УДК 519.8

О.А. БЕРЕЗОВСКИЙ

ТОЧНЫЕ ДВОЙСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕВЫПУКЛЫХ МИНИМАКСНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Аннотация. Исследована невыпуклая сепарабельная минимаксная квадратичная оптимизационная задача. Изложено два подхода к ее решению: с помощью SOCP-релаксации и лагранжевой релаксации квадратичной экстремальной задачи-аналога. Получено условие, выполнение которого гарантирует нахождение значения и точки глобального экстремума задачи рассматриваемого класса вычислением двойственной оценки эквивалентной квадратичной экстремальной задачи.

Ключевые слова: минимаксная квадратичная оптимизационная задача, SOCP-релаксация, лагранжева релаксация, точная двойственная оценка, положительно-определенная матрица.

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи, связанные с оптимальным управлением, планированием, проектированием, моделированием, анализом сетевых структур и другими направлениями, допускают представление в виде квадратичных оптимизационных задач [1–11]. Значимость класса квадратичных задач подтверждает и тот факт, что к ним относится широкий круг задач математического программирования: выпуклые и невыпуклые задачи минимизации квадратичной функции на линейных ограничениях, задачи минимизации квадратичной функции с бинарными переменными, линейная задача комплементарности, квадратичная задача о назначении, экстремальные задачи на графах (например, задачи раскрашивания и разбиения графов, нахождение максимального независимого множества, максимального k-клаба) и т.д. Более того, к виду квадратичных оптимизационных задач сводится более широкий класс полиномиальных оптимизационных задач (в которых целевая функция и все функции ограничений полиномиальны), нахождение решения систем полиномиальных уравнений с действительными и булевыми переменными и т.д.

В общем случае квадратичная оптимизационная задача относится к классу NP-трудных задач, в связи с чем возникает интерес к исследованию данного класса задач с использованием различного типа выпуклых релаксаций, в частности SDP-релаксаций (semidefinite programming relaxations) [1, 2, 12], SOCP-релаксаций (second-order cone programming relaxations) [2, 13], лагранжевых релаксаций (lagrangian relaxations) [1, 14, 15], линейных релаксаций (linear programming relaxations) [16]. Одним из основных направлений этих исследований является выделение специальных подклассов квадратичных задач, для которых релаксации позволяют найти значение глобального экстремума, а возможно, и точку глобального экстремума [1, 17–25]. Данная работа посвящена определению такого подкласса для невыпуклой сепарабельной квадратичной оптимизационной задачи с целевой функцией в виде функции максимума p квадратичных функций при q квадратичных ограничениях-неравенствах (все квадратичные функции задачи сепарабельные):

$$f^* = \inf_{x \in R^n} \max_{1 \le i \le p} \left\{ f_i(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} A_i x + a_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i \right\} \tag{1}$$

при ограничениях

$$g_i(x) = \frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} B_j x + b_j^{\mathrm{T}} x + \beta_j \le 0, \; j = 1, \ldots, q, \tag{2}$$

где A_i, $i = 1, \ldots, p$, и B_j, $j = 1, \ldots, q$, — диагональные матрицы размера $n \times n$,

$$A_i = \operatorname{diag}(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}), \; i = 1, \ldots, p,$$

$$B_j = \operatorname{diag}(B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jn}), \; j = 1, \ldots, q,$$

a_i, $i = 1, \ldots, p$, и b_j, $j = 1, \ldots, q$, — n-мерные векторы, α_i, $i = 1, \ldots, p$, и β_j, $j = 1, \ldots, q$, — вещественные числа.

Задача вида (1), (2) охватывает различные важные классы специально структурированных минимаксных квадратичных оптимизационных задач [17], таких как некоторые минимаксные однородные квадратичные оптимизационные задачи, задачи о максимальной дисперсии, минимаксные задачи с доверительной областью, робастные квадратичные задачи при условии некоторой ограниченности на неопределенность данных. В общей постановке эти невыпуклые минимаксные квадратичные задачи являются NP-трудными (например, в работе [26] доказано, что задача о максимальной дисперсии относится к NP-трудным задачам).

