УДК 517.988

Я.И. ВЕДЕЛЬ, С.В. ДЕНИСОВ, В.В. СЕМЕНОВ

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВАРИАЦИОННОГО НЕРАВЕНСТВА НА МНОЖЕСТВЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСИИ

Аннотация. Рассмотрены двухуровневые задачи: вариационные неравенства на множестве решений задач о равновесии. Примером таких задач является поиск нормального равновесия Нэша. Для их решения предложен итерационный алгоритм, сочетающий в себе идеи двухэтапного проксимального метода, адаптивности и итеративной регуляризации. В отличие от применяемых ранее правил выбора величины шага в предлагаемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках, не требуются знания информации о липшицевых константах бифункции, константах липшицевости и сильной монотонности оператора. Для монотонных бифункций липшицевого типа и сильно монотонных липшицевых операторов доказана теорема о сильной сходимости алгоритма. Показано, что предложенный алгоритм применим к монотонным двухуровневым вариационным неравенствам в гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: двухуровневая задача, вариационное неравенство, задача о равновесии, двухэтапный проксимальный метод, адаптивность, итеративная регуляризация, сильная сходимость.

ВВЕДЕНИЕ

В оптимизации и теории некорректных задач используется следующий прием решения задач с неединственным решением [1–4]. Задаче ставится в соответствие семейство возмущенных задач, однозначно и корректно разрешимых. Частное решение исходной задачи получают как предел решений возмущенных задач при уменьшении возмущений. Найденные таким образом частные решения удовлетворяют определенным дополнительным условиям, например минимальность нормы нормального решения оптимизационной задачи, полученного методом регуляризации Тихонова. Кроме того, в исследовании операций возникают задачи оптимизации по последовательно заданным критериям (лексикографическая, последовательная или многоэтапная оптимизация) [5]. Двухуровневые вариационные неравенства возникли как естественное обобщение задач лексикографической оптимизации с двумя критериями, а также при анализе обычных оптимизационных задач с ограничениями в форме вариационного неравенства. Как самостоятельный математический объект двухуровневые вариационные неравенства вначале рассматривались в [6]. Разрешимости более общих n-уровневых вариационных неравенств посвящены работы [7, 8]. В настоящее время известны приближенные методы одноэтапного решения всех этих задач, идейно близкие методам штрафа и регуляризации [9–14].

Одним из популярных направлений современного прикладного нелинейного анализа является исследование задач о равновесии [15–21], к которым можно свести проблемы математического программирования, вариационные неравенства и многие игровые задачи.

В данной статье рассматривается двухуровневая задача: вариационное неравенство на множестве решений задачи о равновесии. Подобная задача рассматривалась в работе [22], где предложен сильно сходящейся алгоритм с использованием операции вычисления значения резольвенты бифункции. Последнее существенно увеличивало трудоемкость алгоритма. Ниже для решения данной задачи будет предложен адаптивный вариант ранее изученного алгоритма [23], основанного на двухэтапном проксимальном методе [21] и идее итеративной регуляризации [1, 24]. В предлагаемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках, не требуются знания информации о липшицевых константах бифункции, константах липшицевости и сильной монотонности оператора. Для монотонных бифункций липшицевого типа и сильно монотонных липшицевых операторов доказана теорема о сильной сходимости алгоритма.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Всюду далее H — действительное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и порожденной нормой $\|\cdot\|$. Для оператора $A: H \to H$, множества $M \subseteq H$ и бифункции $F: H \times H \to \mathbb{R}$ обозначим $VI(A, M)$ и $EP(F, M)$ множества $\{x \in M: (Ax, y-x) \geq 0 \;\; \forall y \in M\}$ и $\{x \in M: F(x, y) \geq 0 \;\; \forall y \in M\}$ соответственно.

