2$ в (25), а система Φ_1 — трехмерные пространства состояний и образов $X_1 = Y_1$ в (25). В силу (14) пространства входов и выходов этих систем совпадают: $U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = U = V = \mathbf{C}^2$ и $K_1 = K_2 = \widetilde{K} = E$. Операторные коэффициенты A_j, B_j, F_j, M_j, N_j систем Φ_j (8) определяем с помощью соответствующих блоков операторов (11). В канонических базисах подпространств X_j, Y_j и пространств U_j, V_j запишем соответствующие им матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r & -1 \\ 1 & 1 & g \end{pmatrix},\ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = 0,\ B_2 = 1,\ F_2 = (1\ \ 0),\ M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -C_1 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -g_1 \end{pmatrix}.$$

Система управления Φ_1 в свою очередь также допускает последовательную декомпозицию согласно теореме 1. Действительно, справедливы ортогональные разложения

$$X_1 = Y_1 = X_{11} \oplus X_{12} = Y_{11} \oplus Y_{12},$$
$$X_{11} = Y_{11} = \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_1\},\ \ X_{12} = Y_{12} = \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$

Характеристический пучок операторов $\lambda A_1 + B_1 : X_1 \to X_1$ обладает двумерным инвариантным подпространством $X_{12} : A_1 X_{12} \subset X_{12}$, $B_1 X_{12} \subset X_{12}$. Возмущенный пучок операторов $\lambda(A_1 + F_1 M_1) + (B_1 + F_1 N_1) : X_1 \to X_1$ обладает одномерным инвариантным подпространством $X_{11} : (A_1 + F_1 M_1) X_{11} \subset X_{11}$, $(B_1 + F_1 N_1) X_{11} \subset \subset X_{11}$. Следовательно, условия теоремы 1 выполнены для системы Φ_1 и система допускает последовательную декомпозицию $\Phi_1 = \Phi_{11} \otimes \Phi_{12}$. Здесь $U_{1j} = V_{1j} = \mathbf{C}^2$ и $K_{11} = K_{12} = \widetilde{K} = E$. Матричные коэффициенты (в канонических базисах), которым соответствуют операторы систем Φ_{1j} в пространствах $X_{1j}, Y_{1j}, U_{1j}, V_{1j}$, имеют следующий вид:

$$A_{11} = L_1,\ B_{11} = r_1,\ F_{11} = (1\ \ 0),\ M_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ N_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},\ B_{12} = \begin{pmatrix} r & -1 \\ 1 & g \end{pmatrix},\ F_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ N_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходная четырехмерная система управления Φ (1), (4), (3) с коэффициентами (22), (24) допускает последовательную декомпозицию в цепочку трех систем

$$\Phi = \Phi_{11} \otimes \Phi_{12} \otimes \Phi_2 \tag{26}$$

с состояниями $x_{11}(t) = I_{L_1}(t)\vec{e}_1$, $x_{12}(t) = I_L(t)\vec{e}_2 + U_C(t)\vec{e}_3$, $x_2(t) = U_{C_1}(t)\vec{e}_4$. Нетрудно видеть, что одномерные системы Φ_{11}, Φ_2 описывают два четырехполюсника, которые содержат лишь по одному инерционному элементу L_1, C_1 соответственно (рис. 3). Можно показать, что последовательная декомпозиция двумерной системы Φ_{12} согласно теореме 1 приводит к цепочке двух последовательно соединенных одномерных систем, которые описывают два четырехполюсника. Однако, хотя бы один из этих четырехполюсников не является пассивной цепью, так как его параметры не являются положительными.

Также не представляется возможным с помощью теоремы 2 осуществить параллельную декомпозицию передающей системы Φ_{12}. Для передающей системы первые компоненты векторов входа и выхода являются напряжениями, а вторые компоненты — токами. В то же время хорошо известно, что результат параллельного соединения четырехполюсников дает адмитансную систему, у которой входы — напряжения, а выходы — токи [12]. Не меняя состояние $\bar{x} = x_{12}$ системы $\Phi_{12}(u_{12}, x_{12}, v_{12})$ и осуществляя преобразования ее входа u_{12} и выхода v_{12} по формулам $\bar{u} = P_1 u_{12} + P_2 v_{12}$, $\bar{v} = P_3 u_{12} + P_4 v_{12}$, где

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

мы переходим к адмитансной системе $\Psi(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$, которая описывается соотношениями, подобными (1)–(3) с матрицами