В качестве простейшего иллюстративного примера возникновения задачи вида (1), (2) рассмотрим следующую неопределенную задачу квадратичной оптимизации [17]:

$$\min_{(x_1, x_2) \in R^2} \{ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 : x_1^2 + x_1^2 \le 1 \},$$

где параметры (a_1, a_2) не определены однозначно, а принадлежат интервалу

$$M = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\lambda - 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in [0, 1] \right\}.$$

Тогда ее робастный аналог [24, 27], который находит решение наихудшего случая неопределенной задачи, можно сформулировать следующим образом:

$$\min_{(x_1, x_2) \in R^2} \left\{ \max_{(a_1, a_2) \in M} \{ a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 \} : x_1^2 + x_1^2 \le 1 \right\}.$$

Данная задача эквивалентна задаче

$$\min_{(x_1, x_2) \in R^2} \{ \max \{ x_1^2 - x_2^2, x_2^2 - x_1^2 \} : x_1^2 + x_1^2 \le 1 \}.$$

Таким образом, получена задача, относящаяся к классу квадратичных оптимизационных задач вида (1), (2), исследованию которого посвящена настоящая статья.

SOCP-РЕЛАКСАЦИЯ ЗАДАЧИ (1), (2)

В работе [17] исследовалась задача, постановка которой отличается от задачи (1), (2) лишь тем, что матрицы A_i, $i = 1, \ldots, p$, и B_j, $j = 1, \ldots, q$, не диагональны, но их собственные векторы одинаковы, т.е. они представимы в виде

$$A_i = U \operatorname{diag}(A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}) U^{\mathrm{T}}, \; i = 1, \ldots, p,$$

$$B_j = U \operatorname{diag}(B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jn}) U^{\mathrm{T}}, \; j = 1, \ldots, q,$$

где U — матрица собственных векторов. В дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что все матрицы имеют диагональный вид (достигается заменой переменных $y = U^{\mathrm{T}} x$).

Для получения нижней оценки значения глобального экстремума минимаксной сепарабельной квадратичной оптимизационной задачи (1), (2) в [17] построена и исследована ее SOCP-релаксация:

$$\mu^* = \sup_{\substack{\mu \in R^1,\, \delta \in \Delta_p,\, \lambda_j \geq 0, \\ \upsilon \in R^n,\, s \in R^n}} \mu \tag{3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{p} \delta_k A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_k B_{jk} \geq 0, \ k = 1, \ldots, n,$$

$$\upsilon = \sum_{i=1}^{p} \delta_k a_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_k b_j,$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{p} \delta_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \beta_j - \mu \right) - \sum_{k=1}^{n} s_k \geq 0,$$

$$s_k \geq 0, \ k = 1, \ldots, n,$$

$$\left\| \left(2\upsilon_k, s_k - \sum_{i=1}^{p} \delta_i A_{ik} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_{jk} \right) \right\| \leq s_k + \sum_{i=1}^{p} \delta_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j B_{jk}, \ k = 1, \ldots, n,$$

где $\Delta_p = \left\{ x : \sum_{i=1}^{p} x_i = 1, x \geq 0, x \in R^p \right\}$.

Лемма 1 [17]. Пусть f^* — решение задачи (1), (2), μ^* — решение задачи (3). Тогда $f^* \geq \mu^*$.

Основным теоретическим результатом относительно использования данной SOCP-релаксации (3) для решения задачи (1), (2) является достаточное условие того, что она будет точной (т.е. $\mu^* = f^*$ — значения глобальных экстремумов исходной задачи и ее SOCP-релаксации совпадают). Это условие сформулировано в следующей теореме.

Теорема 1 [17, теорема 2.1]. Если для задачи (1), (2) множество

$$E(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q) =$$
$$= \{ (y, z) \in R^p \times R^q : \exists x \in R^n \text{ такое, что } f_i(x) \leq y_i, \ i = 1, \ldots, p,$$
$$\text{и } g_j(x) \leq z_j, \ j = 1, \ldots, q \}$$

выпукло и замкнуто, то $\mu^* = f^*$.

Условие, сформулированное в теореме 1, достаточно жесткое. Оно требует выпуклости всех активных квадратичных функций, участвующих в формировании множества $E(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$. Далее исследуется точность другого подхода для решения задачи (1), (2): построение эквивалентной квадратичной постановки для нее и нахождение для этой постановки двойственной оценки ψ^* [1] (лагранжева релаксация по всем ограничениям). Хотя вычислительная сложность получения двойственной оценки выше, чем решения SOCP-задачи, ее значение, как правило, более точное по отношению к f^*. Особо отметим, что для двойственной оценки в задаче (1), (2) можно сформулировать достаточное условие нулевого разрыва двойственности (условие, гарантирующее $\psi^* = f^*$), не зависящее от знаков собственных чисел матриц A_i, $i=1,\dots,p$, и B_j, $j=1,\dots,q$, существенно влияющих на выпуклость множества $E(f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q)$, на которой основана теорема 1.

