УДК 004.82.855'24

О.В. ОЛЕЦЬКИЙ, Є.В. ІВОХІН

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕДУРИ ФОРМУВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ РІВНОВАГИ АЛЬТЕРНАТИВ У БАГАТОАГЕНТНОМУ СЕРЕДОВИЩІ У ПРОЦЕСАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ БІЛЬШІСТЮ ГОЛОСІВ

Анотація. З метою аналізу індивідуальної та колективної поведінки агентів запропоновано модель під назвою «стан–імовірність вибору». Вона ґрунтується на явному розгляді ймовірностей вибору альтернатив та на марковському ланцюзі зміни цих імовірностей. Центральне місце в моделі займає матриця «стан–імовірність вибору», рядки якої відповідають станам, а стовпці — альтернативам. У межах цієї моделі встановлено деякі достатні умови динамічної рівноваги двох альтернатив, якщо рішення приймаються простою більшістю голосів. Динамічна рівновага означає, що по черзі вибираються різні альтернативи, і у випадку багаторазового вибору жодна з них не має переваг над іншими. Отримано також конструктивний спосіб формування матриць «стан–імовірність вибору», для яких забезпечується динамічна рівновага альтернатив.

Ключові слова: ситуація прийняття рішень, динамічна рівновага, агенти.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Дослідження індивідуальної та колективної поведінки агентів має досить давню історію. Особливу увагу приділяють процесам прийняття рішень у ситуаціях, що характеризуються набором різних можливих станів та альтернатив, вибір яких здійснюється шляхом врахування думки колективу агентів. Серед відомих підходів та моделей поведінки агентів, зокрема на основі аналізу можливих переходів між станами, можна згадати марковські процеси прийняття рішень [1, 2], алгебраїчні моделі взаємодії агента із середовищем [3], підходи на основі теорії автоматів [3, 4], теорію колективного прийняття рішень [5] та ін. Втім, цей напрямок не втрачає актуальності, і з ним пов'язана низка важливих наукових проблем.

Значний інтерес становлять дослідження механізмів, що зумовлюють як зміну поведінки агентів, так і прийняття індивідуальних та колективних рішень у тій чи іншій ситуації. Залучення цих механізмів до розгляду надає змогу здійснювати моніторинг процесу прийняття рішень, формулювати та розв'язувати різного роду оптимізаційні задачі та на основі цього здійснювати керування процесом. У цьому контексті, зокрема, видається перспективним розгляд нечітких оптимізаційних задач, в яких беруть до уваги невизначеність оцінки вибору альтернатив під час формалізації обмежень [6].

Зрозуміло, що дослідження механізмів прийняття рішень потребує розвитку відповідних моделей та формалізацій, що ґрунтуються на цих моделях. У [7] запропоновано формалізацію процедури вибору в ситуації прийняття рішення, яку коротко можна охарактеризувати як модель «стан ситуації–ймовірність дії». Ця модель ґрунтується на явному розгляді ймовірностей прийняття конкретних рішень та на марковському ланцюзі зміни цих імовірностей; вона була застосована для дослідження механізму вибору між альтернативами-кандидатами. Зокрема, в [7] отримано достатні умови встановлення паритету між двома кандидатами, але ці умови є дуже обмежуючими.

Метою цієї роботи є подальше узагальнення моделі «стан ситуації-ймовірність дії» у формі встановлення в межах цієї моделі умов динамічної рівноваги альтернатив, якщо всі варіанти є рівноправними та вибір здійснюється простою більшістю голосів. Тут динамічною рівновагою будемо називати ситуацію прийняття рішення за умови, що по черзі вибираються різні альтернативи, та у випадку багаторазового вибору жодна з них не має переваг над іншими. Для опису механізму формування динамічної рівноваги у всякому разі потрібно розглядати певну математичну модель. У цій статті запропоновано одну з таких моделей.

1. МОДЕЛЬ «СТАН–ІМОВІРНІСТЬ ДІЇ»

Розглянемо ситуацію прийняття рішення, яка характеризується набором можливих станів $S=\{s_1,\ldots,s_m\}$. Припустимо, що є достатньо велика кількість агентів, які в кожному стані ситуації здійснюють вибір з n допустимих альтернатив $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$, для яких у кожен момент часу задано певний розподіл імовірностей вибору.

У межах дослідження вважається можливою динаміка станів у ситуації прийняття рішення, переходи між якими інтерпретуються у вигляді змін цих розподілів. Виходячи з цього, у подальшому контексті будемо зіставляти стан ситуації з одним із можливих розподілів імовірностей вибору альтернатив.