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\; \bar{B} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; \bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\; \bar{M} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & -C \end{pmatrix},$$

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 1 & g \\ -1 & -g \end{pmatrix},\; \bar{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Справедливо и обратное: преобразования

$$u_{12} = P_1 \bar{u} + P_2 \bar{v},\; v_{12} = P_3 \bar{u} + P_4 \bar{v} \tag{27}$$

входа $\bar{u}$ и выхода $\bar{v}$ адмитансной системы $\Psi(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$ с сохранением ее состояния $x_{12} = \bar{x}$ возвращают нас к передающей системе $\Phi_{12}(u_{12}, x_{12}, v_{12})$. Заметим, что структуры четырехполюсников, описываемых системами $\Phi_{12}(u_{12}, x_{12}, v_{12})$ и $\Psi(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$, совпадают.

Теперь с помощью теоремы 2 осуществим параллельную декомпозицию адмитансной системы $\Psi(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$. Относительно разложений $X_{12} = Y_{12} = \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_2\} \oplus$ $\oplus\, \mathrm{Lin}\,\{\vec{e}_3\}$ типа (9) со свойствами (18) система Ψ допускает параллельную декомпозицию $\Psi = \Psi_1 \oplus \Psi_2$ на одномерные подсистемы с матричными коэффициентами

$$\bar{A}_1 = L,\; \bar{B}_1 = r,\; \bar{F}_1 = (1\;\; -1),\; \bar{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; \bar{N}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\; \bar{A}_2 = 0,\; \bar{B}_2 = 1,$$

$$\bar{F}_2 = (1\;\; -1),\; \bar{M}_2 = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix},\; \bar{N}_2 = \begin{pmatrix} g \\ -g \end{pmatrix},\; \bar{K}_1 = \bar{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Одномерные системы Ψ_1, Ψ_2 описывают два параллельно соединенных четырехполюсника, которые содержат только по одному инерционному элементу L, C (см. рис. 3). В результате исходный четырехполюсный фильтр (см. рис. 2) допускает каскадно-параллельную декомпозицию на простейшие четырехполюсники, которые содержат лишь по одному инерционному элементу $L_1, L, C,\; C_1$ (см. рис. 3).

Последовательной декомпозиции (26) соответствует мультипликативное разложение $w(\lambda) = w_2(\lambda) w_{12}(\lambda) w_{11}(\lambda)$ передаточной функции $w(\lambda)$ системы Φ через передаточные функции $w_{11}(\lambda), w_{12}(\lambda), w_2(\lambda)$ подсистем Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_2. С использованием определения передаточной функции по формуле (6), а также с учетом представления (27) получаем выражение

$$w_{12}(\lambda) = (P_3 + P_4 \bar{w}(\lambda))(P_1 + P_2 \bar{w}(\lambda))^{-1}$$

