УДК 519.6

В.А. СТОЯН

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С АДИТИВНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аннотация. Рассмотрены пространственно распределенные динамические системы, линейная математическая модель которых дополняется нелинейным дифференциальным членом, полученным произведением линейных дифференциальных преобразований функции состояния или заменой такими преобразованиями коэффициентов линейного приближения модели. Построены псевдообращения приведенных математических моделей, которые по среднеквадратическому критерию согласуются с их дифференциальным представлением.

Ключевые слова: псевдообращение, нелинейные динамические системы, системы с распределенными параметрами, пространственно распределенные динамические системы.

ВВЕДЕНИЕ

В результате исследований автора в области математического моделирования динамики неполно наблюдаемых пространственно распределенных систем, изложенных в [1–3], получена методика решения (по среднеквадратическому критерию) начально-краевых задач и задач управления для любой линейной дифференциально определенной линейной динамической системы с дискретно и непрерывно заданными наблюдениями за ее начально-краевым состоянием. Важно, что количество таких наблюдений произвольно и не зависит от порядка дифференциального уравнения ее математической модели. Основа для практической реализации данной методики — наличие интегрального эквивалента дифференциальной модели. В [3, 4] предложена методика построения ядер интегральных математических моделей исследуемых систем и процессов при условии их линейности.

Предложенная в [5, 6] методика псевдообращений нелинейных дискретно преобразующих систем и ее распространение [7, 8] на динамику нелинейных пространственно распределенных систем позволили решить задачу построения интегральных эквивалентов двух классов нелинейных дифференциальных моделей, нелинейность в которых получается после неоднократного умножения линейных дифференциальных преобразований функции состояния системы или после замены таким преобразованием коэффициентов линейного приближения модели. Найденные выражения для ядер интегральных эквивалентов таких моделей, однако, относились к системам, динамика которых описана дифференциальным уравнением без линейной части. Поскольку практическое построение математических моделей нелинейных динамических процессов часто выполняется [9, 10] добавлением нелинейного члена к их линейному приближению, возникает потребность исследования классически известных [11] линейных динамических моделей, аддитивно дополненных нелинейным членом.

В настоящей статье изложены результаты псевдообращения [3] пространственно распределенных систем дифференциальных математических моделей, в которых исследованные в [7, 8] нелинейности дополнены линейно преобразующим слагаемым. Как и в [7, 8], рассмотрены (насколько это возможно в рамках методики псевдообращения линейных интегральных и функциональных систем) варианты построения интегральных зависимостей функции состояния (или вектора ее значений) системы как от дискретно, так и от непрерывно заданной функции внешнединамических возмущающих факторов. Построены и исследованы на точность и однозначность множества допустимых среднеквадратических приближений к решению рассматриваемых задач. Форма полученных математических решений приемлема для математического моделирования состояния исследуемых классов нелинейных пространственно распределенных систем в ограниченных пространственно-временных областях методами, приведенными в [1–3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим распределенный динамический процесс, функция $y(s)$ состояния которого в пространственно-временных координатах $s=(x_1,\dots,x_n,t)\in S$ удовлетворяет одному из двух уравнений:

$$L_1^{(1)}(\partial_s)\,y(s)+\sum_{i=2}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s)=u(s), \tag{1}$$

$$L_N(\partial_s)\,y(s)+\sum_{i=0}^{N-1}(L_i(\partial_s)\,y(s))\,\partial_s^{N-i}\,y(s)=u(s). \tag{2}$$

Здесь $u(s)$ — распределенное внешнединамическое воздействие на процесс, а $L_i(\partial_s)$ $(i=\overline{0,N})$ и $L_j^{(i)}(\partial_s)$ $(j=\overline{1,i};\ i=\overline{1,N})$ — линейные дифференциальные операторы, которые зависят от вектора производных $\partial_s=(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n},\partial_t)$.

Заметим, что математический аппарат исследования линейной части моделей (1), (2), которая при $L_1^{(1)}(\partial_s)=L(\partial_s)$, $L_N(\partial_s)=L(\partial_s)$ и заданном N описывается уравнением

$$L(\partial_s)\,y(s)=\sum_{i=0}^{N}a_i\partial_s^{N-i}\,y(s)=u(s),$$

детально изложен в [1–3]. В [5, 6] исследованы вопросы псевдообращения нелинейных преобразований вида

$$\sum_{i=2}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s)=u(s), \tag{3}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}(L_i(\partial_s)\,y(s))\,\partial_s^{N-i}\,y(s)=u(s), \tag{4}$$

которые являются элементами нелинейных математических моделей, представленных соотношениями (1), (2).

Далее решаются задачи построения функции $y(s)$ или вектора $\vec{y}=\mathrm{col}(y_l,\ l=\overline{1,L})$ ее значений $y(s_l)=y_l$ $(s_l\in S)$ таких, чтобы при известной функции $u(s)$, определенной непрерывно или набором $\vec{u}=\mathrm{col}(u_m,\ m=\overline{1,M})$ ее значений $u(s'_m)=u_m$ $(s'_m\in S)$, выполнялось одно из следующих условий:

$$\Phi_1=\sum_{m=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s)|_{s=s'_m}-u_m\right)^2\to\min_{\vec{y}}, \tag{5}$$

$$\Phi_2 = \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} L_j^{(i)}(\partial_s) y(s)|_{s=s'_m} - u_m \right)^2 \to \min_{y(s)}, \tag{6}$$

$$\Phi_3 = \int_S \left(\sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} L_j^{(i)}(\partial_s) y(s) - u(s) \right)^2 ds \to \min_{\vec{y}} \tag{7}$$

для системы (1) и

$$\Phi_4 = \sum_{m=0}^{M} \left(\sum_{i=0}^{N} (L_i(\partial_s) y(s)) \partial_s^{N-i} y(s)|_{s=s'_m} - u_m \right)^2 \to \min_{\vec{y}}, \tag{8}$$

$$\Phi_5 = \sum_{m=0}^{M} \left(\sum_{i=0}^{N} (L_i(\partial_s) y(s)) \partial_s^{N-i} y(s)|_{s=s'_m} - u_m \right)^2 \to \min_{y(s)}, \tag{9}$$

$$\Phi_6 = \sum_{m=1}^{L} \left(\sum_{i=0}^{N} (L_i(\partial_s) y(s)) \partial_s^{N-i} y(s)|_{s=s'_l} - u(s_l) \right)^2 \to \min_{\vec{y}} \tag{10}$$

для системы (2).