Припустимо, що є відомими такі компоненти:

- $Z=(z_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, — матриця «стан-імовірність дії» розміром $m\times n$, рядки якої відповідають станам (розподілам імовірностей вибору), а стовпчики — альтернативам, при цьому $z_{ij}=P(a_j\,|\,s_i)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, — ймовірність того, що агент у ситуації, яка перебуває в стані s_i, вибере альтернативу a_j (матриця вводиться для формалізованого задання ймовірностей вибору альтернатив агентом);
- $\Pi=(\pi_{rs})$, $r,s=\overline{1,m}$, — матриця перехідних імовірностей розміром $m\times m$ для марковського ланцюга переходів між станами (по суті такі переходи означають зміну міри впевненості агента та відповідно — ймовірностей його індивідуального вибору). З теорії марковських процесів добре відомо, що за певних умов існує стаціонарний вектор $p=(p_1,\ldots,p_m)$, де $p_k=P(s_k)$ — стаціонарна ймовірність того, що ситуація в даний момент часу буде перебувати у стані s_k. При цьому вектор p є головним лівим власним вектором матриці Π. Тоді формалізацію процедури вибору альтернатив у ситуації прийняття рішення можна записати у вигляді моделі $\langle Z,\Pi\rangle$ або у вигляді моделі $\langle Z,p\rangle$, причому другий варіант відрізняється лише тим, що для нього вектор p задається одразу. Зауважимо, що вектор стаціонарних імовірностей існує не для будь-якого марковського ланцюга. Для деяких задач зручніше працювати з перехідними ймовірностями, а для інших — зі стаціонарними (наприклад, коли йдеться про процеси, пов'язані з навчанням). Тому в межах моделі «стан–імовірність дії» слід розглядати обидва варіанти.

Для сформульованої моделі ні кількість станів, ні їхня множина не є наперед постульованими; модель припускає значну свободу у формуванні множини станів, і цю множину за потреби можна змінювати. Звернемо також увагу на те, що для багатоагентного середовища принциповими є не стільки ймовірності перебування системи в певному стані (тобто розподіл імовірності прийняття індивідуального рішення окремим агентом), скільки відносна частка агентів, які приймають рішення з тими чи іншими ймовірностями. Важливим у цьому контексті є те, що за достатньої кількості агентів ці величини майже не відрізняються, і в разі збільшення кількості агентів різниця між ними має прямувати до нуля.

У межах уведеної формалізації можна записати просте та водночас досить важливе співвідношення. Позначимо υ_j, $j = \overline{1, n}$, ймовірність того, що у ситуації, яка перебуває в конкретному стані, агентом буде обрано j-ту альтернативу. Тоді за правилом повної ймовірності отримуємо

$$\upsilon_j = P(a_j) = \sum_{i=1}^{m} P(s_i) \cdot P(a_j | s_i) = \sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1}$$

або, більш коротко, в матричному вигляді $\upsilon = pZ$.

Відмітимо, що за побудовою сума елементів кожного рядка матриці «стан–імовірність дії» дорівнює одиниці, що робить її подібною до стохастичних матриць. З огляду на цю аналогію будемо називати такі матриці прямокутними стохастичними.

Для дослідження умов формування динамічної рівноваги альтернатив особливо велике значення має частковий випадок матриці «стан–імовірність дії», коли суми елементів кожного стовпчика також рівні між собою (очевидно, що ці суми повинні дорівнювати m / n). Будемо називати такі матриці збалансованими (прямокутними стохастичними) матрицями. Далі у статті розглядатимемо тільки збалансовані матриці, якщо не буде явно сказано щось інше.

Важливим підкласом збалансованих стохастичних прямокутних матриць, який виникає для $m = n$, є подвійно-стохастичні матриці [8], тобто квадратні стохастичні матриці розміром $n \times n$, сума елементів кожного стовпця яких дорівнює $1 = n / n$.

2. ЗБАЛАНСОВАНІ МАТРИЦІ ТА ДИНАМІЧНА РІВНОВАГА АЛЬТЕРНАТИВ

У роботі [7] доведено достатні (але не необхідні) умови рівноймовірного вибору між двома альтернативами ($n = 2$), для формулювання і доведення яких суттєво використовували вказану специфіку. Концепція збалансованих матриць надає змогу узагальнити це твердження на випадок довільної кількості альтернатив. Іншими словами, можна довести, що якщо матриця «стан–імовірність дії» є збалансованою, а стани є рівноймовірними, то агент вибирає будь-яку альтернативу з імовірністю $1/n$.

Знову ж таки, ця умова не є необхідною, і вона є суттєво обмежуючою: рівноймовірний вибір може здійснюватися і в тих випадках, коли ймовірності перебування ситуації в різних станах є різними, навіть якщо матриця «стан–вибір дії» є збалансованою. Отже, варто шукати інші, менш обмежуючі умови.

