СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

П.С. КНОПОВ, Е.И. КАСИЦКАЯ

УДК 519.21

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ И СВОЙСТВА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ЭМПИРИЧЕСКИХ ОЦЕНОК В ЗАДАЧЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ ПРИ НЕОДНОРОДНЫХ И ОДНОРОДНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ[1]

Аннотация. Рассмотрена задача стохастического программирования, где эмпирическая функция строится по неоднородным наблюдениям однородного случайного поля. Исследовано однородное в узком смысле случайное поле, удовлетворяющее условию сильного перемешивания. Приведены условия, при которых эмпирическая оценка является состоятельной и оцениваются ее большие уклонения для однородных наблюдений.

Ключевые слова: задача стохастического программирования, однородное в узком смысле случайное поле, неоднородные наблюдения, условие сильного перемешивания, большие уклонения.

ВВЕДЕНИЕ

Задача стохастической оптимизации возникает, когда необходимо принять наилучшее в некотором смысле решение в условиях неопределенности и риска [1]. Оптимизируется среднее значение функции управления, зависящей от случайных факторов.

Далее рассматривается ситуация замены первоначальной задачи проблемой оптимизации эмпирической функции, построенной на основании имеющихся наблюдений. Для решения задачи стохастической оптимизации применяется так называемый метод эмпирических средних — один из основных непрямых методов стохастического программирования [2, 3]. В результате возникает проблема оценки точности аппроксимации, обоснования сходимости эмпирических оценок при увеличении объема наблюдений.

В настоящей работе рассматриваются наблюдения однородного в узком смысле случайного поля на прямоугольнике плоскости. Исследована минимизируемая функция, зависящая от координаты. Доказана строгая состоятельность эмпирических оценок. Для ситуации, когда функция критерия напрямую не зависит от координаты, исследованы большие уклонения точек минимума эмпирической функции от решения исходной задачи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предположим, что $\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ — однородное в узком смысле действительное случайное поле с непрерывными траекториями, заданное на полном

[1] Работа выполнена при поддержке гранта 2020.02/0121 Национального фонда исследований Украины.

вероятностном пространстве (Ω, G, P), $X=[a; b]\subset \mathbb{R}$; $h:\mathbb{R}^2\times X\times \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, выпуклая по $x\in X$.

Исследуем задачу

$$F_{T_1T_2}(x)=\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} h(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))\,dt_1dt_2\to \min,\ x\in X. \tag{1}$$

Пусть выполнены следующие условия:

а) $\sup\{E[\max|h(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))|, x\in X], t_1, t_2\ge 0\}<\infty$;

б) при любом $x\in X$ существует $F(x)=\lim EF_{T_1T_2}(x)$, $T_1, T_2\to\infty$;

в) существуют такие $x_0\in X$, $c>0$, что

$$F(x)\ge F(x_0)+c|x-x_0|,\ x\in X. \tag{2}$$

Из условия в) вытекает, что x_0 является единственным решением задачи

$$F(x)\to \min,\ x\in X. \tag{3}$$

Из выпуклости по $x\in X$ функции h следует выпуклость функции $F_{T_1T_2}(x)$ при любых T_1, T_2, ω, а также выпуклость $EF_{T_1T_2}(x)$ при всех T_1, T_2 и выпуклость $F(x)$.

Для произвольной функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ обозначим

$$g'_+(x)=\lim\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta},\ \Delta\to +0, \tag{4}$$

$$g'_-(x)=\lim\frac{g(x-\Delta)-g(x)}{\Delta},\ \Delta\to +0, \tag{5}$$

если эти пределы существуют.

Обозначим $g_{T_1T_2}(x)=EF_{T_1T_2}(x)$, $x\in X$. Поскольку из выпуклости функции следует существование для нее пределов (4), (5), получаем, что такие пределы существуют:

— при всех t_1, t_2, y для функции $h(t_1, t_2, \cdot, y)$;

— для любых t_1, t_2 функции $Eh(t_1, t_2, \cdot, \xi(t_1, t_2))$;

— для всех T_1, T_2, ω функции $F_{T_1T_2}(\cdot)$;

— при всех T_1, T_2 для $g_{T_1T_2}(\cdot)$;

— для $F(\cdot)$.

Используем следующее утверждение.

Лемма 1 [4]. Пусть имеется функция $u: X\times\Omega\to R$, выпуклая по первому аргументу и измеримая по второму, причем $E|u(x, \omega)|<\infty$, $x\in X$.

Обозначим $v(x)=Eu(x, \omega)$. Тогда $v'_+(x)=Eu'_+(x, \omega)$, $v'_-(x)=Eu'_-(x, \omega)$.