ДВОЙСТВЕННАЯ КВАДРАТИЧНАЯ ОЦЕНКА ЗАДАЧИ (1), (2)

Для получения двойственной квадратичной оценки для исходной задачи (1), (2) заменим ее наиболее очевидной эквивалентной квадратичной экстремальной задачей-аналогом

$$f^* = \inf_{t\in R^1,\, x\in R^n} t, \tag{4}$$

при ограничениях

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm T} A_i x + a_i^{\mathrm T} x + \alpha_i \le t,\ i=1,\dots,p, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm T} B_j x + b_j^{\mathrm T} x + \beta_j \le 0,\ j=1,\dots,q, \tag{6}$$

которую будем исследовать далее.

Для квадратичной экстремальной задачи общего вида

$$f^* = f_0(x^*) = \inf_{x\in T\subseteq R^n} f_0(x), \tag{7}$$

где $T=\{x: f_i(x)\le 0, i\in I^{LQ}, f_i(x)=0, i\in I^{EQ}\}$, $f_i(x)=x^{\mathrm T}A_i x + b_i^{\mathrm T}x + c_i$, $i\in\{0\}\cup$ $\cup I^{LQ}\cup I^{EQ}$ — квадратичные функции в n-мерном пространстве, двойственная оценка ψ^* определяется следующим образом [1]:

$$\psi^* = \sup_{u\in R^m}\left(\psi(u) = \inf_{x\in R^n} L(u,x)\right)\le f^* \tag{8}$$

при ограничениях

$$A(u)\succ= 0,$$

$$u\in U^+ = \{u: u_i\ge 0, i\in I^{LQ}, u\in R^m\},$$

где $L(u,x)=x^{\mathrm T}A(u)x + b^{\mathrm T}(u)x + c(u)$ — функция Лагранжа для задачи (7), $A(u) =$ $= A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i$, $b(u) = b_0 + \sum_{i=1}^m u_i b_i$, $c(u) = c_0 + \sum_{i=1}^m u_i c_i$, $m = |I^{LQ}| + |I^{EQ}|$, $A\succ= 0$ обозначает положительно-полуопределенную матрицу A. Далее будем предполагать, что область определения двойственных переменных в задаче (8) имеет внутренние точки.

В работе [25] для квадратичной экстремальной задачи общего вида (7) получен критерий (достаточное условие) нахождения точной двойственной оценки ψ^* ($\psi^* = f^*$). Для того чтобы сформулировать этот критерий, введем обозначение Γ^+ для множества граничных точек множества $\{u: A(u)\succ= 0, u\in R^m\}$, удовлетворяющих условию $u_i\ge 0$, $i\in I^{LQ}$, и определим для каждого $u\in\Gamma^+$ множество

$$J(u) = \{j: \lambda_j(u) = 0, j\in\{1,\dots,n\}\},$$

где $\lambda_j(u)$, $j\in\{1,\dots,n\}$, — собственные числа матрицы $A(u)$. Обозначим $\xi_j(u)$ собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_j(u)$. В этих обозначениях имеет место следующая теорема.

Теорема 2 [25]. Если существуют такой вектор p и такое положительное число $\tilde{\varepsilon} > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$

$$\forall u \in \Gamma^{+} \quad \exists j \in J(u) \text{ такое, что } \xi_j^{\mathrm{T}}(u)\left(b_0 + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i + \varepsilon p\right) \neq 0, \tag{9}$$

то двойственная оценка ψ^* (8) для квадратичной экстремальной задачи (7) является точной ($\psi^* = f^*$). Причем если условие (9) выполняется при $p = 0$, то вектор

$$x^* = x(u^*) = -A^{-1}(u^*) b(u^*)/2$$

решения задачи (8) является и решением задачи (7).

Отметим, что в формулировке теоремы 2 при выполнении условия (9) для $p = 0$ матрица $A(u^*)$ всегда положительно определена.

Воспользуемся теоремой 2 для исследования случаев, когда для квадратичной задачи (4)–(6) двойственный подход гарантирует нахождение оптимального значения ее целевой функции (при $\psi^* = f^*$).