Спочатку більш детально розглянемо випадок $n = 2$, коли вибір рішення здійснюється простою більшістю голосів. Очевидно, що для цього випадку за достатньої кількості агентів з огляду на закон великих чисел динамічна рівновага фактично є можливою лише у випадку $\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.5$. У табл. 1 наведено результати чи-

Таблиця 1. Залежність імовірності Q прийняття рішень колективом агентів від імовірності індивідуального вибору P та кількості агентів N

N	**P**						
	0.47	**0.48**	**0.49**	**0.5**	**0.51**	**0.52**	**0.53**
1	0.47	0.48	0.49	0.5	0.51	0.52	0.53
5	0.445	0.47	0.485	0.5	0.515	0.53	0.555
11	0.42	0.445	0.475	0.5	0.525	0.555	0.58
101	0.27	0.345	0.42	0.5	0.58	0.655	0.73
1001	0.03	0.10	0.26	0.5	0.73	0.90	0.97
10001	≈ 0	0.0005	0.02	0.5	0.98	0.9995	≈ 1

сельного експерименту, який показує залежність імовірності колективного вибору Q від імовірності індивідуального вибору, якщо остання є близькою до 0.5. Тут P — ймовірність індивідуального вибору альтернативи, а N — кількість агентів.

З огляду на це, подальше викладення результатів передбачає умови, за яких індивідуальний вибір альтернатив здійснюється з рівними ймовірностями ($\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0.5$) для випадку двох альтернатив у межах моделі «стан–імовірність дії».

3. РІВНОВАЖНІ ВЕКТОРИ

Уведемо спеціальні поняття допустимих та рівноважних векторів.

Означення 1. Вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$ будемо називати допустимим, якщо для його елементів виконуються умови $0 \le p_i \le 1$, $i = \overline{1, m}$, та $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Означення 2. Рівноважним вектором для матриці Z будемо називати допустимий вектор p, елементи якого дорівнюють ймовірностям перебування ситуації у відповідному стані та для якого виконується умова

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i = 1/n, j = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Перш за все розглянемо випадок $n = 2$; для нього співвідношення (2) набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i = 0.5, j = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Далі будемо розглядати рівноважні вектори лише для збалансованих матриць, якщо не буде явно вказано щось інше.

Насправді, якщо вектор є рівноважним для деякої конкретної збалансованої матриці, він має бути рівноважним і для значно більш широкого спектра збалансованих матриць відповідного розміру.

Твердження 1 (про опуклу комбінацію рівноважних векторів). Нехай $p^1, \ldots, p^q$ — набір m-векторів, рівноважних для деякої матриці Z. Тоді будь-яка їхня опукла комбінація є рівноважним вектором тієї самої розмірності m для Z.

Доведення. Очевидно, достатньо довести це твердження для двох векторів. Нехай є два рівноважні вектори p^1 та p^2. Утворимо їхню опуклу комбінацію у вигляді

$$p = \alpha p^1 + (1-\alpha) p^2;\ 0 \le \alpha \le 1,$$

та підставимо в (1):

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i = \alpha \sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i^1 + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i^2 = \frac{1}{n}\alpha + \frac{1}{n} \cdot (1-\alpha) = \frac{1}{n} \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Допустимість утвореної опуклої комбінації є очевидною.

Отже, p дійсно є рівноважним вектором. Твердження доведено.

Це твердження є вірним не лише для $n = 2$, а має більш загальний характер і залишається справедливим для будь-якого n.

Як зазначено раніше, роботу присвячено встановленню достатніх умов динамічної рівноваги альтернатив для $n = 2$, які є менш жорсткими, ніж у [7]. Центральне місце при цьому займають:

— допустимі m-вектори, для яких виконується умова симетричності, тобто

$$\forall j \in \{1, 2\} \quad \forall i_1 = \overline{1, m}\ \exists i_2 = m - i_1 + 1:\ p_{i_1} = p_{i_2}, \tag{4}$$

— збалансовані прямокутні стохастичні матриці розміром $(m \times 2)$ ($(m\times 2)$–матриці) такі, що

$$\forall j \in \{1,2\} \quad \forall i_1 = \overline{1, m}\ , \exists i_2 = m - i_1 + 1 \colon z_{i_1 j} = 1 - z_{i_2 j}\,. \qquad (5)$$

Легко бачити, що опукла комбінація симетричних допустимих векторів теж є симетричним допустимим вектором. Дійсно, для довільно вибраного індексу k та відповідного індексу $l = m - k + 1$ справджуються умови

$$p_k^1 = p_l^1,$$

$$p_k^2 = p_l^2$$

і для опуклої комбінації $\alpha p_k^1 + (1-\alpha)\, p_k^2 = \alpha p_l^1 + (1-\alpha)\, p_l^2$. Допустимість цієї опуклої комбінації є очевидною.

Далі суттєве значення матиме поняття центрального індексу $k_c = [m/2] + 1$. Стан ситуації з індексом k_c будемо називати центральним станом ситуації, а відповідний елемент p_{k_c} — центральним елементом. Центральний стан може бути присутнім або відсутнім. Якщо він присутній, то m — непарне, якщо відсутній — парне. З умови (5) випливає, що $z_{k_c j} = 0.5,\ j = \overline{1, n}$.

Твердження 2. Для допустимого симетричного m-вектора p справджуються такі співвідношення: $\sum\limits_{i<m/2} p_i = \frac{1}{2} - \frac{p_{k_c}}{2}$, якщо центральний елемент присутній, і $\sum\limits_{i<=m/2} p_i = \frac{1}{2}$, якщо відсутній.