Для выпуклого замкнутого множества $C \subseteq H$ рассмотрим двухуровневую задачу:

$$\text{найти } x \in VI(A, EP(F, C)). \tag{1}$$

Предположим выполненными следующие условия:

(A1) $F(x, x) = 0$ для всех $x \in C$;

(A2) $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$ для всех $x, \; y \in C$ (монотонность);

(A3) для всех $x \in C$ функция $F(x, \cdot)$ полунепрерывна снизу и выпукла на C;

(A4) для всех $y \in C$ функция $F(\cdot, y)$ слабо полунепрерывна сверху на C;

(A5) для всех $x, \; y, \; z \in C$ имеет место

$$F(x, y) \leq F(x, z) + F(z, y) + a\|x-z\|^2 + b\|z-y\|^2,$$

где $a, \; b$ — положительные константы (липшицевость);

(A6) $EP(F, C) \neq \varnothing$;

(A7) $A: C \to H$ — μ-сильно монотонный и L-липшицевый оператор.

При данных условиях множество $EP(F, C)$ является выпуклым и замкнутым [15, 18], а задача (1) имеет единственное решение $\bar{x} \in H$ [25].

Замечание 1. Условие (A5) типа липшицевости введено G. Mastroeni в [17]. Например, бифункция $F(x, y) = (Ax, y-x)$ с липшицевым оператором $A: C \to H$ удовлетворяет (A5) при $a = L\varepsilon / 2$, $b = L / 2\varepsilon$, где $L > 0$ — константа Липшица оператора A, $\varepsilon > 0$.

Замечание 2. Наиболее известным частным случаем (1) является задача поиска нормального решения вариационного неравенства (при $Ax = x$, $F(x, y) = (Bx, y-x)$, где $B: C \to H$):

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 \to \min, \;\; x \in C: \;\; (Bx, y-x) \geq 0 \;\; \forall y \in C.$$

Отметим следующее важное понятие. Пусть $g: H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — собственная выпуклая полунепрерывная снизу функция. Проксимальным оператором [26], ассоциированным с функцией g, называют оператор $H \ni x \mapsto \operatorname{prox}_g x = \operatorname{arg\,min}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2}\|y-x\|^2 \right)$. Оператор является твердо нерастягивающим (firmly nonexpansive) и $g(y) - g(z) + (z-x, y-z) \geq 0$ для всех $y \in \operatorname{dom} g$ тогда и только тогда, когда $z = \operatorname{prox}_g x$. Исходя из этого имеем следующий критерий оптимальности [26]: $x \in \operatorname{arg\,min} g$ тогда и только тогда, когда $x = \operatorname{prox}_g x$.

Ниже предложен сильно сходящийся алгоритм решения задачи (1), не требующий знания констант из условий (A5), (A7). Но вначале аппроксимируем задачу (1) одноуровневой и более регулярной задачей о равновесии.

АППРОКСИМАЦИЯ ТИХОНОВА–БРАУДЕРА

Рассмотрим вспомогательную задачу о равновесии, зависящую от параметра $\varepsilon > 0$:

$$\text{найти } x \in C\colon\ F(x, y) + \varepsilon (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{2}$$

Следуя А.Б. Бакушинскому [1], назовем задачу (2) аппроксимацией Тихонова–Браудера двухуровневой задачи (1).

Замечание 3. Для решения некорректных экстремальных задач подобная аппроксимация была предложена А.Н. Тихоновым при построении регуляризующих алгоритмов. Позднее F. Browder [2, 3] применял подобную схему.

Из результатов работы [18] следует существование и единственность решения $x_\varepsilon \in C$ задачи (2) для любого $\varepsilon > 0$. Элементы $x_\varepsilon \in C$ имеют несколько важных свойств.

Лемма 1 [23]. Справедливы следующие неравенства:

1) $\| x_\varepsilon \| \leq \mu^{-1} (1 + L\mu^{-1}) \| A\bar{x} \|$ для всех $\varepsilon > 0$;

2) $\| x_\varepsilon - x_\delta \| \leq |\varepsilon - \delta| \varepsilon^{-1} \mu^{-1} (1 + L\mu^{-1}) \| A\bar{x} \|$ для всех $\varepsilon,\ \delta > 0$.

При стремлении малого положительного параметра ε к нулю элементы x_ε сильно сходятся к решению задачи (1).

Лемма 2 [23]. Пусть выполняются условия (A1)–(A4) и (A6), (A7). Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \| x_\varepsilon - \bar{x} \| = 0$.