В силу леммы 1 для всех t_1, $t_2\in\mathbb{R}$, $T_1, T_2>0$, $x\in X$ имеем

$$(Eh)'_+(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))=E\{h'_+(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))\},$$

$$(Eh)'_-(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))=E\{h'_-(t_1, t_2, x, \xi(t_1, t_2))\},$$

$$(g_{T_1T_2})'_+(x)=E\{(F_{T_1T_2})'_+(x)\},\ (g_{T_1T_2})'_-(x)=E\{(F_{T_1T_2})'_-(x)\}.$$

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК

Лемма 2. Пусть, кроме сделанных предположений, справедливы также следующие:

1) поле $\xi(t_1, t_2)$ удовлетворяет условию сильного перемешивания [5], т.е. существует такая функция $a(d)$, $d\ge 0$; $a(d)\to 0$, $d\to\infty$, что для любых H_1, $H_2\subset R^2$ имеем

$$\sup\{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|;\ A\in\sigma(H_1), B\in\sigma(H_2)\}\le a(d(H_1, H_2)),$$

где

$$\sigma(H)=\sigma\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2)\in H\},\ d(H_1, H_2)=\inf\{||(t_1, t_2)-(s_1-s_2)||,$$

$$(t_1, t_2)\in H_1,\ (s_1, s_2)\in H_2;$$

$$a(d)\le\frac{c_0}{1+d^{2+\varepsilon}},\ \varepsilon>0;$$

2) существует $L>0$ такое, что при всех t_1, t_2, ω имеем

$$|h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))| \le L, \; |h'_-(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))| \le L;$$

3) для некоторого $\delta > 8/\varepsilon$

$$E\{|h(t_1, t_2, x, \; \xi(t_1, t_2))|^{4+\delta}\} < \infty, \; x \in X, \; t_1, t_2 \in R;$$

4) $(g_{T_1T_2})'_+(x_0) \to F'_+(x_0)$, $(g_{T_1T_2})'_-(x_0) \to F'_-(x_0)$, $T \to \infty$;

5) существует $c''>0$ такое, что для любого $t_2 \in R^+$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} E|\beta_{t_1t_2}\beta_{s_1t_2}|\, dt_1 ds_1 \le c'',$$

где $\beta_{t_1t_2} = h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2)) - Eh'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))$;

6) найдется $c'''>0$ такое, что при всех $t_1 \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} E|\beta_{t_1t_2}\beta_{t_1s_2}|\, dt_2 ds_2 \le c''';$$

7) для левой производной выполнены условия, аналогичные условиям 5 и 6. Тогда с вероятностью 1 получаем

$$(F_{T_1T_2})'_+(x_0) \to F'_+(x_0), \; T_1, T_2 \to \infty; \tag{6}$$

$$(F_{T_1T_2})'_-(x_0) \to F'_-(x_0), \; T_1, T_2 \to \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим

$$\theta_{T_1T_2} = (F_{T_1T_2})'_+(x_0) - E\{(F_{T_1T_2})'_+(x_0)\}.$$

Имеем

$$E\theta^2_{T_1T_2} = E\left[\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))\, dt_1 dt_2 - \right.$$

$$\left. - E\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))\, dt_1 dt_2 \right]^2 =$$

$$= E\left[\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))\, dt_1 dt_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} Eh'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))\, dt_1 dt_2 \right]^2 =$$

$$= E\left[\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} [h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2)) - Eh'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))]\, dt_1 dt_2\right]^2 =$$

$$= E\left\{\frac{1}{T_1^2T_2^2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} [h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2)) - Eh'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))] \times \right.$$

$$\left. \times [h'_+(s_1, s_2, x_0, \xi(s_1, s_2)) - Eh'_+(s_1, s_2, x_0, \xi(s_1, s_2))]\, ds_1 ds_2 dt_1 dt_2 \right\} =$$

$$= E\frac{1}{T_1^2T_2^2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \beta_{t_1t_2}\beta_{s_1s_2}\, dt_1 dt_2 ds_1 ds_2,$$

где $\beta_{t_1t_2} = h'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2)) - Eh'_+(t_1, t_2, x_0, \xi(t_1, t_2))$.

Далее согласно [6, 7],

$$|E\beta_{t_1t_2}\beta_{s_1s_2}| \le c_1 / (1 + \| (t_1, t_2) - (s_1, s_2) \|^{2+\varepsilon}).$$

Следовательно,

$$E\theta^2_{T_1T_2} \le \frac{1}{T_1^2 T_2^2} \int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \frac{c_1}{1 + \| (t_1, t_2) - (s_1, s_2) \|^{2+\varepsilon}} dt_1 dt_2 ds_1 ds_2 \le \frac{c_2}{T_1T_2}.$$

Обозначим $T(n) = n^2$. Тогда $P\{\theta_{T(n)T(m)} \to 0,\, n, m \to \infty\} = 1$.