Доведення є очевидним.

4. ДОСТАТНЯ УМОВА РІВНОВАЖНОСТІ ДЛЯ $n = 2$

Теорема 1 (про симетричне врівноваження). Якщо m-вектор p є допустимим та симетричним, а для $(m\times 2)$-матриці Z виконується співвідношення (5), то p є рівноважним вектором для Z.

Доведення. Нехай центральний елемент p_{k_c} присутній. Підставимо елементи вектора p в (1) з урахуванням твердження 2:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij}\, p_i = \sum_{i<m/2} z_{ij}\, p_i + 0.5\, p_{k_c} + \sum_{i>m/2} z_{ij}\, p_i = \sum_{i<m/2} z_{ij}\, p_i + 0.5\, p_{k_c} + \sum_{i<m/2} (1 - z_{ij})\, p_i =$$

$$= 0.5\, p_{k_c} + \sum_{i<m/2} p_i = 0.5\, p_{k_c} + 0.5 - 0.5\, p_{k_c} = 0.5,\ j = \overline{1, n}.$$

Для випадку, якщо центральний елемент відсутній, доведення є абсолютно аналогічним. Теорему доведено.

Умови цієї теореми не постулюють конкретні можливі значення компонентів рівноважного вектора, але все-таки обмежують діапазон можливих значень величиною 0.5 для всіх елементів крім центрального. Вона задає достатні, але не необхідні умови рівноважності (далі буде наведено можливість безпосередньо переконатися в цьому).

Отже, видно, що існує деяка множина симетричних допустимих векторів, рівноважних для будь-якої збалансованої матриці, для якої виконується співвідношення (5). Відповідно до твердження про опуклу комбінацію рівноважних векторів ця множина є опуклою. У наступному розділі буде наведено конструктивний спосіб отримання симетричних рівноважних векторів.

5. КОНСТРУКТИВНИЙ СПОСІБ ОТРИМАННЯ СИМЕТРИЧНИХ РІВНОВАЖНИХ ВЕКТОРІВ

Конструктивний спосіб отримання симетричних рівноважних векторів безпосередньо випливає з наступної теореми.

Теорема 2 (про симетричні рівноважні вектори як опуклі комбінації). Вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$ задовольняє умови теореми 1 про симетричне врівноваження, тобто є допустимим і симетричним тоді і тільки тоді, коли він є опуклою комбінацією опорної системи векторів, яка формується залежно від m у такий спосіб:

1) для непарного значення m опорна система векторів налічує $[m/2]+1$ m-векторів $p^{(1)}, \ldots, p^{([m/2])}$, $p^{(c)}$, $c = [m/2]+1$, елементи яких визначаються за правилами:

— для вектора $p^{(c)}$ $p_c^{(c)} = 1$, всі інші елементи дорівнюють 0;

— для всіх k від 1 до $[m/2]$ $p_k^{(k)} = 0.5$, всі інші компоненти дорівнюють 0;

2) для парного значення m опорна система векторів налічує $m/2$ m-векторів $p^{(1)}, \ldots, p^{(m/2)}$, для яких:

— для всіх k від 1 до $m/2$ $p_k^{(k)} = 0.5$, всі інші компоненти дорівнюють 0.

Доведення. Достатність. Усі опорні вектори є допустимими і симетричними. Згідно з твердженням про опуклу комбінацію рівноважних векторів та теоремою про симетричне врівноваження будь-яка їхня опукла комбінація є симетричним, допустимим та рівноважним вектором.

Необхідність. Нехай вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$ задовольняє умови теореми. Потрібно знайти вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{[m/2]}, \alpha_c)$, $\sum_{i=1}^{c} \alpha_i = 1$, коефіцієнтів опуклої комбінації такий, що $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$: $\sum_{k=1}^{[m/2]} \alpha_k p_i^{(k)} + \alpha_c p_i^{(c)} = p_i$, якщо m — непарне, або вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{m/2})$, $\sum_{i=1}^{m/2} \alpha_i = 1$: $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$: $\sum_{k=1}^{m/2} \alpha_k p_i^{(k)} = p_i$, якщо m — парне.

Легко переконатися, що для непарного m таким вектором є вектор $\alpha = (2p_1, \ldots, 2p_{[m/2]}, p_c)$, а для парного — $\alpha = (2p_1, \ldots, 2p_{[m/2]})$.

При цьому незалежно від парності величини m маємо $\sum_i \alpha_i = \sum_i p_i = 1$. Теорему доведено.

Приклад 1. Наведемо приклад опорної системи для випадку $m = 9$, а також підбору коефіцієнтів опуклої комбінації для конкретного вектора p.