Для решения задач (5)–(10) максимально используется методика решения задач псевдообращения систем (3), (4), изложенная в [7, 8]. Как и при исследовании [7, 8] моделей (3), (4), будем считать, что решением уравнения

$$L_j^{(i)}(\partial_s) y(s) = u_j^{(i)}(s) \quad (j = \overline{1, i};\ i = \overline{1, N}) \tag{11}$$

в неограниченной пространственно-временной области есть [3] функция

$$y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_j^{(i)}(s - s') u_j^{(i)}(s') ds', \tag{12}$$

в которой с учетом (11), (12)

$$G_j^{(k)}(s - s') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda(s-s')}}{L_j^{(k)}(i\lambda)} d\lambda$$

при $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu)$, $d\lambda = (d\lambda_1, \ldots, d\lambda_n d\mu)$, $\lambda(s - s') = \mu(t - t') + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x_k - x'_k)$

(здесь i — мнимая единица).

При псевдообращении модели (1) решение ее представим в виде суммы

$$y(s) = \sum_{k=1}^{N} y_{j_k}^{(k)}(s), \tag{13}$$

в которой с учетом (11), (12)

$$y_{j_k}^{(k)}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{j_k}^{(k)}(s - s') u_{j_k}^{(k)}(s') ds', \tag{14}$$

$$L_1^{(1)}(\partial_s) y_1^{(1)}(s) = u(s) \tag{15}$$

при $u_{j_k}^{(k)}(s')$ $(k = \overline{2, N})$, удовлетворяющим соотношению

$$u_{j_k}^{(k)}(s) = \arg \min_{u_j^{(k)}(s)} \sum_{m=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{i} L_j^{(i)}(\partial_s) y_j^{(k)}(s)|_{s=s'_m} - \tilde{u}_m^{(k)} \right)^2 \tag{16}$$

для систем (3), (4) и соотношению

$$u_{j_k}^{(k)}(s)=\arg\min_{u_j^{(k)}(s)}\int_S\left(\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y_j^{(k)}(s)-\tilde{u}^{(k)}(s)\right)^2 ds \tag{17}$$

для системы (5), где

$$\tilde{u}^{(k)}(s)=u(s)-\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\left(\sum_{p=1}^{k-1}y_{j_p}^{(p)}(s)\right),\ \tilde{u}_m^{(k)}=\tilde{u}^{(k)}(s'_m)\Delta s'_m,$$

а $\Delta s'_m$ — шаг дискретизации области S точками s'_m.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДИСКРЕТНО ЗАДАННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассмотрим задачу (1), (5). Для ее решения уравнение (1) представим в виде

$$\mathrm{col}\left(\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{i}L_j^{(i)}(\partial_s)\,y(s)|_{s=s'_m},\ m=\overline{1,M}\right)=\vec{u}$$

или, что эквивалентно,

$$\sum_{i=1}^{N}\vec{u}_1^{(i)}\otimes\ldots\otimes\vec{u}_i^{(i)}=\vec{u}. \tag{18}$$

Здесь $\vec{u}=\mathrm{col}(u_m,\ m=\overline{1,M})\Delta s'_m$, а символ $\otimes$, как и в [3, 4], обозначает операцию декартового произведения векторов $\vec{u}_j^{(i)}=\mathrm{col}(u_{j,m}^{(i)},\ m=\overline{1,M})$, в которых $u_{j,m}^{(i)}$ — умноженные на $\sqrt[i]{\Delta s'_m}$ значения $u_j^{(i)}(s'_m)$ функции $u_j^{(i)}(s)$ в точках s'_m $(m=\overline{1,M})$ определения внешнединамических возмущений $u(s)$.

С учетом определения вектора $\vec{y}$ в критерии (5) решения рассматриваемой задачи соотношение (12) представим в виде

$$\vec{y}=A_j^{(i)}\vec{u}_j^{(i)}\quad(j=\overline{1,i};\ i=\overline{1,N}), \tag{19}$$

где

$$A_j^{(i)}=\left\|G_j^{(i)}(s_l-s'_m)\sqrt[i]{(\Delta s'_m)^{i-1}}\right\|_{l=\overline{1,L}}^{m=\overline{1,M}}.$$

Решением $\vec{u}_j^{(i)}(n,k)$ $(j=\overline{1,i};\ j\neq n;\ i=\overline{1,N};\ i\neq k)$ уравнения (19) таким, что $\vec{u}_j^{(i)}(n,k)=\arg\min\limits_{\vec{u}\in\Omega_j^{(i)}(n,k)}||\vec{u}||^2$, где

$$\Omega_j^{(i)}(n,k)=\{\vec{u}:||A_j^{(i)}\vec{u}-\vec{y}_{nk}||^2\to\min_{\vec{u}}\}$$

при фиксированном $\vec{u}_n^{(k)}$ и $\vec{y}_{nk}=A_n^{(k)}\vec{u}_n^{(k)}$, будет [11]

$$\vec{u}_j^{(i)}(n,k)=(A_j^{(i)})^+\vec{y}_{nk}=(A_j^{(i)})^+A_n^{(k)}\vec{u}_n^{(k)} \tag{20}$$

при $n\in\{1,2,\ldots,k\}$, $k\in\{1,2,\ldots,N\}$.