Введем

$$\varphi_{nm} = \sup|\theta_{T_1T_2} - \theta_{T(n)T(m)}|,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1),\ T(m) \le T_2 \le T(m+1).$$

Получаем

$$|\theta_{T_1T_2}| \le |\theta_{T(n)T(m)}| + \varphi_{nm},\ T(n) \le T_1 \le T(n+1),\ T(m) \le T_2 \le T(m+1).$$

Имеем

$$\theta_{T_1T_2} - \theta_{T(n)T(m)} = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 - \frac{1}{n^2m^2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 - \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 - \frac{1}{n^2m^2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T_1T_2}\left(\int_0^{T_1}\int_0^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 - \int_0^{T_1}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^{T_1}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 - \int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 \right) - \frac{1}{n^2m^2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{T_1T_2}\left(\int_0^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \int_{n^2}^{T_1}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 \right) -$$

$$- \frac{1}{n^2m^2}\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \frac{1}{T_1T_2}\int_{n^2}^{T_1}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{T_1T_2} - \frac{1}{n^2m^2} \right)\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{n^2}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 +$$

$$+ \frac{1}{T_1T_2}\int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \frac{1}{T_1T_2}\int_{n^2}^{T_1}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 + \left(\frac{1}{T_1T_2} - \frac{1}{n^2m^2} \right)\int_0^{n^2}\int_0^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2.$$

Обозначим

$$\delta_{nm} = \sup\left\{ \frac{1}{T_1T_2}\int_0^{n^2}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1),\ T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\},$$

$$\nu_{nm} = \sup\left\{ \frac{1}{T_1T_2} \int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\},$$

$$\gamma_{nm} = \sup\left\{ \frac{1}{T_1T_2} \int_{n^2}^{T_1}\int_{0}^{m^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\}.$$

Тогда

$$\varphi_{nm} \le \delta_{nm} + \nu_{nm} + \gamma_{nm} +$$

$$+\sup\left\{ \left| \left(\frac{n^2m^2}{T_1T_2} - 1 \right) \theta_{T(n)T(m)} \right|, T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\}. \quad (8)$$

Далее,

$$E(\delta_{nm})^2 \le E\sup\left\{ \left(\frac{1}{T_1T_2} \int_0^{n^2}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2 \right)^2, T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\} \le$$

$$\le E\sup\left\{ \frac{1}{T_1^2T_2^2} \int_{m^2}^{T_2} dt_2 \int_{m^2}^{T_2} \left(\int_0^{n^2} \beta_{t_1t_2} dt_1 \right)^2 dt_2,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\} \le$$

$$\le E\left\{ \frac{(m+1)^2 - m^2}{n^4m^4} \int_{m^2}^{(m+1)^2} \left(\int_0^{n^2}\int_0^{n^2} \beta_{t_1t_2}\beta_{s_1t_2} dt_1 ds_1 \right) dt_2 \right\} =$$

$$= \frac{(m+1)^2 - m^2}{n^4m^4} \int_{m^2}^{(m+1)^2} \left(\int_0^{n^2}\int_0^{n^2} E(\beta_{t_1t_2}\beta_{s_1t_2})\, dt_1 ds_1 \right) dt_2 \le$$

$$\le c_3 \frac{[(m+1)^2 - m^2]^2}{n^4m^4} \le \frac{c_4}{n^4m^2}.$$

Аналогично $E(\gamma_{nm})^2 \le \dfrac{c_5}{n^2m^4}$. Следовательно,

$$P\{\delta_{nm} \to 0, \gamma_{nm} \to 0, n, m \to \infty\} = 1.$$

Далее,

$$E(\nu_{nm})^2 \le E\sup\left\{ \frac{1}{T_1T_2} \int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2} dt_1 dt_2,\ T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\}^2 =$$

$$= E\sup\left\{ \frac{1}{T_1^2T_2^2} \int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2}\int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} \beta_{t_1t_2}\beta_{s_1s_2} dt_1 dt_2 ds_1 ds_2, T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\} \le$$

$$\le E\sup\left\{ \frac{1}{T_1^2T_2^2} \int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2}\int_{n^2}^{T_1}\int_{m^2}^{T_2} |\beta_{t_1t_2}\beta_{s_1s_2}|\, dt_1 dt_2 ds_1 ds_2, \right.$$

$$\left. T(n) \le T_1 \le T(n+1), T(m) \le T_2 \le T(m+1) \right\} \le$$

$$\le E\left\{\frac{1}{n^4m^4}\int\limits_{n^2}^{(n+1)^2}\int\limits_{m^2}^{(m+1)^2}\int\limits_{n^2}^{(n+1)^2}\int\limits_{m^2}^{(m+1)^2}|\beta_{t_1t_2}\beta_{s_1s_2}|\,dt_1dt_2ds_1ds_2\right\}\le$$

$$\le\frac{c_6\{(n+1)^2-n^2\}^2\{(m+1)^2-m^2\}^2}{n^4m^4}\le\frac{c_7}{n^2m^2}.$$

Тогда $P\{\nu_{nm}\to 0,\, n, m\to\infty\}=1$.