Опорні вектори мають вигляд

$$p^{(1)} = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5);$$

$$p^{(2)} = (0, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0);$$

$$p^{(3)} = (0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0);$$

$$p^{(4)} = (0, 0, 0, 0.5, 0, 0.5, 0, 0, 0);$$

$$p^{(c)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Підберемо належні коефіцієнти опуклої комбінації для отримання вектора

$$p = (0.03, 0.12, 0.25, 0.05, 0.1, 0.05, 0.25, 0.12, 0.03).$$

Вектор коефіцієнтів дорівнюватиме $\alpha = (0.1, 0.06, 0.24, 0.5, 0.1)$.

6. ФОРМУВАННЯ ЗБАЛАНСОВАНОЇ МАТРИЦІ «СТАН–ІМОВІРНІСТЬ ДІЇ» НА ОСНОВІ КОСИМЕТРИЧНИХ НАБОРІВ

Для випадку $n = 2$ можна отримати збалансовані матриці із заданими властивостями за досить простими алгоритмами. Одним з них є пропонований алгоритм на основі косиметричних наборів значень.

Означення 3. Доповнено-симетричним набором будемо називати числовий набір $a = (a_1, \ldots, a_m)$, всі компоненти якого мають різні значення і для якого $a_i = 1 - a_{m-i+1}$, $i = \overline{1, m}$.

Домовимося, що набір a має бути упорядкованим за спаданням значень.

Означення 4. Косиметричним до заданого упорядкованого числового набору $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $0 \le a_i \le 1$, $i = \overline{1, m}$, будемо називати числовий набір $\overline{a} = (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$, для якого $\overline{a}_i = a_{m-i+1}$, $i = \overline{1, m}$.

Зрозуміло, що числовий набір $a = (a_1, \ldots, a_m)$ буде визначати косиметричний набір для набору $\overline{a} = (\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m)$, тобто вони утворюють пару взаємно косиметричних числових наборів.

Як приклад можна розглянути набір

$$a = (1, 0.9, 0.75, 0.6, 0.5, 0.4, 0.25, 0.1, 0). \tag{6}$$

Будемо вважати, що чисельні значення елементів цього набору інтерпретують результати порівняння двох альтернатив за такими правилами:

1 — альтернатива має абсолютну перевагу над іншою;
0.9 — вирішальна перевага альтернативи над іншою;
0.75 — значна перевага альтернативи над іншою;
0.6 — незначна перевага альтернативи над іншою;
0.5 — альтернативи є рівноцінними;
0.4 — незначне відставання альтернативи від іншої;
0.25 — значне відставання альтернативи від іншої;
0.1 — вирішальне відставання альтернативи від іншої;
0 — абсолютне відставання альтернативи від іншої.

Тоді алгоритм формування збалансованої матриці на основі косиметричного набору, кількість стовпчиків якої дорівнює 2, а кількість рядків дорівнює кількості елементів набору, полягає в послідовному утворенні косиметричного набору $\overline{a}$ і заповненні першого стовпчика елементами з набору a та другого стовпчика — елементами з набору $\overline{a}$.

Матриця, отримана на основі косиметричних наборів, є прямокутною стохастичною за побудовою, а її збалансованість зумовлена тим, що обидва стовпчики містять одні й ті самі елементи. Очевидно, для неї виконується співвідношення (5), і тому будь-який симетричний допустимий вектор буде для неї рівноважним.

Наприклад, матриця, сформована з використанням цього алгоритму на основі набору (6), має вигляд

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.9 & 0.1 \\ 0.75 & 0.25 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.25 & 0.75 \\ 0.1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

7. ПРО МОЖЛИВІСТЬ КОМБІНОВАНОЇ ОЦІНКИ АЛЬТЕРНАТИВ

Вибір набору (6) можна вважати досить розумним та обґрунтованим, але явне задання будь-яких елементів має органічний недолік: значною мірою втрачається гнучкість та адаптивність і часто не забезпечується виконання тих чи інших властивостей. Тому варто розглянути можливість автоматичного формування косиметричних наборів на основі певних алгоритмів. Останніми роками добре зарекомендував себе метод попарних порівнянь Сааті [9]. Проте стандартна шкала мір переваг, запропонована Сааті (1 — альтернативи рівноцінні, 3 — слабка перевага, 5 — помітна перевага, 7 — сильна перевага, 9 — вирішальна перевага), не завжди дає гарні результати. Тому на практиці часто застосовують параметризований метод Сааті [10], який за рахунок належного вибору параметру τ, $\tau > 1$, надає змогу отримати шкалу мір переваг, яка є найбільш підхожою для розглядуваної задачі. Пропонується використовувати таку шкалу: якщо слабка перевага оцінюється як τ, то наступна градація (помітна перевага) — як τ^2, і т.д.

Сам принцип формування косиметричних наборів на основі парних порівнянь є зрозумілим: кожний елемент набору отримують на основі нормалізованого головного правого власного вектора конкретної матриці парних порівнянь.

Приклад 2. Нехай для деякого індексу k перевага альтернативи 1 над альтернативою 2 оцінюється як слабка. Візьмемо $\tau = 1.5$ (у проведених експериментах це значення дає значення елементів набору, що є близькими до інтуїтивно бажаних, хоча у цьому варіанті бажано збільшити кількість станів m).