При этом

$$\min_{\vec{u}_j^{(i)}\in\Omega_j^{(i)}(n,k)}\left\|A_j^{(i)}\vec{u}_j^{(i)}-\vec{y}_{nk}\right\|^2=\vec{y}_{nk}^{\mathrm{T}}\vec{y}_{nk}-\vec{y}_{nk}^{\mathrm{T}}P_j^{(i)}(P_j^{(i)})^+\vec{y}_{nk}=(\varepsilon_j^{(i)}(n,k))^2,$$

где $P_j^{(i)}=A_j^{(i)}(A_j^{(i)})^{\mathrm{T}}$.

С учетом (15), (16) и (19) из (18) можно сделать вывод, что вектор $\vec{u}_n^{(k)}$ при $n=\overline{1,k}$ должен удовлетворять соотношению

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{N}\prod_{j=1}^{i}{}_{\otimes}(A_j^{(i)})^{+}A_n^{(k)}\vec{u}_n^{(k)}\otimes\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{k}{}_{\otimes}(A_j^{(k)})^{+}A_n^{(k)}\vec{u}_n^{(k)}=\vec{u}^{(k)}, \tag{21}$$

в котором $\vec{u}^{(k)}=\mathrm{col}(\tilde{u}_m^{(k)},\ m=\overline{1,M})$, $\prod_{j=1}^{i}{}_{\otimes}\vec{x}_j=\vec{x}_1\otimes\ldots\otimes\vec{x}_i$.

Обозначив

$$A_{nk}=\mathrm{str}(B_{nki},\ i=\overline{1,N}),$$

$$B_{nkk}=\mathrm{col}\left(\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{(p-1)M^{k-1}},\mathrm{str}\left(\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{k}[(A_j^{(k)})^{+}A_n^{(k)}]_{pr_j},\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.r_s=\overline{1,M}\right),s=\overline{1,k},\ s\neq n\right),\ \underbrace{0,\ldots,0}_{M^k-pM^{k-1}}\right),\ p=\overline{1,M}\right),$$

$$B_{nki}=\mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(\left(\ldots\left(\prod_{j=1}^{i}[(A_j^{(i)})^{+}A_n^{(k)}]_{pr_j},r_j=\overline{1,M}\right),\ldots\right),r_1=\overline{1,M}\right),p=\overline{1,M}\right)\quad(i\neq k),$$

$$\vec{\alpha}_{nk}=\mathrm{col}\left(\mathrm{col}\left(\ldots\prod_{j=1}^{p}u_{n,r_j}^{(k)},\ r_p=\overline{1,M}\right),\ p=\overline{1,N}\right), \tag{22}$$

уравнение (21) запишем в виде

$$A_{nk}\vec{\alpha}_{nk}=\vec{u}^{(k)}. \tag{23}$$

Откуда $\vec{\alpha}_{nk}$ $(n\in\{1,\ldots,k\},\ k\in\{1,\ldots,N\})$ такое, что $\left\|A_{nk}\vec{\alpha}_{nk}-\vec{u}^{(k)}\right\|^2\to\min\limits_{\vec{\alpha}_{nk}}$ при $\min\limits_{\vec{\alpha}_{nk}}\left\|A_{nk}\vec{\alpha}_{nk}-\vec{u}^{(k)}\right\|^2=(\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}\vec{u}^{(k)}-(\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}P_{nk}P_{nk}^{+}\vec{u}^{(k)}=(\delta_n^{(k)})^2$,

$$P_{nk}=A_{nk}A_{nk}^{\mathrm{T}},$$

определим соотношением [11]

$$\vec{\alpha}_{nk}=A_{nk}^{\mathrm{T}}P_{nk}^{+}\vec{u}^{(k)}+\vec{v}_{nk}-A_{nk}^{\mathrm{T}}P_{nk}^{+}A_{nk}\vec{v}_{nk}. \tag{24}$$

Здесь вектор $\vec{v}_{nk}\in R^{l_\alpha(N)}$ удовлетворяет условиям

$$[\vec{\alpha}_{nk}]^{p}_{(i_1-1)M^{p-1}+\ldots+(i_{p-1}-1)M+i_p+l_\alpha(p)}=\prod_{q=1}^{p}[\vec{\alpha}_{nk}]_{(i_q-1)M^{p-1}+\ldots+(i_q-1)M+i_q+l_\alpha(p)},$$

$$[\vec{\alpha}_{nk}]^{p-1}_{l_\alpha(p)+1}=[\vec{\alpha}_{nk}]^{p}_{l_\alpha(p-1)+1} \tag{25}$$

при $p=\overline{2,N}$ и $l_\alpha(p)=\dfrac{M(M^{p-1}-1)}{M-1}$.

С учетом определения (22) вектора $\vec{\alpha}_{nk}$ из (24) соотношением

$$u_{n,m}^{(k)} = [A_{nk}^{\mathrm{T}}]_m P_{nk}^{+} \vec{u}^{(k)} + \nu_{nk,m} - [A_{nk}^{\mathrm{T}}]_m P_{nk}^{+} A_{nk} \vec{\nu}_{nk}, \tag{26}$$

в котором $[\,\cdot\,]_m$ — m-я строка матрицы $[\,\cdot\,]$, находим значения компонент $u_{n,m}^{(k)}$ $(m = \overline{1, M})$ вектора $\vec{u}_m^{(k)}$, а согласно (20) — и вектора $\vec{u}_j^{(i)}$ $(j = \overline{1, i};\ i = \overline{1, N})$.