Поскольку при $n^2\le T_1\le(n+1)^2$, $m^2\le T_2\le(m+1)^2$ имеем

$$\left|\frac{n^2m^2}{T_1T_2}-1\right|\le 1,$$

из (8) следует $P\{\varphi_{nm}\to 0,\, n, m\to\infty\}=1$. Тогда $P\{\theta_{T_1T_2}\to 0,\, T_1, T_2\to\infty\}=1$.

Аналогично оценивается левая производная. Теперь из условия 3 следует утверждение леммы.

Теорема 1. С вероятностью 1 существуют $T_{01}=T_{01}(\omega), T_{02}=T_{02}(\omega)$ такие, что при всех $T_1>T_{01}, T_2>T_{02}$ задача (1) имеет единственное решение $x(T_1,T_2)=x_0$.

Доказательство. В силу (2), (3) $F'_+(x_0)\ge c$, $F'_-(x_0)\ge c$.

Согласно лемме 2 с вероятностью 1, начиная с некоторых T_{01}, T_{02}, имеем

$$(F_{T_1T_2})'_+(x_0)>0,\ (F_{T_1T_2})'_-(x_0)>0. \tag{9}$$

Из (9) и выпуклости $F_{T_1T_2}$ вытекает утверждение теоремы.

УТВЕРЖДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Воспользуемся теорией больших уклонений.

Теорема 2 [8, с. 53]. Пусть $\mu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$, — семейство вероятностных мер на H-замкнутом выпуклом подмножестве сепарабельного банахова пространства J. Предположим, что для любого $\lambda\in J^*$-сопряженному J пространству существует

$$\Lambda(\lambda)\equiv\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\varepsilon_1\varepsilon_2\Lambda_{\mu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)\in[-\infty,+\infty],$$

где $\Lambda_\mu(\lambda)=\ln\int\limits_J\exp\{\langle\lambda, x\rangle\}\mu(dx)$, $\langle\lambda, x\rangle$ — соотношение двойственности. Обозначим $\Lambda^*(q)=\sup\{\langle\lambda, q\rangle-\Lambda(\lambda),\, \lambda\in J^*\}$, $q\in H$. Тогда Λ^* неотрицательна, выпукла, полунепрерывна снизу и для любого компактного множества $A\subset H$ получим

$$\limsup_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\varepsilon_1\varepsilon_2\ln(\mu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)(A))\le-\inf\{\Lambda^*(q),\, q\in A\}.$$

Определение 1 [8]. Пусть Σ — сепарабельное банахово пространство, $\{\zeta(t_1,t_2),\,(t_1,t_2)\in R^2\}$ — однородное в узком смысле случайное поле на (Ω, G, P) со значениями в Σ. При $\tau>0$ случайные величины $\eta_1,\ldots,\eta_p$, $p\ge 2$, называются τ-измеримо отделенными, если η_j является $\sigma\{\zeta(t_1,t_2),\,(t_1,t_2)\in H_j\}$-измеримой для всех $j\in\{1,\ldots,p\}$, где $d(H_i,H_j)\ge\tau$, $i\ne j$; H_j, $j=1,\ldots,p$, борелевские множества в $\mathbb{R}^2$; $d(\cdot,\cdot)$ — расстояние между множествами.

Определение 2 [8]. Говорят, что случайное поле из определения 1 удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания, если существуют $\tau_0\in R^+$ и невозрастающая функция $\alpha:\{\tau>\tau_0\}\to[1,+\infty)$ такие, что

$$\lim_{\tau\to\infty}\alpha(\tau)=1;\ ||\eta_1,\ldots,\eta_p||_{L^1}\le\prod_{j=1}^{p}||\eta_j||_{L^{\alpha(\tau)}}$$

при всех $p \ge 2$, $\tau > \tau_0$, а также τ-измеримо отделенных $\eta_1, \dots, \eta_p$, где

$$|| \eta ||_{L^r} = (E\{| \eta |^r\})^{1/r}.$$

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Предположим, что X — компактное подмножество J. Как известно [9], имеем $(C(X))^* = M(X)$ — совокупность ограниченных знаковых мер на X, а также

$$\langle g, Q \rangle = \int_X g(x) Q(dx); \; g \in C(X), \; Q \in M(X).$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\zeta(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in R^2$, — однородное в узком смысле случайное поле с непрерывными траекториями, удовлетворяющее первой гипотезе гиперперемешивания на (Ω, G, P), со значениями в компактном выпуклом множестве $K \subset C(X)$. Тогда для всех $Q \in M(X)$ существует

$$\Lambda(Q) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln \left(E \exp \int_X \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \zeta(t_1, t_2)(x) \, dt_1 dt_2 Q(dx) \right) \in [-\infty, +\infty]$$