Нехай матриця парних порівнянь має вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 1/1.5 & 1 \end{pmatrix}$. Її нормалізований головний власний вектор дорівнює (0.6000; 0.4000). Відповідно до цього формуємо пару взаємно косиметричних числових наборів у вигляді $a_k = 0.6000$; $a_{m-k+1} = 0.4000$; $\bar{a}_k = 0.4000$; $\bar{a}_{m-k+1} = 0.6000$.

Виокремлення кількох підходів до оцінювання змушує звертати більшу увагу на такий аспект — слід оцінювати не тільки відносну перевагу однієї альтернативи над іншими, але й якість альтернатив як таких. Дійсно, якщо деяка альтернатива для агента є кращою за всі конкуруючі, але все одно є поганою, це спонукає незадоволеного агента до пошуку інших альтернатив. Такий ефект спостерігався, наприклад, у низці країн під час проведення політичної виборчої кампанії. Тоді для порівняння альтернатив доцільно застосовувати параметризований метод попарних порівнянь, а для оцінювання найкращого з них — один з методів нечіткого прийняття рішень (метод центру тяжіння композиції «максимум–мінімум», див. [11]).

8. ПРИКЛАД ВТРАТИ РІВНОВАГИ АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВІ ЗМІНИ КОМПОНЕНТІВ МОДЕЛІ

Якщо динамічну рівновагу альтернатив у межах моделі «стан-імовірність дії» вже встановлено, для її порушення, очевидно, потрібно змінювати компоненти моделі. Зрозуміло, що маніпулювати матрицею «стан-імовірність дії» Z немає сенсу. Навпаки, видається доцільним зафіксувати її на весь час моделювання. Крім того, раціонально зробити її збалансованою — тоді вона не буде надавати переваги жодній альтернативі; ці переваги будуть залежати виключно від перехідних та/або стаціонарних імовірностей.

Отже, якщо деякий агент бажає змінити результати колективного вибору у вигідний для себе бік, він має спровокувати перехід значної частини агентів до інших станів, і в будь-якому випадку змінити або матрицю перехідних імовірностей П, або вектор стаціонарних імовірностей. Розглянемо розгорнутий приклад, який ілюструє це положення.

Приклад 3. Візьмемо матрицю «стан-дія» Z вигляду (7) і симетричний вектор стаціонарних імовірностей $p = (0, 0.25, 0, 0.25, 0, 0.25, 0, 0.25, 0)$.

Безпосередньою підстановкою в (1) отримуємо вектор імовірностей індивідуального вибору альтернатив $\upsilon = (0.5000; 0.5000)$. Отже, вектор p дійсно є рівноважним.

Нехай деякому агенту вдалося змінити стаціонарні ймовірності, які визначаються вектором $p_1 = (0, 0.35, 0, 0.15, 0, 0.25, 0, 0.25, 0)$. Тепер підстановка в (1) дає $\upsilon_1 = (0.5300; 0.4700)$. Динамічну рівновагу порушено. Як видно з табл. 1, за досить великої кількості агентів цього цілком достатньо, щоб забезпечити стійку перевагу першій альтернативі.

9. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖИНИ РІВНОВАЖНИХ ВЕКТОРІВ НА ОСНОВІ ЗВОРОТНОЇ ЗАДАЧІ

Очевидно, що множину рівноважних m-векторів (принаймні для заданого Z) можна окреслити на основі деякої зворотної задачі відновлення ймовірностей станів за результатами голосування, а саме на основі системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно p_i, $i = \overline{1, m}$,

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} p_i = 0.5 \quad \forall j = \overline{1, n}, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1, \tag{8}$$

з обмеженнями

$$0 \le p_i \le 1, i = \overline{1, m}. \tag{9}$$

Система (8) з обмеженнями (9) не завжди має розв'язки; проілюструємо це на прикладі. Спробуємо розв'язати систему (8)–(9) для матриці

$$Z = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.1 & 0.9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отримано вектор (1.9474; 0.1316; –1.0789).

Він задовольняє власне систему лінійних алгебраїчних рівнянь (8), але порушує обмеження (9). Тому він не є допустимим і не може бути рівноважним.

Дійсно, наведена матриця порушує необхідні умови того, щоб система (8) з обмеженнями (9) мала розв'язки, а саме:

$$\max_i z_{ij} \ge \upsilon_j \quad \forall j = \overline{1, n}, \tag{10}$$

$$\min_i z_{ij} \le \upsilon_j, \quad \forall j = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Справді, нехай умова (10) не виконується хоча б для одного стовпчика l. Тоді, навіть якщо у відповідному рівнянні взяти крайній випадок та для $k = \arg\max_i z_{il}$ покласти $p_k = 1$, то отримуємо $\sum_{i=1}^{m} z_{il} p_i = z_{kj} < \upsilon_l$, а для будь-якого іншого допустимого вектора p ця сума може тільки зменшитися.