С учетом (13) и (14) вектор $\vec{y}$, который решает задачу (5), определим соотношением $\vec{y} = \sum_{k=1}^{N} A_{j_k}^{(k)} \vec{u}_{j_k}^{(k)}$, индексы j_k $(k = \overline{1, N})$ в котором будем выбирать из условия

$$j_k = \arg \min_{n = \overline{1, k}} (\varepsilon_{nk}^2 + (\delta_n^{(k)})^2), \tag{27}$$

где

$$\varepsilon_{nk}^2 = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{i} (\varepsilon_j^{(i)}(n, k))^2.$$

С учетом определения вектора $\vec{y}$, а также того, что $u_j^{(i)}(s'_m) = u_{j,m}^{i} \Big/ \sqrt[i]{\Delta s'_m}$, соотношением

$$y(s) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} G_{j_k}^{(k)}(s - s'_m) u_{j_k}^{(k)}(s'_m) \Delta s'_m$$

найдем функцию $y(s)$, которая ему соответствует. Эта функция будет решением задачи (1), (5), при котором

$$\min_{\vec{y}} \Phi_1 = (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}} \vec{u}^{(k)} - (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}} A_{j_k}^{(k)} (A_{j_k}^{(k)})^{+} \vec{u}^{(k)}.$$

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ДИСКРЕТНО ЗАДАННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Рассмотрим решение задачи (1), (6). Искомую согласно (6) функцию $y(s)$ по аналогии с (13), (14) представим соотношением

$$y(s) = \sum_{k=1}^{N} [\vec{G}_{j_k}^{(k)}]^{\mathrm{T}}(s) \vec{u}_{j_k}^{(k)}, \tag{28}$$

векторы $\vec{u}_j^{(i)}$ которого определяются в (19) при

$$\vec{G}_j^{(i)}(s) = \mathrm{col}(G_j^{(i)}(s - s'_m) \sqrt[i]{(\Delta s'_m)^{i-1}},\ m = \overline{1, M}),$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{i} \otimes \vec{u}_j^{(i)} - \vec{u} \right\|^2 \to \min_{y(s)}.$$

Полагая по аналогии с (20)

$$\vec{u}_j^{(i)}(n, k) = (P_j^{(i)})^{+} P_{jn}^{(ik)} \vec{u}_n^{(k)} \tag{29}$$

при

$$P_{jn}^{(in)} = \int_S \vec{G}_j^{(i)}(s) [\vec{G}_n^{(k)}(s)]^{\mathrm{T}} ds \quad (n \in \{1, \ldots, k\},\ k \in \{1, \ldots, N\}),$$

векторы

$$\vec{u}_j^{(i)} = \arg \min_{u_j^{(i)} \in \Omega_j^{(i)}} \left\| u_j^{(i)} \right\| \ (j=\overline{1,i}; i=\overline{1,N}),$$

где

$$\Omega_j^{(i)} = \left\{ \vec{u}_j^{(i)} : \int_S ([\vec{G}_j^{(i)}(s)]^{\mathrm{T}} \vec{u}_j^{(i)} - y_{nk}(s))^2 ds \to \min_{\vec{u}_j^{(i)}} \right\},$$

$$y_{nk}(s) = [\vec{G}_n^{(k)}(s)]^{\mathrm{T}} \vec{u}_n^{(k)},$$

с точностью

$$(\varepsilon_j^{(i)}(n,k))^2 = \min_{\vec{u}_j^{(i)} \in R^n} \int_S ([\vec{G}_j^{(i)}(s)]^{\mathrm{T}} \vec{u}_j^{(i)} - y_{nk}(s))^2 ds =$$

$$= \int_S y_{nk}^2(s) ds - (\vec{G}_{yj}^{(i)})^{\mathrm{T}} (P_j^{(i)})^+ \vec{G}_{yj}^{(i)} \tag{30}$$

определим соотношением [11] $\vec{u}_j^{(i)} = (P_j^{(i)})^+ \vec{G}_{yj}^{(i)}$, в котором

$$P_j^{(i)} = \int_S \vec{G}_j^{(i)}(s) (\vec{G}_j^{(i)}(s))^{\mathrm{T}} ds, \quad \vec{G}_{yj}^{(i)} = \int_S \vec{G}_j^{(i)}(s) y_{nk}(s) ds.$$

Несложно заметить, что решение задачи (1), (6) при этом эквивалентно среднеквадратическому обращению уравнения (18), векторы $\vec{u}_j^{(i)}$ $(j=\overline{1,i}; i=\overline{1,N})$ в котором определяются согласно (29).

Это уравнение по аналогии с (21) запишем в виде

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \prod_{j=1}^{i} \otimes (P_j^{(i)})^+ P_{jn}^{(ik)} \vec{u}_n^{(k)} \otimes \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{k} \otimes (P_n^{(k)})^+ P_{jn}^{(ik)} \vec{u}_n^{(k)} = \vec{u}^{(k)},$$

где $\vec{u}^{(k)} = \mathrm{col}(\tilde{u}_m^{(k)}, m=\overline{1,M})$. Откуда при $\vec{\alpha}_{nk}$, определенном в (22), и $A_{nk}^* = \mathrm{str}(B_{nki}, i=\overline{1,N})$,

$$B_{nkk} = \mathrm{col}\left(\left(\underbrace{0,\ldots,0}_{(p-1)M^{k-1}}, \mathrm{str}\left(\left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{k} [(P_j^{(k)})^+ P_{jn}^{(ik)}]_{pr_j} \right), \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. r_s = \overline{1,M}, s=\overline{1,k}, s \neq n \right), \underbrace{0,\ldots,0}_{M^k - pM^{k-1}} \right), p=\overline{1,M} \right),$$

$$B_{nki} = \mathrm{col}\left(\mathrm{str}\left(\left(\ldots \left(\prod_{j=1}^{i} [(P_j^{(k)})^+ P_{jn}^{(ik)}]_{pr_j} \right), r_i = \overline{1,M} \right), \ldots, \right), \right.$$

$$\left. r_s = \overline{1,M}, \ p=\overline{1,M} \right) \quad (i \neq k)$$

получаем уравнение (23), в котором $A_{nk} = A_{nk}^*$.