Функция Лагранжа задачи (4)–(6) имеет следующий вид:

$$L(x, t, u, v) = t + \sum_{i=1}^{p} v_i \left(\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} A_i x + a_i^{\mathrm{T}} x + \alpha_i - t\right) + \sum_{j=1}^{q} u_j \left(\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} B_j x + b_j^{\mathrm{T}} x + \beta_j\right) =$$

$$= \left(1 - \sum_{i=1}^{p} v_i\right) t + x^{\mathrm{T}} A(u, v) x + b^{\mathrm{T}}(u, v) x + c(u, v),$$

где

$$A(u, v) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk}\right), k = 1, \ldots, n\right),$$

$$b(u, v) = \sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j,$$

$$c(u, v) = \sum_{i=1}^{p} v_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} u_j \beta_j,$$

$$u, v \geq 0.$$

Поскольку по переменной t квадратичный член отсутствует, точки эффективного множества двойственной функции должны удовлетворять следующему условию равенства нулю коэффициента при линейном члене по t (иначе решение внутренней задачи равно $-\infty$):

$$\sum_{i=1}^{p} v_i = 1.$$

При выполнении этого условия переменная t исключается из задачи нахождения двойственной оценки, далее будем «работать» с функцией $L(x, 0, u, v)$.

Все собственные векторы матрицы $A(u, v)$ направлены по координатным осям и не зависят от двойственных переменных, а собственные числа определяются таким образом:

$$\lambda_k(u, v) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{ik}\right), \quad k = \overline{1, n}.$$

Следовательно, для задачи (4)–(6) множество граничных точек множества $\{u : A(u) \succ= 0,\ u \in R^m\}$, удовлетворяющих условию $u_i \geq 0,\ i \in I^{LQ}$, имеет вид

$$\Gamma^+ = (\overline{D} \setminus D) \cap U^+ = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \min_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right) = 0;\ \sum_{i=1}^{p} v_i = 1;\ u, v \geq 0 \right\}.$$

Подстановкой в условие (9) при $p = 0$ соответствующих значений параметров задачи (4)–(6) получаем

$$\xi_k^{\mathrm{T}}(u, v) b(u, v) = e_k^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j \right) \neq 0,$$

где $\xi_k(u) = e_k$, $k = \overline{1, n}$, — собственные векторы матрицы $A(u, v)$, e_k — n-мерный вектор, k-я компонента которого равна единице, а остальные равны нулю. Таким образом, условие (9) для задачи (4)–(6) при $p = 0$ примет вид

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \min_{k=1,\ldots,n} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i A_{ik} + \sum_{j=1}^{q} u_j B_{jk} \right) = 0;\ \sum_{i=1}^{p} v_i = 1;\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

$$\exists\, k \in J(u, v) \text{ такое, что } e_k^{\mathrm{T}} \left(\sum_{i=1}^{p} v_i a_i + \sum_{j=1}^{q} u_j b_j \right) \neq 0. \qquad (10)$$

Пусть для некоторого вектора $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in (\overline{D} \setminus D) \cap U^+$ $\tilde{k}$-е собственное число матрицы $A(\tilde{u}, \tilde{v})$ равно нулю, т.е. $\min\limits_{k=1,\ldots,n} \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{v}_i A_{ik} + \sum\limits_{j=1}^{q} \tilde{u}_j B_{jk} \right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{v}_i A_{i\tilde{k}} + \sum\limits_{j=1}^{q} \tilde{u}_j B_{j\tilde{k}} = 0$. Один из способов удовлетворить условию (10) — необходимо, чтобы неравенство $e_{\tilde{k}}^{\mathrm{T}} \left(\sum\limits_{i=1}^{p} \tilde{v}_i a_i + \sum\limits_{j=1}^{q} \tilde{u}_j b_j \right) \neq 0$ выполнялось независимо от значений вектора $\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix}$, другими словами, чтобы $\tilde{k}$-я координата конической комбинации векторов $\{a_i,\ i = \overline{1, p};\ b_j,\ j = \overline{1, q}\}$ никогда не принимала значение ноль. Это возможно, когда $\tilde{k}$-е координаты всех векторов $\{a_i,\ i = \overline{1, p};\ b_j,\ j = \overline{1, q}\}$ имеют одинаковый знак (поскольку $\tilde{u}, \tilde{v} \geq 0$). Обобщая сказанное на все собственные числа матрицы $A(u, v)$, получаем, что условие (10) при $p = 0$ выполняется, если все векторы $\{a_i,\ i = \overline{1, p};\ b_j,\ j = \overline{1, q}\}$ расположены в одном открытом ортанте.

Таким образом, доказан следующий результат.