Далее перейдем к непосредственному рассмотрению алгоритма для задачи (1).

АДАПТИВНЫЙ АЛГОРИТМ

На основании схемы двухэтапного проксимального метода [21, 27] для решения задачи (1) в работе [23] был предложен такой метод:

$$\begin{cases} z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n, \\ y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} z_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} z_n, \end{cases} \tag{3}$$

где λ_n задавались исходя из требования $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \subseteq \left(0,\ \dfrac{1}{2(2a + b)} \right)$, а положительная последовательность (α_n) такова, что $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \alpha_n^{-2} = 0$.

Чтобы исключить использование в (3) информации о значениях a и b при задании границ для λ_n, рассмотрим следующий алгоритм с адаптивным выбором λ_n.

Алгоритм 1

Инициализация. Выбираем элементы $x_1,\ y_0 \in C,\ \tau \in \left(0, \dfrac{1}{3} \right),\ \lambda_1 \in (0, +\infty)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить $z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n$.

Шаг 2. Вычислить $y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} z_n$.

Шаг 3. Вычислить $x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} z_n$.

Шаг 4. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, & \text{если } F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\| y_{n-1} - y_n \|^2 + \| y_n - x_{n+1} \|^2}{(F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \right\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

В предлагаемом алгоритме параметр λ_{n+1} зависит от расположения точек y_{n-1}, y_n, x_{n+1}, значений $F(y_{n-1}, x_{n+1})$, $F(y_{n-1}, y_n)$ и $F(y_n, x_{n+1})$. Информация о константах a и b из условия (A5) не используется. Очевидно, что последовательность (λ_n) неубывающая и она ограничена снизу числом $\min\left\{\lambda_1, \dfrac{\tau}{2\max\{a, b\}}\right\}$. Действительно, имеем

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \le$$
$$\le \max\{a, b\}(\| y_{n-1} - y_n \|^2 + \| y_n - x_{n+1} \|^2).$$

Относительно положительных параметров α_n предполагаем выполненными следующие условия:

(B1) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$;

(B2) $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;

(B3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\alpha_n^2} = 0$.

Замечание 4. В качестве последовательности (α_n) можно использовать $\alpha_n = n^{-p}$, $p \in (0, 1)$.

Перейдем к обоснованию алгоритма 1. Доказательство сходимости проведем по такой схеме. Пусть x_{α_n} — решение задачи (2) при $\varepsilon = \alpha_n$. Поскольку $\| x_n - \bar{x} \| \le \| x_n - x_{\alpha_n} \| + \| x_{\alpha_n} - \bar{x} \|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_{\alpha_n} - \bar{x} \| = 0$, то достаточно показать, что порожденная последовательность (x_n) обладает свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x_{\alpha_n} \| = 0$.

Будем использовать известную лемму о рекуррентных числовых неравенствах.

Лемма 3 [1]. Пусть последовательность неотрицательных чисел (ξ_n) удовлетворяет рекуррентному неравенству $\xi_{n+1} \le (1 - \alpha_n)\xi_n + \beta_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где последовательности (α_n) и (β_n) обладают свойствами: $\alpha_n \in (0,1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \beta_n \alpha_n^{-1} \le 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Докажем важное неравенство для последовательностей (x_n), (y_n) и элементов x_{α_n}.

Лемма 4. Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) и элементов x_{α_n} выполняется неравенство

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 \le (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 - (1 - \tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}) \| x_{n+1} - y_n \|^2 -$$
$$- (1 - 2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n \lambda_n L^2 \mu^{-1}) \| y_n - x_n \|^2 + 2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \| x_n - y_{n-1} \|^2. \quad (4)$$

Доказательство. Имеем

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 = \| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 - \| x_n - x_{n+1} \|^2 + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}) =$$
$$= \| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 - \| x_n - y_n \|^2 - \| y_n - x_{n+1} \|^2 - \quad (5)$$
$$- 2(x_n - y_n, y_n - x_{n+1}) + 2(x_{n+1} - x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}).$$