А это значит, что

$$\vec{\alpha}_{nk} = \arg \min_{\vec{\alpha} \in R^{l_\alpha (N+1)}} || A_{nk}^* \vec{\alpha} - \vec{u}^{(k)} ||^2 = (A_{nk}^*)^{\mathrm{T}} (P_{nk}^*)^+ \vec{u}^{(k)} + \vec{v}_{nk} -$$

$$- (A_{nk}^*)^{\mathrm{T}} (P_{nk}^*)^+ A_{nk}^* \vec{v}_{nk}, \tag{31}$$

$$\min_{\vec{\alpha}\in R^{l_\alpha(N+1)}} || A^*_{nk}\vec{\alpha}-\vec{u}^{(k)}||^2 = (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}\,\vec{u}^{(k)} - (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}\,P^*_{nk}\,(P^*_{nk})^+\,\vec{u}^{(k)} = (\delta^k_n)^2,$$

где $\vec{v}_{nk} \in R^{l_\alpha(N+1)}$ удовлетворяет соотношению (25), а $P^*_{nk} = A^*_{nk}(A^*_{nk})^{\mathrm{T}}$. Откуда, как и в (26), находим [11] компоненты

$$u^{(k)}_{n,m} = [(A^*_{nk})^{\mathrm{T}}]_m\,(P^*_{nk})^+\,\vec{u}^{(k)} + v_{nk,m} - [(A^*_{nk})^{\mathrm{T}}]_m\,(P^*_{nk})^+\,A^*_{nk}\vec{v}_{nk} \qquad (32)$$

вектора $\vec{u}^{(k)}$, через который согласно (29) определим $\vec{u}^{(i)}_j$ $(j=\overline{1,i};\ i=\overline{1,N})$.

Как и ранее, для построения функции $y(s)$ виберем векторы $\vec{u}^{(k)}_{j_k}$, для которых при определенных согласно (30), (31) величинах $\varepsilon^{(i)}_j(n,k)$ и $\delta^{(k)}_j$ выполняется (27). С учетом $\vec{u}^{(k)}_{j_k} = \mathrm{col}(\vec{u}^{(k)}_{j_k,m},\ m=\overline{1,M})$ эту функцию определим соотношением (28).

При этом

$$\min_{y(x)} \Phi_2 = (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}\,\vec{u}^{(k)} - (\vec{u}^{(k)})^{\mathrm{T}}\,A^*_{j_k k}\,(A^*_{j_k k})^+\,\vec{u}^{(k)},$$

а $\vec{v}_{nk}$ — вектор в решении (32) тождественно равен нулю при $\det((A^*_{j_k k})^{\mathrm{T}}\,A^*_{j_k k}) \succ 0$.

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИСКРЕТНО ОПРЕДЕЛЕННОЙ ФУНКЦИИ СОСТОЯНИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НЕПРЕРЫВНО ЗАДАННЫХ ВНЕШНЕДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Перейдем к решению задачи (1), (7), ограничившись для упрощения выкладок случаем $N=2$. В отличие от (28) функцию $y(s)$, которая удовлетворяет (1), (7), определим соотношениями

$$y(s) = y^{(1)}(s) + y^{(2)}(s),$$

$$y^{(1)}(s) = \int_S G^{(1)}_1(s-s')u^{(1)}_1(s')ds',$$

$$y^{(2)}(s) = \int_S G^{(2)}_j(s-s')u^{(2)}_j(s')ds'$$

при $u^{(1)}_1(s) = u(s)$ и $j\in\{1,2\}$, выбор которого рассмотрим далее. При этом будем исходить из того, что согласно (17) функции $u^{(1)}_1(s)$, $u^{(2)}_2(s)$ должны удовлетворять условию

$$\int_S (L^{(1)}_1(\partial_s)\,y^{(2)}(s) + L^{(2)}_1(\partial_s)\,y^{(2)}(s)L^{(2)}_2(\partial_s)\,y^{(2)}(s) - \tilde{u}(s))^2\,ds \to \min_{y^{(2)}(s)}$$

при

$$\tilde{u}(s) = u(s) - L^{(1)}_1(\partial_s)\,y^{(1)}(s) - L^{(2)}_1(\partial_s)\,y^{(1)}(s)L^{(2)}_2(\partial_s)\,y^{(1)}(s).$$

Последнее эквивалентно задаче построения функции

$$u^{(2)}_n(s) = \arg\min_{k=\overline{1,2}}\ \min_{u^{(2)}_k(s)} \int_S (u^{(1)}_1(s) + u^{(2)}_1(s)u^{(2)}_2(s) - \tilde{u}(s))^2\,ds. \qquad (33)$$

Здесь и дальше $n\in\{1,2\}$.

При решении задачи (33) будем исходить из результатов построения функции $y(s)$ при $u(s)$, которая для линейного динамического процесса определена вектором своих значений. Векторы $\vec{u}^{(2)}_1$ и $\vec{u}^{(2)}_2$ значений функций $u^{(2)}_1(s)$ и

$u_2^{(2)}(s)$ аналогично (21) определим соотношением

$$(A_1^{(1)})^+ A_n^{(2)}\vec{u}_n^{(2)} + (A_1^{(2)})^+ A_n^{(2)}\vec{u}_n^{(2)} \otimes (A_2^{(2)})^+ A_n^{(2)}\vec{u}_n^{(2)} = \vec{u}_n^{(2)} \quad (n=\overline{1,2}),$$

в котором, как и ранее, $A_n^{(2)} \in R^{L\times M}$ $(n=\overline{1,2})$,

$$\vec{u}^{(2)} = \operatorname{col}((u(s'_m) - L_1^{(1)}(\partial_s)\, y^{(1)}(s)|_{s=s'_m} -$$

$$-L_1^{(2)}(\partial_s)\, y^{(1)}(s)|_{s=s'_m}\, L_2^{(2)}(\partial_s)\, y^{(1)}(s)|_{s=s'_m}),\ m=\overline{1,M}).$$

При этом определенный согласно (22) вектор

$$\vec{\alpha}_{n2} = \begin{pmatrix} \operatorname{col}(u_{n,i}^{(2)},\, m=\overline{1,M}) \\ \operatorname{col}((u_{n,i}^{(2)}\, u_{n,j}^{(2)},\, j=\overline{1,M}),\, i=\overline{1,M}) \end{pmatrix}$$