Утверждение 1. Если $\{a_i,\ i = \overline{1, p};\ b_j,\ j = \overline{1, q}\}$ в задаче (1), (2) расположены в одном открытом ортанте, то значение двойственной оценки задачи (4)–(6) совпадает со значением ее глобального минимума f^* и точка $x^* = -A^{-1}(u^*, v^*) b(u^*, v^*)/2$ является ее решением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены две возможные релаксации для получения нижних оценок глобальных экстремумов невыпуклых сепарабельных минимаксных задач квадратичной оптимизации (1), (2). Основным результатом является утверждение 1, в котором сформулировано достаточное условие нахождения значения и точки глобального экстремума задачи данного класса определением двойственной оценки для эквивалентной квадратичной экстремальной задачи (4)–(6). Представляет интерес исследование возможности ослабить условие этого утверждения.

Приведенные в работе рассуждения и результаты по двойственной оценке (8) для квадратичной экстремальной задачи также верны и для ее SDP-релаксации. Это следует из того, что оценки глобального экстремума, полученные данными подходами, для одной и той же постановки квадратичной экстремальной задачи совпадают [28–30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998. 394 p.
2. Pardalos P.M., Rosen J.B. Constrained global optimization: Algorithms and applications. In: *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 268. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. 122 p.
3. Momoh J.A. Electric power system applications of optimization. New York: CRC Press, 2017. 595 p.
4. Arora J.S. Optimization of structural and mechanical systems. Singapore: World Scientific, 2007. 595 p.
5. Шор Н.З., Сергієнко І.В., Шило В.П., Стецюк П.І., Парасюк І.М., Лебєдєва Т.Т., Лаптін Ю.П., Журбенко М.Г., Бардадим Т.О., Шаріфов Ф.А., Лиховид О.П., Березовський О.А., Мірошниченко В.М. Задачі оптимального проектування надійних мереж. К.: Наук. думка, 2005. 230 с.
6. Стецюк П.И., Бортис Г., Эмменеггер Ж.-Ф., Кошлай Л.Б., Березовский О.А., Бардадым Т.А., Первухина Е.Л., Голикова В.В., Осипов К.Н., Карпец Э.П., Пилиповский А.В. Институциональные и технологические изменения в странах с рыночной и переходной экономикой. К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська академія», 2015. 336 с.
7. Guisewite G.M. Network problems. *Handbook of Global Optimization. Nonconvex Optimization and Its Applications*. Horst R., Pardalos P.M. (Eds.). Vol 2. Boston, MA: Springer, 1995. P. 609–648.
8. Zhuravlev Yu.I., Laptin Yu.P., Vinogradov A.P., Zhurbenko N.G., Lykhovyd O.P., Berezovskyi O.A. Linear classifiers and selection of informative features. *Pattern Recognition and Image Analysis.* 2017. Vol. 27, Iss. 3. P. 426–432.
9. Мунтіян В.І., Прокопенко О.В., Петрушенко М.М., Авескулова Л.І., Адасовський Б.І. Економічна безпека держави: стратегія, енергетика, інформаційні технології. За ред. Лук’яненко С.О., Караєвої Н.В. К.: Вид-во ООО «Юрка Любченка», 2014. 468 с.
10. Pankov A.R., Platonov E.N., Semenikhin K.V. Minimax quadratic optimization and its application to investment planning. *Automation and Remote Control.* 2001. Vol. 62, Iss. 12. P. 1978–1995.
11. Shor N.Z., Berezovskii O.A. Using the method of dual quadratic solutions to solve systems of polynomial equations in the complex domain. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 5. P. 686–692.
12. Nesterov Y., Wolkowicz H., Ye Y. Semidefinite programming relaxations of nonconvex quadratic optimization. *Handbook of Semidefinite Programming*. New York: Springer US, 2000. P. 361–419.
13. Kim S., Kojima M. Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems. *Optimization Methods and Software*. 2001. Vol. 15, Iss. 3. P. 201–224.
14. Lemaréchal C. Lagrangian relaxation. *Computational Combinatorial Optimization. Lecture Notes in Computer Science.* Jünger M., Naddef D. (Eds.). Vol. 2241. Berlin; Heidelberg: Springer, 2001. P. 112–156. https://doi.org/10.1007/3-540-45586-8_4.
15. Anstreicher K., Wolkowicz H. On Lagrangian relaxation of quadratic matrix constraints. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2000. Vol. 2, Iss. 1. P. 41–55.
16. Qualizza A., Belotti P., Margot F. Linear programming relaxations of quadratically constrained quadratic programs. Mixed Integer Nonlinear Programming. *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Lee J., Leyffer S. (Eds.). Vol 154. New York: Springer, 2012. P. 407–426. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1927-3_14.
17. Jeyakumar V., Li G. Exact second-order cone programming relaxations for some nonconvex minimax quadratic optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2018. Vol. 28, Iss. 1. P. 760–787.