и для любого замкнутого $A \subset K$ имеем

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \zeta(t_1, t_2) \, dt_1 dt_2 \in A \right\} \le - \inf \{\Lambda^*(g), g \in A\},$$

где $\Lambda^*(g) = \sup \left\{ \int_X g(x) Q(dx) - \Lambda(Q), Q \in M(X) \right\}$ — неотрицательная выпуклая полунепрерывная снизу функция.

Доказательство. Зафиксируем $Q \in M(X)$. Пусть τ_0 — константа из условия гиперперемешивания. Предположим, что $\tau > \tau_0$; $S_i > \tau$, $S_i < T_i$, $i = 1, 2$. Имеем $T_i = N_{T_i} S_i + r_{T_i}$, $N_{T_i} \in \mathbb{N}$, $r_{T_i} < S_i$, $i = 1, 2$.

Обозначим

$$f_{T_1 T_2} = \ln \left(E \exp \left\{ \int_X \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \zeta(t_1, t_2)(x) \, dt_1 dt_2 Q(dx) \right\} \right), \tag{10}$$

$$c = \max \{ || g ||, g \in K \}, \; || g || = \max \{ | g(x) |, x \in X \}, \; g \in C(X).$$

Введем обозначение [9]

$$v(Q, X) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} | Q(H_i) |, H_i \cap H_j = \varnothing, i \ne j, H_i \in B(X), k \in \mathbb{N} \right\} < \infty, \; Q \in M(X).$$

Имеем

$$[0, T_1] \times [0, T_2] = \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1] \times [j_2 S_2, (j_2+1) S_2]\} \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1] \times [N_{T_2} S_2, T_2]\} \bigcup$$

$$\bigcup \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[N_{T_1} S_1, T_1] \times [j_2 S_2, (j_2+1) S_2]\} \bigcup [N_{T_1} S_1, T_1] \times [N_{T_2} S_2, T_2] =$$

$$
= \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau]\times[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \{[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau]\times[N_{T_2}S_2,T_2]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[N_{T_2}S_2,T_2]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[N_{T_1}S_1,T_1]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau]\} \bigcup
$$

$$
\bigcup \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[N_{T_1}S_1,T_1]\times[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2]\} \bigcup [N_{T_1}S_1,T_1]\times[N_{T_2}S_2,T_2].
$$

Следовательно,

$$
f_{T_1T_2} = \ln\left(E\exp\left\{ \int_X \left[\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 + \right.\right.\right.
$$

$$
+ \sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 +
$$

$$
+ \sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1} \int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 +
$$

$$
+ \sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1} \int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2} \zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2 +
$$

$$
+ \sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{N_{T_2}S_2}^{T_2} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 +
$$

$$
+ \sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1} \int_{N_{T_2}S_2}^{T_2} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 + \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1} \int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2 +
$$

$$
\left.\left.\left. + \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1} \int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2} \zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2 + \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1} \int_{N_{T_2}S_2}^{T_2} \zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2 \right] Q(dx) \right\} \right). \quad (11)
$$

Имеют место оценки

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau^2 v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_X \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_2}\tau v(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2};$$

$$\int_X \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X);$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{(j_2+1)S_2-\tau}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{(j_1+1)S_1-\tau}^{(j_1+1)S_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le c\tau(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\int_X \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{N_{T_2}S_2}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{N_{T_1}S_1}^{T_1}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\le cr_{T_1}(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_2}.$$

Обозначим

$$A_1=\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\int_X \int_{j_1S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\int_{j_2S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx).$$

Аналогично введем обозначения для остальных слагаемых под знаком экспоненты в (11). Получаем

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\sum_{i=1}^{9}A_i\right\}\right)=\ln\left(E\prod_{i=1}^{9}\exp A_i\right)\le$$

$$\le \ln(\exp\{c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\exp\{c\tau(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\times$$

$$\times\exp\{c\tau^2 v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\exp\{c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}\}\times$$

$$\times\exp\{c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}\}\exp\{cr_{T_1}(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_2}\}\exp\{c\tau r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}\}\times$$

$$\times\exp\{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)\}\le E\exp A_1)=$$

$$=c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau^2v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+$$

$$+c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+cr_{T_1}(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_2}+$$

$$+cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2}+cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)+\ln(E\exp A_1).$$