Из определения точек x_{n+1} и y_n следует

$$\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) - \lambda_n F(y_n, x_{n+1}) \geq (x_{n+1} - x_n + \alpha_n \lambda_n A x_n, x_{n+1} - x_{\alpha_n}), \quad (6)$$

$$\lambda_n F(y_{n-1}, x_{n+1}) - \lambda_n F(y_{n-1}, y_n) \geq -(x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n - y_n, y_n - x_{n+1}). \quad (7)$$

Используя неравенства (6), (7) для оценки скалярных произведений в (5), получаем

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 +$$
$$+2\lambda_n (F(y_n, x_{\alpha_n}) - F(y_n, x_{n+1}) + F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n)) +$$
$$+2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n). \quad (8)$$

Согласно правилу вычисления λ_{n+1} имеем неравенство

$$F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leq$$
$$\leq \tau 2^{-1} \lambda_{n+1}^{-1} (\|y_{n-1} - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2). \quad (9)$$

Для оценки выражения $F(y_{n-1}, x_{n+1}) - F(y_{n-1}, y_n) - F(y_n, x_{n+1})$ в (8) воспользуемся (9). Получим

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + \tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|y_{n-1} - y_n\|^2 +$$
$$+\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|x_{n+1} - y_n\|^2 + 2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n).$$

Член $\|y_{n-1} - y_n\|^2$ оценим следующим образом: $\|y_{n-1} - y_n\|^2 \leq 2\|y_{n-1} - x_n\|^2 + + 2\|x_n - y_n\|^2$. Имеем

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 + 2\tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|y_{n-1} - x_n\|^2 +$$
$$+2\tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|x_n - y_n\|^2 + \tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|x_{n+1} - y_n\|^2 +$$
$$+2\lambda_n F(y_n, x_{\alpha_n}) + 2\alpha_n \lambda_n (A x_n, x_{\alpha_n} - y_n). \quad (10)$$

Из монотонности бифункции F следует $F(y_n, x_{\alpha_n}) \leq F(x_{\alpha_n}, y_n)$, откуда

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) - \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \leq -F(x_{\alpha_n}, y_n) - \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

Поскольку $F(x_{\alpha_n}, y_n) + \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}) \geq 0$, то

$$F(y_n, x_{\alpha_n}) \leq \alpha_n (A x_{\alpha_n}, y_n - x_{\alpha_n}).$$

С учетом последней оценки в (10) получим неравенство

$$\|x_{n+1} - x_{\alpha_n}\|^2 \leq \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 - \|x_n - y_n\|^2 - \|y_n - x_{n+1}\|^2 +$$
$$+2\tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|y_{n-1} - x_n\|^2 + 2\tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|x_n - y_n\|^2 + \tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \|x_{n+1} - y_n\|^2 +$$
$$+2\alpha_n \lambda_n (A x_n - A x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n). \quad (11)$$

Оценим сверху член $(A x_n - A x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n)$. Имеем

$$(A x_n - A x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - y_n) = (A x_n - A x_{\alpha_n}, x_{\alpha_n} - x_n) + (A x_n - A x_{\alpha_n}, x_n - y_n) \leq$$
$$\leq -\mu \|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 + L\|x_n - x_{\alpha_n}\| \|x_n - y_n\| \leq -\mu\|x_{\alpha_n} - x_n\|^2 +$$
$$+\mu 2^{-1} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + L^2 2^{-1} \mu^{-1} \|x_n - y_n\|^2 =$$
$$= -\mu 2^{-1} \|x_n - x_{\alpha_n}\|^2 + L^2 2^{-1} \mu^{-1} \|x_n - y_n\|^2. \quad (12)$$

Из неравенств (11) и (12) получаем

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 \le (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 - (1 - \tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}) \| x_{n+1} - y_n \|^2 -$$

$$-(1 - 2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n \lambda_n L^2 \mu^{-1}) \| y_n - x_n \|^2 + 2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \| x_n - y_{n-1} \|^2,$$

что и требовалось доказать. ■

Докажем оценку, из которой следует сходимость к нулю последовательностей $(\| x_n - x_{\alpha_n} \|)$ и $(\| x_n - y_{n-1} \|)$.