построим среднеквадратическим обращением уравнения (23), которое в рассматриваемом случае запишем в виде $A_{n2}\vec{\alpha}_{n2} = \vec{u}^{(2)}$. Здесь A_{n2} — $(M\times(M+M^2))$-мерная матрица, которую соотношением

$$A_{n2} = (B_{n21} \vdots B_{n22}) \tag{34}$$

удобно представить через $(M\times M)$ и $(M\times M^2)$-мерные матрицы

$$B_{n21} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_1^{(1)}(s'_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_1^{(1)}(s'_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (P_1^{(1)})^+ (\vec{G}_n^{(2)}(s'_1), \ldots, \vec{G}_n^{(2)}(s'_M))(\Delta s'_M)^{3/4},$$

$$B_{n22} = \operatorname{col}(([\vec{G}_1^{(2)}(s'_p)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^+ \vec{G}_n^{(2)}(\xi_1)[G_2^{(2)}(s'_p)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^+ (\vec{G}_n^{(2)}(\eta_1), \ldots$$

$$\ldots, \vec{G}_n^{(2)}(\eta_M), \ldots, [\vec{G}_1^{(2)}(s'_p)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^+ \vec{G}_n^{(2)}(\xi_M)[G_2^{(2)}(s'_p)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^+ \times$$

$$\times (\vec{G}_n^{(2)}(\eta_1), \ldots, \vec{G}_n^{(2)}(\eta_M)))\Delta s'_M,\ p=\overline{1,M})$$

и L-мерные вектор-функции $\vec{G}_n^{(2)}(s)$, определенные по аналоги с (28).

Вектор $\vec{\alpha}_{n2} = \arg \min\limits_{\vec{a}\in R^{M+M^2}} \| A_{n2}\vec{\alpha} - \vec{u}^{(2)} \|^2$ аналогично (24) запишем в виде

$$\vec{\alpha}_{n2} = A_{n2}^{\mathrm{T}} P_{n2}^+ \vec{u}^{(2)} + \vec{v}_{n2} - A_{n2}^{\mathrm{T}} P_{n2}^+ A_{n2}\vec{v}_{n2}, \tag{35}$$

где $P_{n2} = A_{n2}A_{n2}^{\mathrm{T}}$, а $\vec{v}_{n2}$ — $(M\times M^2)$-мерный вектор, который определяется из условия (25) при $N=2$.

При построении матрицы P_{n2} будем исходить из того, что

$$B_{n21}B_{n21}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_1^{(1)}(s'_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_1^{(1)}(s'_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (P_1^{(1)})^+ P_n^{(2)} (P_1^{(1)})^+ (\vec{G}_1^{(1)}(s'_1), \ldots, \vec{G}_1^{(1)}(s'_M))(\Delta s'_M)^2,$$

$$B_{n22}B_{n22}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_{21}^{(22)}(s'_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_{21}^{(22)}(s'_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (P_{n2}^{(22,1)})^+ (\vec{G}_{21}^{(22)}(s'_1), \ldots, \vec{G}_{21}^{(22)}(s'_M))(\Delta s'_M)^2$$

при

$$P_j^{(i)} = A_i^{(i)} (A_j^{(i)})^{\mathrm{T}} = \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_j^{(i)} (s'_p) [\vec{G}_j^{(i)} (s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M ,$$

$$\overline{P}_{ni}^{(2j)} = (P_i^{(j)})^{+} P_n^{(2)} (P_i^{j})^{+} ,$$

$$\overline{P}_{nij}^{(2rs)} = || [\overline{P}_{ni}^{(2r)}]_{g_1 g_2} [\overline{P}_{ni}^{(2s)}]_{h_1 h_2} ||_{g_2=\overline{1,L},\, g_1=\overline{1,L}}^{h_2=\overline{1,M},\, h_1=\overline{1,M}} .$$

При этом

$$P_{n2} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_1^{(1)}(\xi_1)]^{\mathrm{T}} & [\vec{G}_{21}^{(22)}(\xi_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_1^{(1)}(\xi_M)]^{\mathrm{T}} & [\vec{G}_{21}^{(22)}(\xi_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} \vec{G}_1^{(1)}(\eta_1) \ldots \vec{G}_1^{(1)}(\eta_M) \\ \vec{G}_{21}^{(22)}(\eta_1) \ldots \vec{G}_{21}^{(22)}(\eta_M) \end{pmatrix} (\Delta s'_M)^2 ,$$

$$P_{n2}^{+} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_1^{(1)}(\eta_1)]^{\mathrm{T}} & [\vec{G}_{21}^{(22)}(\eta_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_1^{(1)}(\eta_M)]^{\mathrm{T}} & [\vec{G}_{21}^{(22)}(\eta_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} P \left[P \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix} P \right]^{+} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix}^{+} \begin{pmatrix} \vec{G}_1^{(1)}(\xi_1) \ldots \vec{G}_1^{(1)}(\xi_M) \\ \vec{G}_{21}^{(22)}(\xi_1) \ldots \vec{G}_{21}^{(22)}(\xi_M) \end{pmatrix} , \qquad (36)$$

где

$$P = \begin{pmatrix} \overline{P}_{n1}^{(21)} & 0 \\ 0 & P_{n21}^{(22,1)} \end{pmatrix} , \quad P_{i_1,i_2,i_3,i_4}^{(j_1,j_2,j_3,j_4)} = \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_{i_1 i_2}^{(j_1 j_2)} (s'_p) [\vec{G}_{i_3 i_4}^{(j_3 j_4)} (s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M ,$$

$$P_{i_1,i_2,i_3}^{(j_1,j_2,j_3)} = \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_{i_1}^{(j_1)} (s'_p) [\vec{G}_{i_2 i_3}^{(j_2 j_3)} (s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M ,$$

$$P_{i_1,i_2,i_3}^{(j_1,j_2,j_3)} = \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_{i_1 i_2}^{(j_1 j_2)} (s'_p) [\vec{G}_{i_3}^{(j_3)} (s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M .$$