18. Wolkowicz H., Saigal R., Vandenberghe L. (Eds.). Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms, and applications. New York: Springer Science & Business Media, 2012. 654 p.
19. Lasserre J.B. An explicit exact SDP relaxation for nonlinear 0-1 programs. *Intern. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization*. Berlin: Springer, 2001. P. 293–303.
20. Burer S., Anstreicher K.M. Second-order-cone constraints for extended trust-region subproblems. *SIAM Journal on Optimization*. 2013. Vol. 23, Iss. 1. P. 432–451.
21. Beck A., Eldar Y.C. Strong duality in nonconvex quadratic optimization with two quadratic constraints. *SIAM Journal on Optimization.* 2006. Vol. 17, Iss. 3. P. 844–860.
22. Березовский О.А. О точности двойственных оценок для квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. № 1. С. 33–39.
23. Jeyakumar V., Li G. Trust-region problems with linear inequality constraints: Exact SDP relaxation, global optimality and robust optimization. *Mathematical Programming.* 2014. Vol. 147, Iss. 1. P. 171–206.
24. Jeyakumar V., Li G. Y. Strong duality in robust convex programming: complete characterizations. *SIAM Journal on Optimization.* 2010. Vol. 20, Iss. 6. P. 3384–3407.
25. Berezovskyi O.A. On solving of a special optimization problem connected with determination of invariant sets of dynamical systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, Iss. 5. P. 69–77.
26. Haines S., Loeppky J., Tseng P., Wang X. Convex relaxations of the weighted maxmin dispersion problem. *SIAM Journal on Optimization.* 2013. Vol. 23, Iss. 4. P. 2264–2294.
27. Ben-Tal A., Ghaoui L.E., Nemirovski A. Robust optimization. Princeton Ser. Appl. Math. Princeton: Princeton Univ. Press, 2009. 544 p.
28. Alizadeh F. Optimization over the positive-definite cone: Interior point methods and combinatorial applications. In: A*dvances in Optimization and Parallel Computing*. Pardalos P.M. (Ed.). Amsterdam: Elsevier Science, 1992. P. 1–25.
29. Fujit T., Kojima M. Semidefinite programming relaxation for nonconvex quadratic problems. *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 10, Iss. 4. P. 367–380.
30. Березовский О.А. Критерии точности SDP-релаксаций квадратичных экстремальных задач. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 6. С. 95–101.

Надійшла до редакції 16.06.2020

О.А. Березовський

ТОЧНІ ДВОЇСТІ ОЦІНКИ ДЛЯ ДЕЯКИХ НЕОПУКЛИХ МІНІМАКСНИХ КВАДРАТИЧНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Анотація. Досліджено неопуклу сепарабельну мінімаксну квадратичну оптимізаційну задачу. Наведено два підходи до її розв’язання: за допомогою SOCP-релаксації і лагранжевої релаксації квадратичної екстремальної задачі-аналога. Отримано умову, виконання якої гарантує знаходження значення і точки глобального екстремуму задачі розглянутого класу обчисленням двоїстої оцінки еквівалентної квадратичної екстремальної задачі.

Ключові слова: мінімаксна квадратична оптимізаційна задача, SOCP-релаксація, лагранжева релаксація, точна двоїста оцінка, додатно-визначена матриця.

O.A. Berezovskyi

EXACT DUAL BOUNDS FOR SOME NONCONVEX MINIMAX QUADRATICOPTIMIZATION PROBLEMS

Abstract. Nonconvex separable minimax quadratic optimization problem is analyzed. Two approaches to solve the problem are described, namely, by using SOCP-relaxation and by using Lagrangian relaxation of a quadratic extremum analog problem. A condition is obtained whose fulfillment guarantees finding the value and the global extremum point of the problem of the considered class by calculating the dual bound of the equivalent quadratic extremum problem.

Keywords: minimax quadratic optimization problem, SOCP-relaxation, Lagrangian relaxation, exact dual bound, positive definite matrix.

Березовский Олег Анатольевич,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики имени В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: o.a.berezovskyi@gmail.com.