Лемма 5. Для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) и элементов x_{α_n} при больших n выполняется неравенство

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 + \frac{2\tau \lambda_{n+1} \lambda_{n+2}^{-1}}{1 - \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mu} \| x_{n+1} - y_n \|^2 \le$$

$$\le \left(1 - \frac{\alpha_n \lambda_n \mu}{2}\right) \left(\| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 + \frac{2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}}{1 - \alpha_n \lambda_n \mu} \| x_n - y_{n-1} \|^2 \right) + \frac{2M}{\lambda_n \mu} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^3}, \quad (13)$$

где $M = \mu^{-1} (1 + L\mu^{-1}) \| A\bar{x} \|$.

Доказательство. Имеем

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 = \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 + \| x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \|^2 + 2(x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}}, x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n}) \ge$$

$$\ge \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 + \| x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \|^2 - 2 \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \| \| x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \| \ge$$

$$\ge (1 - \varepsilon) \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \| x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \|^2, \quad (14)$$

где $\varepsilon > 0$. Положим в (14) $\varepsilon = \frac{1}{2} \alpha_n \lambda_n \mu$. Получим

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 \ge \frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{2} \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 - \frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{\alpha_n \lambda_n \mu} \| x_{\alpha_{n+1}} - x_{\alpha_n} \|^2. \quad (15)$$

В силу правил согласования значений параметров α_n, λ_n при больших n имеем $1 - \alpha_n \lambda_n \mu > 0$. С учетом второго неравенства леммы 1 из (15) выводим

$$\| x_{n+1} - x_{\alpha_n} \|^2 \ge \frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{2} \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 -$$

$$- \frac{(2 - \alpha_n \lambda_n \mu)}{\alpha_n \lambda_n \mu} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^2} \mu^{-1} (1 + L\mu^{-1}) \| A\bar{x} \| \quad (16)$$

для всех $n \ge n_0$. Использовав (16) в (4), получим (для $n \ge n_0$)

$$\frac{2 - \alpha_n \lambda_n \mu}{2} \| x_{n+1} - x_{\alpha_{n+1}} \|^2 \le (1 - \alpha_n \lambda_n \mu) \| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 -$$

$$-(1 - \tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1}) \| x_{n+1} - y_n \|^2 - (1 - 2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} - \alpha_n \lambda_n L^2 \mu^{-1}) \| y_n - x_n \|^2 +$$

$$+2\tau \lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} \| x_n - y_{n-1} \|^2 + \frac{(2 - \alpha_n \lambda_n \mu)}{\alpha_n \lambda_n \mu} \frac{(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2}{\alpha_n^2} M,$$

где $M = \mu^{-1} (1 + L\mu^{-1}) \| A\bar{x} \|$. Отсюда следует неравенство

$$\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\|^2 \le \frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2-\frac{2(1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_{n+1}-y_n\|^2-$$

$$-\frac{2(1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}-\alpha_n\lambda_n L^2\mu^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_n-x_n\|^2+\frac{4\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2+$$

$$+\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}. \tag{17}$$

Перегруппировав члены в (17), получим

$$\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\|^2+\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|x_{n+1}-y_n\|^2 \le$$

$$\le \frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\left(\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2+\frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2\right)- \tag{18}$$

$$-\frac{2(1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}-\alpha_n\lambda_n L^2\mu^{-1})}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}\|y_n-x_n\|^2-$$

$$-\left(\frac{1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n\mu}-\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\right)\|x_{n+1}-y_n\|^2+\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3}.$$

Поскольку $\tau\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$, существует $\lim_{n\to\infty}\lambda_n>0$ и $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, то, начиная с некоторого номера n_1, будут выполняться неравенства

$$\frac{1-2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}-\alpha_n\lambda_n L^2\mu^{-1}}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}>0,\quad \frac{1-\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\frac{1}{2}\alpha_n\lambda_n\mu}-\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}>0,$$

$$\frac{2-2\alpha_n\lambda_n\mu}{2-\alpha_n\lambda_n\mu}<1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}.$$