Аналогічно, якщо для l-го стовпчика не виконується умова (11), то навіть у крайньому випадку ($p_k = 1$ для $k = \arg\min_i z_{il}$) $\sum_{i=1}^{m} z_{il} p_i = z_{kj} > \upsilon_l$ і для будь-якого іншого допустимого вектора p ця сума може тільки збільшитися.

Втім, можна завжди сформувати матрицю Z так, щоб система (8)–(9) завідомо мала розв'язки. З іншого боку, система у більшості випадків є недовизначеною, і тому розв'язок не є єдиним. Тоді множина рівноважних m-векторів має утворювати опуклий симплекс.

10. ПЕРЕХІДНІ ЙМОВІРНОСТІ ТА РІВНОВАЖНИЙ СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ

У цій роботі основну увагу приділено моделі $\langle Z, p \rangle$, для якої вектор стаціонарного розподілу ймовірностей p вважався заданим. Проте аналіз матриці перехідних ймовірностей марковського ланцюга Π також має суттєве значення — зокрема, саме ці ймовірності можуть змінюватися в процесі заохочень та покарань, які отримує агент.

У межах цієї роботи визначимо, за яких перехідних імовірностей стаціонарний розподіл p залишається рівноважним. Як показано, за умови збалансованості матриці Z достатньою умовою рівноважності допустимого вектора p є симетричність цього вектора.

Теорема 3. Нехай для квадратної $m \times m$-матриці A виконується одна з двох умов:

а) матриця A має симетричні стовпці, тобто $\forall i, j$: $a_{ij} = a_{i, m-j+1}$;

б) матриця A є центрально-симетричною, тобто $\forall i, j$: $a_{ij} = a_{m-i+1, m-j+1}$.

Тоді головний лівий власний вектор x матриці A є симетричним, тобто $\forall j$: $x_j = x_{m-j+1}$.

Доведення. Достатність умови а) є очевидною. Вона по суті означає, що j-й та $m - j + i$-й стовпці матриці дорівнюють один одному, звідки випливає, що повинні дорівнювати одна одній і відповідні компоненти головного власного вектора.

Достатність умови б) випливає з того, що в результаті множення будь-якого симетричного вектора v на центрально-симетричну матрицю A отримується симетричний вектор. Дійсно, якщо ця умова виконується, то

$$(vA)_j = \sum_{i=1}^{m} v_i A_{ij} = \sum_{i=1}^{m} v_i A_{i, m-i+1} = (vA)_{m-j+1}.$$

Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У статті запропоновано формалізовану процедуру прийняття рішень у вигляді так званої моделі «стан–імовірність дії» та обґрунтовано доцільність її застосування. У межах цієї моделі введено матрицю «стан–імовірність дії» Z, рядки якої відповідають станам, і для кожного стану задано ймовірності того, що агент вибере ту чи іншу альтернативу.

З теоретичного погляду доцільність розгляду моделі «стан-імовірність дії» зумовлена такими її рисами:

— модель задає зручну формалізацію для опису ймовірностей вибору дій (набір станів) та можливих переходів між станами; зокрема явно виокремлено марковський ланцюг переходів;

— у її межах зручно доводити низку властивостей, зокрема умови формування динамічної рівноваги;

— уведений у межах моделі набір станів можна (і часто потрібно) розглядати як показники функціонування деякої більш складної системи ієрархічного або гібридного вигляду, що призводить до зміни станів; наприклад, це може мати значення, якщо агенти розділені на групи з різними характеристиками та можуть переходити з однієї групи до іншої;

— її можна узагальнити на випадок змінної кількості станів, а також для використання в умовах нечіткого задання станів.

Більш конкретно, у статті розглянуто питання про те, в який спосіб у межах моделі «стан–імовірність дії» можна отримати умови динамічної рівноваги двох альтернатив у багатоагентному середовищі у випадку прийняття рішень простою більшістю голосів. Динамічна рівновага означає, що по черзі перемагає то одна, то інша альтернатива і жодна з них не має постійної переваги над іншою. Введено поняття рівноважного вектора. Запропоновано алгоритм отримання $(m\times 2)$-матриць на основі косиметричних наборів. Сформульовано і доведено теорему, яка встановлює умови рівноважності векторів.

Найбільш очевидними (і найбільш перспективними) напрямками подальших досліджень є такі:

1. Неоднорідність багатоагентного середовища.
2. Застосування навчання. Можливий погляд на навчання агента може полягати у зміні ймовірностей прийняття тих чи інших рішень на основі наявного досвіду; це є особливо характерним для навчання з підкріпленням.
3. Врахування взаємного впливу агентів.
4. Застосування нечіткого підходу для оцінювання відносних переваг альтернатив на основі нечітких та складених нечітких чисел [12] з використанням скалярних або векторних множин рівня та на основі залучення зазначених вище нечітких оптимізаційних задач [6].
5. Інше перспективне застосування нечіткостей може полягати в побудові нечітких аналогів співвідношення (1) з нечіткими елементами матриці Z та вектора p, зокрема на основі ймовірнісно-нечітких формалізмів, наведених у [13].