С учетом (34), (36) выражение (35) для вектора $\vec{\alpha}_{n2}$ запишем в виде

$$\vec{\alpha}_{n2} = \begin{pmatrix} B_{p1} \\ B_{p2} \end{pmatrix} P \left[P \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix} P \right]^{+} \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix}^{+} G_u , \qquad (37)$$

где

$$G_u = \begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_1^{(1)} (\xi_p) u(\xi_p) \Delta'_M \\ \sum_{p=1}^{M} \vec{G}_{21}^{(22)} (\xi_p) u(\xi_p) \Delta'_M \end{pmatrix} , \quad B_{p1} = \begin{pmatrix} [\vec{G}_n^{(2)}(\xi_1)]^{\mathrm{T}} \\ \cdots\cdots\cdots \\ [\vec{G}_n^{(2)}(\xi_M)]^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} (P_1^{(1)})^{+} (P_1^{(1)} P_{1,21}^{(1,21)}) ,$$

$$B_{p2} = \mathrm{col} (((b_1(\eta_i, \xi_j) b_1(\eta_i, \xi_j)), i = \overline{1, M}), j = \overline{1, M}) ,$$

$$b_1(\eta_i, \xi_j) =$$

$$= \sum_{p=1}^{M} [\vec{G}_n^{(2)}(\eta_i)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^{+} \vec{G}_2^{(2)} (s'_p) [\vec{G}_n^{(2)}(\xi_j)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^{+} \vec{G}_1^{(2)} (s'_p) [\vec{G}_1^{(1)} (s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M ,$$

$$b_2(\eta_i, \xi_j) =$$

$$= \sum_{p=1}^{M} [\vec{G}_n^{(2)}(\eta_i)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^{+} \vec{G}_2^{(2)}(s'_p)[\vec{G}_n^{(2)}(\xi_j)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^{+} \vec{G}_1^{(2)}(s'_p)[\vec{G}_{21}^{(22)}(s'_p)]^{\mathrm{T}} \Delta s'_M .$$

Из (37) при $M \to \infty$ находим

$$\begin{pmatrix} u_n^{(2)}(\xi) \\ u_n^{(2)}(\xi) u_n^{(2)}(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(\xi) \\ B_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} P \left[P \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix} P \right]^{+} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_{1,21}^{(1,21)} \\ P_{21,1}^{(22,1)} & P_{21,21}^{(22,22)} \end{pmatrix}^{+} G_u \quad (n = \overline{1,2}),$$

где

$$B_1(\xi) = [\vec{G}_n^{(2)}(\xi)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(1)})^{+} (P_1^{(1)} \quad P_{1,21}^{(1,21)}),$$

$$B_2(\xi, \eta) = \overline{b}_1(\eta, \xi) \overline{b}_2(\eta, \xi),$$

$$\overline{b}_1(\eta, \xi) = \int_S [\vec{G}_n^{(2)}(\eta)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^{+} G_2^{(2)}(s)[\vec{G}_n^{(2)}(\xi)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^{+} \vec{G}_1^{(2)}(s)[\vec{G}_1^{(1)}(s)]^{\mathrm{T}} ds,$$

$$\overline{b}_2(\eta, \xi) = \int_S [G_n^{(2)}(\eta)]^{\mathrm{T}} (P_2^{(2)})^{+} G_2^{(2)}(s)[\vec{G}_n^{(2)}(\xi)]^{\mathrm{T}} (P_1^{(2)})^{+} \vec{G}_1^{(2)}(s)[\vec{G}_{21}^{(22)}(s)]^{\mathrm{T}} ds,$$

а $P, \overline{P}_{ni}^{(2j)}, P_{nij}^{(2rs)}$ определяются через

$$P_j^{(i)} = \int_S \vec{G}_j^{(i)}(s)[\vec{G}_j^{(i)}(s)]^{\mathrm{T}} ds,$$

$$P_{i_1,i_2,i_3,i_4}^{(j_1,j_2,j_3,j_4)} = \int_S \vec{G}_{i_1 i_2}^{(j_1 j_2)}(s)[\vec{G}_{i_3 i_4}^{(j_3 j_4)}(s)]^{\mathrm{T}} ds,$$

$$P_{i_1,i_2,i_3}^{(j_1,j_2,j_3)} = \int_S \vec{G}_{i_1}^{(j_1)}(s)[\vec{G}_{i_2 i_3}^{(j_2 j_3)}(s)]^{\mathrm{T}} ds,$$

$$P_{i_1,i_2,i_3}^{(j_1,j_2,j_3)} = \int_S \vec{G}_{i_1 i_2}^{(j_1 j_2)}(s)[\vec{G}_{i_3}^{(j_3)}(s)]^{\mathrm{T}} ds$$

соотношениями, определенными ранее.

ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ КВАДРАТИЧНО УТОЧНЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Случай дискретно определенных внешнединамических возмущающих факторов. Рассмотрим задачу (8) для дифференциальной математической модели (2). При этом уравнение (2) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{N} \overline{a}_k(s) \partial_s^{N-k} y(s) = u(s), \tag{38}$$

где

$$\overline{a}_k(s) = a_k + L_k(\partial_s) y(s). \tag{39}$$

Как и ранее, из соотношения (39) находим

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s - s')(\overline{a}_k(s') - a_k) ds', \tag{40}$$

где

$$G_k(s-s') = \frac{1}{2\pi^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L_k(i\lambda)} e^{i\lambda(s-s')} d\lambda.$$

Ограничиваясь дальше уже определенным вектором $\vec{y}$, заключаем, что дискретным решением (40) будет [11]

$$\vec{a}_k = \mathrm{col}(a_{km}, m = \overline{1, M}) =$$

$$= \arg \min_{a_{km}(m=\overline{1, M})} \sum_{l=1}^{L} (y(s_l) - \sum_{k=1}^{M} G_k(s_l - s'_m)(a_{km} - a_k))^2 = \overline{G}_k^+ (\vec{y} + a_k \vec{G}_k), \quad (41)$$