Таким образом, для $n\ge N=\max\{n_0, n_1\}$ из (18) следует

$$\|x_{n+1}-x_{\alpha_{n+1}}\|^2+\frac{2\tau\lambda_{n+1}\lambda_{n+2}^{-1}}{1-\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}\mu}\|x_{n+1}-y_n\|^2 \le$$

$$\le\left(1-\frac{\alpha_n\lambda_n\mu}{2}\right)\left(\|x_n-x_{\alpha_n}\|^2+\frac{2\tau\lambda_n\lambda_{n+1}^{-1}}{1-\alpha_n\lambda_n\mu}\|x_n-y_{n-1}\|^2\right)+\frac{2M}{\lambda_n\mu}\frac{(\alpha_{n+1}-\alpha_n)^2}{\alpha_n^3},$$

что и требовалось доказать. ■

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (A1)–(A7) и (B1)–(B3). Тогда для порожденных алгоритмом 1 последовательностей (x_n), (y_n) имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-\bar{x}\|=\lim_{n\to\infty}\|y_n-\bar{x}\|=0, \tag{19}$$

где $\bar{x}\in H$ — единственное решение задачи (1).

Доказательство. В силу леммы 3 и неравенства (13) имеем

$$\| x_n - x_{\alpha_n} \|^2 + 2\tau\lambda_n \lambda_{n+1}^{-1} (1 - \alpha_n \lambda_n \mu)^{-1} \| x_n - y_{n-1} \|^2 \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_{\alpha_n} \| = \lim_{n\to\infty} \| y_{n-1} - x_n \| = 0 . \tag{20}$$

Из неравенства $\| x_n - \bar{x} \| \le \| x_n - x_{\alpha_n} \| + \| x_{\alpha_n} - \bar{x} \|$, леммы 2 и (20) получаем равенства (19). ■

Замечание 5. Очевидно, что последовательность (z_n) также сильно сходится к $\bar{x} \in H$.

ВАРИАНТ АЛГОРИТМА ДЛЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим частный случай задачи (1): двухуровневое вариационное неравенство в гильбертовом пространстве H:

$$\text{найти } x \in VI(A_2, VI(A_1, C)) . \tag{21}$$

Предположим выполненными следующие условия: множество $C \subseteq H$ выпуклое и замкнутое; оператор $A_1 : C \to H$ монотонный и липшицевый; множество $VI(A_1, C)$ не пусто; оператор $A_2 : C \to H$ сильно монотонный и липшицевый. Пусть P_C — оператор метрического проектирования на выпуклое замкнутое множество C, т.е. $P_C x$ — единственный элемент множества C со свойством $\| P_C x - x \| = \min_{z\in C} \| z - x \|$.

Для задачи (21) алгоритм 1 принимает следующий вид.

Алгоритм 2

Инициализация. Выбираем элементы x_1, $y_0 \in C$, $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$. Полагаем $n = 1$.

Шаг 1. Вычислить $z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A_2 x_n$.

Шаг 2. Вычислить $y_n = P_C (z_n - \lambda_n A_1 y_{n-1})$.

Шаг 3. Вычислить $x_{n+1} = P_C (z_n - \lambda_n A_1 y_n)$.

Шаг 4. Вычислить

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \text{ если } (A_1 y_{n-1} - A_1 y_n, x_{n+1} - y_n) \le 0, \\ \min\left\{ \lambda_n, \dfrac{\tau}{2} \dfrac{\| y_{n-1} - y_n \|^2 + \| x_{n+1} - y_n \|^2}{(A_1 y_{n-1} - A_1 y_n, x_{n+1} - y_n)} \right\} \text{ иначе.} \end{cases}$$

Положить $n := n + 1$ и перейти на шаг 1.

Из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. Пусть H — гильбертово пространство; $C \subseteq X$ — непустое выпуклое замкнутое множество; оператор $A_1 : C \to H$ монотонный и липшицевый; множество $VI(A_1, C)$ не пусто; оператор $A_2 : C \to H$ сильно монотонный и липшицевый; выполняются условия (B1)–(B3). Тогда порожденные алгоритмом 2 последовательности (x_n) и (y_n) сильно сходятся к единственному решению задачи (21).