Имеем

$$\exp A_1 = \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \exp \int_X \int_{j_1 S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{j_2 S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx).$$

В силу первой гипотезы гиперперемешивания

$$E \exp A_1 \le$$

$$\le \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \left(E \left\{ \left[\exp \int_X \int_{j_1 S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{j_2 S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \right]^{\alpha(\tau)} \right\} \right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}} =$$

$$= \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \left(E \left\{ \exp \left[\alpha(\tau) \int_X \int_{j_1 S_1}^{(j_1+1)S_1-\tau} \int_{j_2 S_2}^{(j_2+1)S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \right] \right\} \right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}} =$$

$$= \left(E \left\{ \exp \left[\alpha(\tau) \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \right] \right\} \right)^{\frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)}}.$$

Далее, имеем

$$\alpha(\tau) \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) =$$

$$= (\alpha(\tau)-1) \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) +$$

$$+ \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \le (\alpha(\tau)-1) c (S_1-\tau)(S_2-\tau) v(Q, X) +$$

$$+ \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx).$$

Запишем

$$\int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 = \int_0^{S_1} \int_0^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 - \int_{S_1-\tau}^{S_1} \int_0^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 -$$

$$- \int_0^{S_1-\tau} \int_{S_2-\tau}^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 \le \int_0^{S_1} \int_0^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 + c\tau S_2 + c(S_1-\tau)\tau.$$

Следовательно,

$$\int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \le \int_X \int_0^{S_1} \int_0^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) +$$

$$+ c\tau S_2 v(Q, X) + c(S_1-\tau)\tau v(Q, X).$$

Получаем

$$\alpha(\tau) \int_X \int_0^{S_1-\tau} \int_0^{S_2-\tau} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) \le \int_X \int_0^{S_1} \int_0^{S_2} \zeta(t_1, t_2)(x) dt_1 dt_2 Q(dx) +$$

$$+ c\tau S_2 v(Q, X) + c(S_1-\tau)\tau v(Q, X) + (\alpha(\tau)-1) c (S_1-\tau)(S_2-\tau) v(Q, X).$$

Тогда
$$\exp\left[\alpha(\tau)\int\limits_X\int\limits_0^{S_1-\tau}\int\limits_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\le$$
$$\le\exp\left[\int\limits_X\int\limits_0^{S_1}\int\limits_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\right]\times$$
$$\times\exp\left[c\tau S_2 v(Q,X)\right]\exp[c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)]\times$$
$$\times\exp\left[(\alpha(\tau)-1)\,c\,(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)\right].$$

Имеем
$$\ln(E\exp A_1)\le\ln\left\{\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int\limits_X\int\limits_0^{S_1-\tau}\int\limits_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}}\right\}=$$
$$=\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}\ln\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\int\limits_X\int\limits_0^{S_1-\tau}\int\limits_0^{S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)\,dt_1dt_2Q(dx)\right]\right\}\right)\le$$
$$\le\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}\ln\Bigg(\exp[c\tau S_2 v(Q,X)]\exp[c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)]\times$$
$$\times\exp[(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)]\times$$
$$\times E\exp\left[\int\limits_X\int\limits_0^{S_1}\int\limits_0^{S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)dt_1dt_2Q(dx)\right]\Bigg)=$$
$$=\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}(c\tau S_2 v(Q,X)+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+$$
$$+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

Получаем
$$f_{T_1T_2}\le c\tau(S_1-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau^2 v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+$$
$$+c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}+cr_{T_1}(S_2-\tau)v(Q,X)N_{T_2}+$$
$$+cr_{T_1}\tau v(Q,X)N_{T_2}+cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)+\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}(c\tau S_2 v(Q,X)+$$
$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

Следовательно,
$$\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+$$
$$+\frac{c\tau^2 v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}}{N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}+\frac{c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}}{N_{T_1}S_1T_2}+\frac{c\tau r_{T_2}v(Q,X)N_{T_1}}{N_{T_1}S_1T_2}+$$
$$+\frac{c(S_2-\tau)r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}}{N_{T_2}S_2T_1}+\frac{c\tau r_{T_1}v(Q,X)N_{T_2}}{N_{T_2}S_2T_1}+\frac{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)}{T_2T_1}+\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)N_{T_1}S_1N_{T_2}S_2}\times$$
$$(c\tau S_2 v(Q,X)+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2})=$$

$$=\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c\tau^2 v(Q,X)}{S_1S_2}+$$

$$+\frac{c(S_1-\tau)r_{T_2}v(Q,X)}{S_1T_2}+\frac{c\tau r_{T_2}v(Q,X)}{S_1T_2}+\frac{c(S_2-\tau)r_{T_1}v(Q,X)}{S_2T_1}+$$

$$+\frac{c\tau r_{T_1}v(Q,X)}{S_2T_1}+\frac{cr_{T_1}r_{T_2}v(Q,X)}{T_2T_1}+\frac{1}{\alpha(\tau)S_1S_2}(c\tau S_2 v(Q,X)+$$

$$+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

Устремив T_1, T_2 к ∞, получим

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c(S_2-\tau)\tau v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{c\tau^2 v(Q,X)}{S_1S_2}+\frac{1}{\alpha(\tau)S_1S_2}\times$$

$$\times(c\tau S_2 v(Q,X)+c(S_1-\tau)\tau v(Q,X)+(\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X)+f_{S_1S_2}).$$