Більш серйозний теоретичний розвиток моделі може полягати в залученні деякого ігрового підходу. Можна розглянути ситуацію, в якій початковим станом є ситуація динамічної рівноваги, а агенти впливу можуть докладати певних зусиль до зміни параметрів моделі з метою порушення рівноваги у вигідному для себе напрямку. В розділі 8 цієї статті наведено деякі інтуїтивні міркування на цю тему та відповідні приклади, але цей напрямок потребує уточнень і подальших формалізацій. На цій основі природно розглядати керування процесами досягнення динамічної рівноваги, коливання навколо неї та/або стійкого відхилення від точки рівновагу. При цьому можна розглядати задачу мінімізації зусиль агентів впливу. Ця задача може мати і практичне значення, наприклад, для розв'язування задач, пов'язаних із поширенням інформаційних впливів у соціально-економічних системах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. Москва: Изд. дом «Вильямс», 2006. 408 с.
2. Николенко С.И., Тулупьев А.Л. Самообучающиеся системы. Москва: МЦНМО, 2009. 288 с.
3. Летичевский А.А. Алгебраическая теория взаимодействия и кибер-физические системы. *Проблемы управления и информатики.* 2017. № 5. С. 37–55.
4. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям. Москва: Эдиториал УРСС, 2002. 352 с.
5. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. Аксиомы и модели. Москва: Мир, 1991. 464 с.
6. Mashchenko S.O. A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Cybernetics and systems analysis.* 2013. Vol. 49, N 1. P. 62–68. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9485-4.
7. Олецький О.В. Про підхід до моделювання процесу прийняття рішень у багатоагентному середовищі на основі марковського процесу зміни ймовірностей вибору. Наукові записки НаУКМА. *Комп'ютерні науки.* 2018. Т. 1. С. 40–43.
8. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. Москва: Мир, 1989. 655 с.
9. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
10. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. 416 с.

11. Глибовець М.М., Олецький О.В. Штучний інтелект. Київ: Видавничий дім «Академія», 2002. 366 с.

12. Ivokhin E.V., Apanasenko D.V. Clustering of composite fuzzy numbers aggregate based on sets of scalar and vector levels. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2018. Vol. 50, N 10. P. 47–59. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i10.40.

13. Провотар О.І., Провотар О.О. Нечіткі ймовірності нечітких подій. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 2. С. 3–13.

Надійшла до редакції 18.10.2019

А.В. Олецкий, Е.В. Ивохин

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕДУРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ АЛЬТЕРНАТИВ В МНОГОАГЕНТНОЙ СРЕДЕ В ПРОЦЕССАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ БОЛЬШИНСТВОМ ГОЛОСОВ

Аннотация. С целью анализа индивидуального и коллективного поведения агентов предложена модель «состояние-вероятность выбора». Она основана на явном рассмотрении вероятностей выбора альтернатив и на марковской цепи изменения этих вероятностей. Центральное место в модели занимает матрица «состояние-вероятность выбора», строки которой соответствуют состояниям, а столбцы–альтернативам. В рамках этой модели установлены некоторые достаточные условия динамического равновесия двух альтернатив, если решения принимаются простым большинством голосов. Динамическое равновесие означает, что по очереди выбираются разные альтернативы, и при многократном выборе каждая из них не имеет преимущества над другими. Получен также конструктивный способ формирования матриц «состояние-вероятность выбора», для которых обеспечивается динамическое равновесие альтернатив.

Ключевые слова: ситуация принятия решения, динамическое равновесие, агенты.

O.V. Oletsky, E.V. Ivohin

FORMALIZING THE PROCEDURE FOR THE FORMATION OF A DYNAMIC EQUILIBRIUM OF ALTERNATIVES IN A MULTI-AGENT ENVIRONMENT IN DECISION-MAKING BY MAJORITY OF VOTES

Abstract. In order to investigate individual and collective behavior of agents, the model called the “state–probability of choice” has been suggested. The model is based on implicit regarding of choice probabilities and on the Markov chain of changing these probabilities. The main point of the model is a “state–probability of choice” matrix whose rows correspond to states and the columns correspond to alternatives. Within this model, some sufficient conditions of the dynamic equilibrium between two alternatives have been established. The dynamic equilibrium means that different alternatives are being chosen by rotation, and any of them has no advantage over others. The way of forming “state–probability of choice” matrices providing the dynamic equiibrium has been suggested.

Keywords: decision-making situation, dynamic equilibrium, agents.

Олецький Олексій Віталійович,
кандидат техн. наук, доцент, доцент кафедри мультимедійних систем факультету інформатики Національного університету «Києво-Могилянська академія», e-mail: oletsky@ukr.net.

Івохін Євген Вікторович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: ivohin@univ.kiev.ua.