Замечание 6. Аналогичный теореме 2 результат имеет место для модификации алгоритма 2 с заменой инструкции пересчета λ_n на следующую:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n, \text{ если } A_1 y_{n-1} - A_1 y_n \ne 0, \\ \min \{ \lambda_n, \tau \| y_{n-1} - y_n \| \| A_1 y_{n-1} - A_1 y_n \|^{-1} \} \text{ иначе,} \end{cases}$$

где $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Замечание 7. Можно построить экономную модификацию алгоритма 2. Следует изменить шаг 3, положив $x_{n+1} = P_{T_n}(z_n - \lambda_n A_1 y_n)$, где $T_n = \{z \in H: (z_n - \lambda_n A_1 y_{n-1} - y_n, z - y_n) \le 0\}$. Детали мы планируем представить в ближайшей работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассматривается двухуровневая задача: вариационное неравенство на множестве решений задачи о равновесии [22, 23]. Для решения данной задачи предложен итерационный алгоритм, сочетающий в себе идеи двухэтапного проксимального метода [21, 27], адаптации [28] и итеративной регуляризации [1, 24]. Алгоритм имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} z_n = x_n - \alpha_n \lambda_n A x_n, \\ y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_{n-1}, \cdot)} z_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n, \cdot)} z_n, \end{cases}$$

где $\lambda_n > 0$ подбирается адаптивно, а положительная последовательность (α_n) такова, что $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$ и $\lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n)\alpha_n^{-2} = 0$. В отличие от применяемых ранее [23] правил выбора величины шага в предлагаемом алгоритме не проводится вычислений значений бифункции в дополнительных точках и не требуются знания информации о липшицевых константах бифункции. Для монотонных бифункций липшицевого типа и сильно монотонных липшицевых операторов доказана теорема о сильной сходимости алгоритма. Доказательство опирается на результаты и технику работ [21, 23, 24, 28].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. Iterative methods for solving ill-posed problems. Moscow: Nauka, 1989. 126 p.
2. Browder F. Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1966. Vol. 56, N 4. P. 1080–1086.
3. Browder F. Convergence of approximants of fixed points of nonexpansive non-linear mappings in Banach spaces. *Arch. Rational Mech. Anal*. 1967. Vol. 24. P. 82–90.
4. Attouch H. Viscosity solutions of minimization problems. *SIAM J. Optim*. 1996. Vol. 6. Iss. 3. P. 769–806. https://doi.org/10.1137/S1052623493259616.
5. Подиновский В.В., Гаврилов В.Н. Оптимизация по последовательно применяемым критериям. Москва: Сов. радио, 1975. 192 с.
6. Kalashnikov V.V., Kalashnikova N.I. Solution of two-level variational inequality. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 4. P. 623–625. https://doi.org/10.1007/BF02366574.
7. Коннов И.В. О системах вариационных неравенств. *Изв. вузов. Матем*. 1997. № 12. С. 79–88.
8. Попов Л.Д. Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения. *Математическое программирование. Регуляризация и аппроксимация. Сб. статей. Тр. ИММ*. 2002. Т. 8, № 1. С. 103–115.
9. Попов Л.Д. Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств. *Изв. вузов. Матем*. 1998. № 12. С. 71–81.
10. Solodov M. An explicit descent method for bilevel convex optimization. *Journal of Convex Analysis*. 2007. Vol. 14. P. 227–238.
11. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, N 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.