При $S_1, S_2\to\infty$ имеем

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\frac{c(\alpha(\tau)-1)v(Q,X)}{\alpha(\tau)}+\frac{1}{\alpha(\tau)}\liminf_{S_1,S_2\to\infty}\frac{f_{S_1S_2}}{S_1S_2}.$$

Устремив τ к ∞, получим

$$\limsup_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\le\liminf_{S_1,S_2\to\infty}\frac{f_{S_1S_2}}{S_1S_2}.$$

Следовательно, существует

$$\Lambda(Q)=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}\in[-\infty,+\infty].$$

Применим теорему 2. Имеем

$$H=K,\ J=C(X),\ J^*=M(X),\ \langle Q,g\rangle=\int_X g(x)Q(dx),\ \varepsilon_1=\frac{1}{T_1},\ \varepsilon_2=\frac{1}{T_2}.$$

Далее, $\mu\left(\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2}\right)$ — вероятностная мера на $C(X)$, задаваемая распределением $\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)\,dt_1dt_2$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0}\varepsilon_1\varepsilon_2\Lambda_{\mu(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}\left(\frac{Q}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)=$$

$$=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\ln\left(\int_{C(X)}\exp\left\{\int_X g(x)T_1T_2Q(dx)\right\}\mu\left(\frac{1}{T_1},\frac{1}{T_2}\right)(dg)\right)=$$

$$=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{1}{T_1T_2}\ln\left(E\exp\left\{\int_X\left(\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}\zeta(t_1,t_2)\,dt_1dt_2\right)(x)T_1T_2Q(dx)\right\}\right)=$$

$$=\lim_{T_1,T_2\to\infty}\frac{f_{T_1T_2}}{T_1T_2}=\Lambda(Q).$$

Теорема доказана.

ОЦЕНКА БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ИСХОДНОЙ ЗАДАЧИ

Вернемся к задаче (1).

Теорема 4. Пусть поле $\{\xi(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2\}$ удовлетворяет первой гипотезе гиперперемешивания. Предположим также, что функция h не зависит от t_1, t_2. Сделаем еще предположение, что функция $\min[h'_+(x_0, y), h'_-(x_0, y)], \ y \in R$, непрерывна.

Тогда

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P(A^c_{T_1 T_2}) \le -\inf\{V^*(z), z \in [-L; 0]\}, \tag{12}$$

где

$$V^*(z) = \sup\{zQ(X) - V(Q), Q \in M(X)\},$$

$$V(Q) = \lim \frac{1}{T_1 T_2} \ln E \exp\left\{Q(X) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \min[h'_+(x_0, \xi(t_1, t_2)), h'_-(x_0, \xi(t_1, t_2))]\, dt_1 dt_2\right\},$$

$$T_1, T_2 \to \infty,$$

$$A_{T_1 T_2} = \{\omega : \arg\min F_{T_1 T_2}(x) = \{x_0\}, x \in X\}, \quad A^c_{T_1 T_2} = \Omega - A_{T_1 T_2}.$$

Доказательство. Имеем

$$P(A^c_{T_1 T_2}) = P\{\min[(F_{T_1 T_2})'_+(x_0), (F_{T_1 T_2})'_-(x_0)] \in [-L; 0]\} \le$$

$$\le P\left\{\frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \min[h'_+(x_0, \xi(t_1, t_2)), h'_-(x_0, \xi(t_1, t_2))] dt_1 dt_2 \in [-L; 0]\right\}. \tag{13}$$

Обозначим $K = \{\alpha(x) = \alpha, x \in X; \alpha \in [-L; L]\}$. Очевидно, что K — компактное выпуклое подмножество $C(X)$.