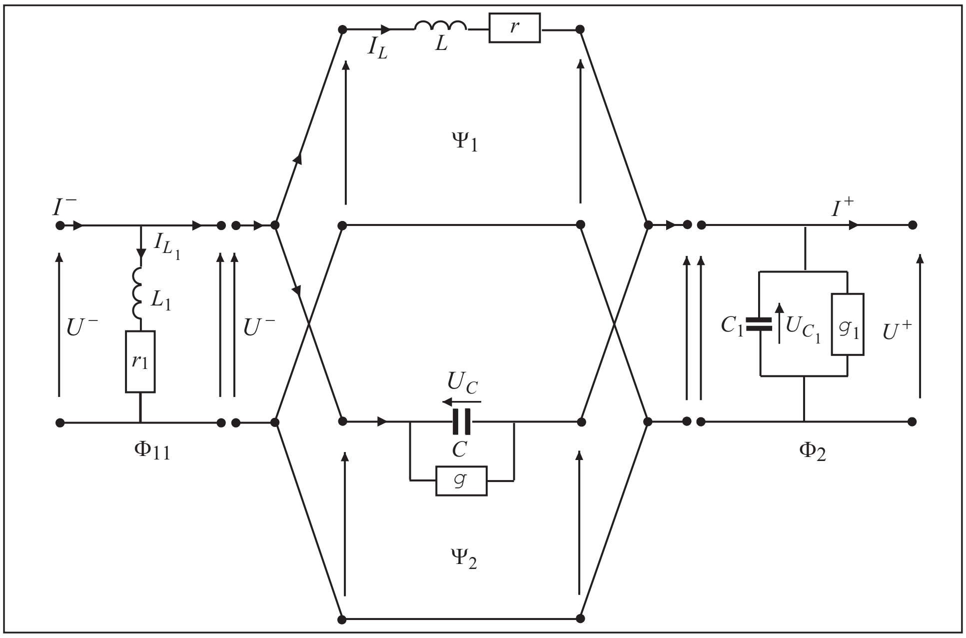

Рис. 3. Схема каскадно-параллельной декомпозиции четырехполюсного фильтра

для передаточной функции $w_{12}(\lambda)$ системы Φ_{12} через передаточную функцию $\overline{w}(\lambda)$ системы Ψ. В силу теоремы 2 из параллельной декомпозиции $\Psi = \Psi_1 \oplus \Psi_2$ следует аддитивное разложение $\overline{w}(\lambda) = \overline{w}_1(\lambda) + \overline{w}_2(\lambda)$ передаточной функции $\overline{w}(\lambda)$ через передаточные функции $\overline{w}_1(\lambda)$, $\overline{w}_2(\lambda)$ систем Ψ_1, Ψ_2. Тогда

$$w(\lambda) = w_2(\lambda)[P_3 + P_4(\overline{w}_1(\lambda) + \overline{w}_2(\lambda))][P_1 + P_2(\overline{w}_1(\lambda) + \overline{w}_2(\lambda))]^{-1} w_{11}(\lambda).$$

Представление для частотной передаточной функции по формуле (7) позволяет найти

$$w_{11}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda L_1 + r_1)^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \; w_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\lambda C_1 + g) & 1 \end{pmatrix},$$

$$\overline{w}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda L + r} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \; \overline{w}_2(\lambda) = (\lambda C_1 + g) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Включение отрезков длинных линий в радиотехнические схемы с сосредоточенными элементами приводит к дескрипторным системам с запаздыванием [13, 14]. Предложенные в данной работе способы декомпозиции также могут быть использованы при решении задач оптимального управления и дифференциальных игр для динамических систем, в которых учитывается эффект запаздывания [15–17], импульсные воздействия [18–20] или стохастические возмущения [21–23]. В случае исследования бесконечномерных систем, не разрешенных относительно производной, например [24–26], целесообразно использовать конечномерные аппроксимации дескрипторными системами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chen B.M., Lin Z., Shamash Y. Linear systems theory: A structural decomposition approach. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 2004. 421 p.
2. Duan G.R. Analysis and design of descriptor linear systems. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer, 2010. 494 p.

3. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 9. P. 60–75. http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50.
4. Rutkas A.G. Spectral methods for studying degenerate differential-operator equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2007. Vol. 144, Iss. 4. P. 4246–4263. http://doi.org/10.1007/s10958-007-0267-2.
5. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 5. P. 1–15. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10.
6. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Stochastic optimal control of a descriptor system. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 2. P. 204–212. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00236-7.
7. Черноусько Ф.Л. Декомпозиция и синтез управления в нелинейных динамических системах. *Труды Математического института РАН*. 1995. Т. 211. С. 457–472.
8. Curtain R.F., Zwart H. An introduction to infinite-dimensional linear systems theory. New York: Springer-Verlag, 1995. 713 p.
9. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Декомпозиция систем и терминальное управление. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2017. № 6 (75). С. 103–125. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-6-103-125.
10. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Москва: Мир, 1971. 400 с.
11. Helton J.W., Ball J.A. The cascade decompositions of a given system vs the linear fractional decompositions of its transfer function. *Integral Equations and Operator Theory*. 1982. Vol. 5, Iss. 1. P. 341–385. https://doi.org/10.1007/BF01694044.
12. Гиллемин Е.А. Синтез пассивных цепей. Москва: Связь, 1970. 720 с.
13. Vlasenko L.A. Existence and uniqueness theorems for an implicit delay differential equation. *Differential Equations*. 2000. Vol. 36, Iss. 5. P. 689–694. http://doi.org/10.1007/BF02754227.
14. Vlasenko L. Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2000. Vol. 23, Iss. 10. P. 937–948. https://doi.org/10.1002/1099-1476(20000710)23:10<937::AID-MMA144>3.0.CO;2-B.
15. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 2. P. 233–245. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x.
16. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Optimal control of a class of random distributed Sobolev type systems with aftereffect. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2013. Vol. 45, Iss. 9. P. 65–76. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v45.i9.60.
17. Chikrii, A.A., Chikrii, G.Ts. Game problems of approach for quasilinear systems of general form. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*. 2019. Vol. 304, Iss. 1 Supplement. P. S44–S58. https://doi.org/10.1134/S0081543819020068.
18. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Advances in Dynamic Game Theory. Annals of the International Society of Dynamic Games*. Boston: Birkhäuser, 2007. Vol. 9. P. 37–55. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4553-3_2.
19. Vlasenko L.A., Myshkis A.D., Rutkas A.G. On a class of differential equations of parabolic type with impulsive action. *Differential Equations.* 2008. Vol. 44, Iss. 2. P. 231–240. https://doi.org/10.1134/S0012266108020110.
20. Nakonechnyi A.G., Kapustyan E.A., Chikrii A.A. Control of impulse systems in conflict situation. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 9. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i9.10.
21. Dziubenko K.G., Chikrii A.A. An approach problem for a discrete system with random perturbations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2010. Vol. 46, N 2. P. 271–281. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9204-3.
22. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. Stochastic impulse control of parabolic systems of Sobolev type. *Differential Equations*. 2011. Vol. 47, Iss. 10. P. 1498–1507. http://doi.org/10.1134/S0012266111100132.
23. Власенко Л.А., Руткас А.Г., Чикрий А.А. О дифференциальной игре в стохастической системе. *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 2019. Т. 25, № 3. С. 45–61. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-3-45-61.
24. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations.* 2015. Vol. 51, Iss. 6. P. 798–807. https://doi.org/10.1134/S0012266115060117.

25. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. On a differential game in a system with distributed parameters. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. Vol. 292, Iss. 1 Supplement. P. 276–285. https://doi.org/10.1134/S0081543816020243.

26. Rutkas A., Vlasenko L. On a differential game in a nondamped distributed system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2019. Vol. 42, Iss. 18. P. 6155–6164. https://doi.org/10.1002/mma.5712.

Надійшла до редакції 19.05.2020

Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець, А.О. Чикрій

ПРО ДЕКОМПОЗИЦІЮ ДЕСКРИПТОРНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Анотація. Встановлено умови, за яких складна дескрипторна система керування допускає розклад на більш прості підсистеми. Стан та вихід системи описано лінійними рівняннями, що є не розв'язаними відносно похідної стану. Розглянуто два типи розкладів регулярної системи — послідовна декомпозиція та паралельна декомпозиція. Умови для декомпозиції сформульовано у термінах інваріантних пар підпросторів операторних жмутків, що складаються із коефіцієнтів системи. Результати проілюстровано прикладом дескрипторної системи, що описує перехідні процеси у радіотехнічному фільтрі. Здійснено каскадно-паралельну декомпозицію фільтра четвертого порядку на найпростіші фільтри першого порядку, що містять по одному інерційному елементу.

Ключові слова: дескрипторна система керування, характеристичний жмуток операторів, інваріантна пара підпросторів, послідовна декомпозиція, паралельна декомпозиція, каскадно-паралельна декомпозиція радіотехнічного фільтра.

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.A. Chikrii

ON THE DECOMPOSITION OF DESCRIPTOR CONTROL SYSTEMS

Abstract. We establish the conditions to decompose a complicated descriptor control system into simpler subsystems. The system state and input are described by equations not solved with respect to the derivative of the state. We consider two types of decompositions: sequential and parallel decompositions. The decomposition conditions are formulated in terms of the existence of invariant pairs of subspaces for operator pencils consisting of system coefficients. The results are illustrated on an example of a descriptor system that describes transient states in a radio-engineering filter. We carry out the cascade parallel decomposition of forth-order filter into the simplest first-order filters, each containing one inertial element.

Keywords: descriptor control system, characteristic operator pencil, sequential decomposition, parallel decomposition, cascade-parallel decomposition of radio-engineering filter.

Власенко Лариса Андреевна,
доктор техн. наук, профессор, профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: lara@rutrus.com.

Руткас Анатолий Георгиевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: anatoly@rutrus.com.

Семенец Валерий Васильевич,
доктор техн. наук, профессор, ректор Харьковского национального университета радиоэлектроники, e-mail: valery.semenets@nure.ua.

Чикрий Аркадий Алексеевич,
акад. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: chik@insyg.kiev.ua.