12. Semenov V.V. A strongly convergent splitting method for systems of operator inclusions with monotone operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, N 5. P. 45–56. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i5.40.
13. Semenov V.V. Hybrid splitting methods for the system of operator inclusions with monotone operators. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 5. P. 741–749. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9664-y.
14. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
15. Kassay G., Radulescu V.D. Equilibrium problems and applications. London: Academic Press, 2019. xx+419 p.
16. Antipin A.S. Equilibrium programming: Proximal methods. *Comput. Math. Math. Phys*. 1997. Vol. 37. P. 1285–1296. https://doi.org/10.1134/S0965542507120044.
17. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele P. et al. (eds.). Equilibrium Problems and Variational Models. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. P. 289–298. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0239-1.
18. Combettes P.L., Hirstoaga S.A. Equilibrium programming in Hilbert spaces. *J. Nonlinear Convex Anal*. 2005. Vol. 6. P. 117–136.
19. Quoc T.D., Muu L.D., Hien N.V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization*. 2008. Vol. 57. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876.
20. Lyashko S.I., Semenov V.V., Voitova T.A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, N 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1.
21. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.). Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, 115. Cham: Springer, 2016. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.
22. Semenov V.V. Strongly convergent algorithms for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. In: Zgurovsky M.Z., Sadovnichiy V.A. (eds.). Continuous and Distributed Systems. Solid Mechanics and Its Applications, 211, Springer International Publishing Switzerland, 2014. P. 131–146. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-0_10.
23. Vedel Ya.I., Denisov S.V., Semenov V.V. Algorithm for variational inequality problem over the set of solutions the equilibrium problems. *Journal of Numerical and Applied Mathematics*. 2020. N 1 (133). P. 18–30.
24. Popov L.D. On schemes for the formation of a master sequence in a regularized extragradient method for solving variational inequalities. *Russian Mathematics*. 2004. Vol. 48, N 1. P. 67–76.
25. Kinderlehrer D., Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
26. Bauschke H.H., Combettes P.L. Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2011. 408 p.
27. Semenov V.V. A version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9.
28. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.
29. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.

Надійшла до редакції 19.05.2020

Я.І. Ведель, С.В. Денисов, В.В. Семенов

АДАПТИВНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНОЇ НЕРІВНОСТІ НА МНОЖИНІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ПРО РІВНОВАГУ

Анотація. Розглянуто дворівневі задачі: варіаційні нерівності на множині розв'язків задач про рівновагу. Прикладом таких задач є пошук нормальної рівноваги Неша. Для їх розв'язання запропоновано ітераційний алгоритм, що поєднує у собі ідеї двоетапного проксимального методу, адаптивності та ітеративної регуляризації. На відміну від правил вибору величини кроку, що застосовувалися раніше, в запропонованому алгоритмі не проводиться обчислень значень біфункції в додаткових точках та не потрібно знання інформації про величину ліпшицевих констант біфункції, констант ліпшицевості та сильної монотонності оператора. Для монотонних біфункцій ліпшицевого типу та сильно монотонних ліпшицевих операторів доведено теорему про сильну збіжність алгоритму. Показано, що запропонований алгоритм можна застосувати до монотонних дворівневих варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Ключові слова: дворівнева задача, варіаційна нерівність, задача про рівновагу, двоетапний проксимальний метод, адаптивність, ітеративна регуляризація, сильна збіжність.

Ya.I. Vedel, S.V. Denisov, V.V. Semenov

AN ADAPTIVE ALGORITHM FOR THE VARIATIONAL INEQUALITY OVER THE SET OF SOLUTIONS OF THE EQUILIBRIUM PROBLEM

Abstract. In this paper, we consider bilevel problems: variational inequality problems over the set of solutions of the equilibrium problem. An example of such a problem is finding a normal Nash equilibrium. To solve these problems, an iterative algorithm is proposed that combines the ideas of a two-stage proximal method, adaptability, and iterative regularization. In contrast to the previously used rules for choosing the step size, the proposed algorithm does not calculate bifunction values at additional points and does not require knowledge of information on bifunction's Lipschitz constants and operator's Lipschitz and strong monotonicity constants. For monotone bifunctions of Lipschitz type and strongly monotone Lipschitz operators, the theorem on strong convergence of sequences generated by the algorithm is proved. It is shown that the proposed algorithm is applicable to monotone bilevel variational inequalities in Hilbert spaces.

Keywords: bilevel problem, variational inequality, equilibrium problem, two-stage proximal algorithm, adaptivity, iterative regularization, strong convergence.

Ведель Яна Игоревна,
аспирантка Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: yana.vedel@gmail.com.

Денисов Сергей Викторович,
ассистент кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко,
e-mail: sireukr@gmail.com.

Семенов Владимир Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: semenov.volodya@gmail.com.