Исследуем функцию

$$a_{t_1 t_2} = a_{t_1 t_2}(x) = \min[h'_+(x_0, \xi(t_1, t_2)), h'_-(x_0, \xi(t_1, t_2))], \ x \in X.$$

При всех t_1, t_2, ω имеем $a_{t_1 t_2}(\cdot) \in K$. Положим $K_1 = \{\alpha(x) = \alpha, x \in X; \alpha \in [-L; 0]\}$. Получаем, что K_1 — замкнутое подмножество K. Далее,

$$P\left\{\frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \min[h'_+(x_0, \xi(t_1, t_2)), h'_-(x_0, \xi(t_1, t_2))] dt_1 dt_2 \in [-L; 0]\right\} =$$

$$= P\left\{\left(\frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} a_{t_1 t_2} dt_1 dt_2 = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} a_{t_1 t_2} dt_1 dt_2(x), x \in X\right) \in K_1\right\}. \tag{14}$$

Применим теорему 3. Имеем

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P\left\{\frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} a_{t_1 t_2} dt_1 dt_2 \in K_1\right\} \le -\inf\{V^*(z), z \in K_1\}, \tag{15}$$

где

$$V^*(z) = \sup\{zQ(X) - V(Q), Q \in M(X)\},$$

$$V(Q) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln E \exp\left\{\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \int_X a_{t_1 t_2} Q(dx) dt_1 dt_2\right\} =$$

$$= \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln E \exp\left\{Q(X) \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} a_{t_1 t_2} dt_1 dt_2\right\}.$$

Из (13)–(15) вытекает (12). Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты можно использовать во многих областях, где возникает задача стохастической оптимизации, в частности, при оценке коэффициентов регрессии, в задачах распознавания и т.д., когда требуется найти оптимальное значение параметра при неоднородных или однородных наблюдениях случайного поля на плоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikhalevich V.S., Knopov P.S., Golodnikov A.N. Mathematical models and methods of riks assessment in ecologically hazardous industries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1994. Vol. 30, N 2. P. 259–273.
2. Knopov P.S., Kasitskaya E.J. Properties of empirical estimates in stochastic optimization and identification problems programming problems. *Annals of Operations Research*. 1995. Vol. 56, N 1. P. 225–239.
3. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of m-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. Vol. 33, N 4. P. 468–481.
4. Кнопов П.С., Касицкая Е.И. О больших уклонениях эмпирических оценок в задаче стохастического программирования при нестационарных наблюдениях. *Кибернетика и системный анализ.* 2010. Т. 46, № 5. С. 46–50.
5. Леоненко Н.Н. Об оценках коэффициентов линейной регрессии однородного случайного поля. *Укр. мат. журн.* 1978. № 6. С. 749–756.
6. Ivanov A.V., Leonenko N.N. Statistical analysis of random fields. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1989. 244 p.
7. Кнопов П.С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем. Киев: Наук. думка, 1981. 151 с.
8. Deuscel J.-D., Stroock D.W. Large deviations. Boston, etc.: Academ. Press, 1989. 306 p.
9. Dunford N., Schwartz J. Linear operators, Part I: General theory. New York: Interscience, 1957. 896 p.

Надійшла до редакції 30.07.2020

П.С. Кнопов, Є.Й. Касіцька

КОНЗИСТЕНТНІСТЬ І ВЛАСТИВОСТІ ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ ЕМПІРИЧНИХ ОЦІНОК В ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ ЗА НЕОДНОРІДНИХ ТА ОДНОРІДНИХ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Анотація. Розглянуто задачу стохастичного програмування, у якій емпіричну функцію будують за неоднорідними спостереженнями однорідного випадкового поля. Досліджено однорідне у вузькому розумінні випадкове поле, що задовольняє умові сильного перемішування. Наведено умови, за яких емпірична оцінка є конзистентною та оцінено її великі відхилення для однорідних спостережень.

Ключові слова: задача стохастичного програмування, однорідне у вузькому розумінні випадкове поле, неоднорідні спостереження, умова сильного перемішування, великі відхилення.

P.S. Knopov, E.J. Kasitskaya

CONSISTENCY AND PROPERTIES OF LARGE DEVIATIONS OF EMPIRICAL ESTIMATES IN STOCHASTIC OPTIMIZATION PROBLEMS FOR HOMOGENEOUS RANDOM FIELDS UNDER NONHOMOGENEOUS AND HOMOGENEOUS OBSERVATIONS

Abstract. The paper considers a stochastic programming problem with the empirical function constructed from nonhomogeneous observations of a homogeneous random field. The field satisfying the strong mixing condition is investigated in the problem. The conditions whereby the empirical estimate is consistent are given, and large deviations of the estimate for homogeneous observations are considered.

Keywords: stochastic programming problem, a homogeneous in a strict sense random field, nonhomogeneous observations, strong mixing condition, large deviations.

Кнопов Павел Соломонович,
чл.-кор. НАН Украины, профессор, заведующий отделом Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: knopov1@yahoo.com.

Касицкая Евгения Иосифовна,
канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: e.kasitskaya@gmail.com.