где

$$a_{km} = \overline{a}_k(s'_m),$$

$$\overline{G}_k = [G_k(s_l - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L, m=M},$$

$$\vec{G}_k = \mathrm{col}\left(\sum_{m=1}^{M} G_k(s_l - s'_m), l = \overline{1, L} \right),$$

$$\min_{\vec{a}_k} ||\overline{G}_k \vec{a}_k - (\vec{y} + a_k \vec{G}_k)||^2 =$$

$$= (\vec{y} + a_k \vec{G}_k)^{\mathrm{T}} (\vec{y} + a_k \vec{G}_k) - (\vec{y} + a_k \vec{G}_k)^{\mathrm{T}} \overline{G}_k \overline{G}_k^+ (\vec{y} + a_k \vec{G}_k) = \varepsilon_k^2.$$

С учетом (41) уравнение (38) для $s = s'_m$ $(m = \overline{1, M})$ запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{N} (\overline{G}_k^+)_{(m)} (\vec{y} + a_k \vec{G}_k) y_m^{(N-k)} = u_m \quad (m = \overline{1, M}), \quad (42)$$

где, как и ранее, $(\cdot)_{(m)}$ — m-я строка матрицы $(\cdot)$, $u_m = u(s'_m)$, а $y_m^{(N-k)} = \partial_s^{N-k} y(s)|_{s=s'_m}$.

Для решения (42) согласуем определение вектора $\vec{y}$, производных $y_m^{(N-k)}$ и значений функции $u(s)$. Учитывая, что $u(s)$ и производные $\partial_s^{N-k} y(s)$ определены в точках s'_m $(m = \overline{1, M})$, в этих же точках определяем и функцию $y(s)$, т.е. будем считать, что $\vec{y} = \mathrm{col}(y(s'_m), m = \overline{1, M})$.

При этом, обозначая

$$\vec{\tilde{y}} = \mathrm{col}((((y_l + a_k \vec{G}_{kl}) y_m^{(N-k)}, l = \overline{1, M}), k = \overline{0, N}), m = \overline{1, M}), \quad (43)$$

$$\vec{u} = \mathrm{col}(u_m, m = \overline{1, M}),$$

$$\tilde{G} = \mathrm{diag}(\mathrm{str}((\overline{G}_k^+)_{(m)}, k = \overline{0, N}), m = \overline{1, M}),$$

как и ранее, получаем уравнение $\tilde{G} \vec{\tilde{y}} = \vec{u}$, результатом среднеквадратического с точностью

$$\varepsilon^2 = \min_{\vec{\tilde{y}}} ||\tilde{G} \vec{\tilde{y}} - \vec{u}||^2 = \vec{u}^{\mathrm{T}} \vec{u} - \vec{u}^{\mathrm{T}} \tilde{G} \tilde{G}^+ \vec{u}$$

обращения которого будет

$$\vec{\tilde{y}} = \tilde{G}^{\mathrm{T}} (\tilde{G} \tilde{G}^{\mathrm{T}})^+ \vec{u}. \quad (44)$$

Заметим, что в силу специфики матрицы $\tilde{G}$ величина $\varepsilon^2 = 0$. Из (44) с учетом определения (43) вектора $\vec{\tilde{y}}$ приходим к выводу, что компоненты y_l $(l = \overline{1, M})$ искомого согласно (8) вектора $\vec{y}$ будут удовлетворять уравнению $y_l^2 + \alpha_l y_l = \beta_l$ $(l = \overline{1, L})$, где $\alpha_l = a_k \vec{G}_{kl}$,

$$\beta_l = (\overline{G}_k^+)_{ll}^{\mathrm{T}} \sum_{j=0}^{N} [(\overline{G}_j^+)_{(l)} (\overline{G}_j^+)_{(l)}^{\mathrm{T}}]^{-1} u_l$$

при

$$\operatorname{col}(\vec{G}_{kl}, l = \overline{1, M}) = \vec{G}_k,$$

$$\operatorname{col}((\overline{G}_j^+)_{(l)}, l = \overline{1, M}) = \overline{G}_j^+,$$

$$\operatorname{col}(\operatorname{str}([\overline{G}_n^+]_{ij}, j = \overline{1, M}), i = \overline{1, M}) = \overline{G}_n^+.$$

Рассмотрим решение задачи (2), (9), которая в отличие от задачи (2), (8) позволяет при заданных $(u_1, u_2, \ldots, u_M) = \vec{u}^{\mathrm{T}}$, $(u_m = u(s'_m), m = \overline{1, M})$ найти функцию $y(s)$, а не вектор $\vec{y}$ ее значений. Как и ранее, будем исходить из уравнения (2) и его представления (38), (39). Однако в этом случае вектор $\vec{a}_k$ значений $\overline{a}_k(s'_1), \overline{a}_k(s'_2), \ldots, \overline{a}_k(s'_M)$ функции $\overline{a}_k(s)$ определим через $y(s)$, а не $\vec{y}$. Последнее несложно сделать среднеквадратически, обращая дискретизированное точками $s'_m (m = \overline{1, M})$ соотношение (40).

При этом

$$\vec{a}_k = \arg \min_{\overline{\alpha}_k \in R^M} \int_{-\infty}^{+\infty} (\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s) \overline{\alpha}_k - (A_k(s) + y(s))^2) ds = P_k^+ G_{yk}, \qquad (45)$$

где

$$A_k(s) = a_k \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s - s') ds',$$

$$\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s) = \operatorname{str}(G_k(s - s'_m), m = \overline{1, M}),$$

$$P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s) \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s) ds,$$

$$G_{yk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s)(A_k(s) + y(s)) ds.$$

С использованием (45) дискретизированное точками s'_m $(m = \overline{1, M})$ уравнение (38) запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} P_{k(m)}^+ \overline{G}_k(s)(A_k(s) + y(s)) ds \right) y_m^{(N-k)} = u_m \quad (m = \overline{1, M}), \qquad (46)$$

где, как и ранее, $P_{k(m)}^+$ — m-я строка матрицы P_k^+,

$$y_m^{(N-k)} = \partial_s^{N-k} y(s)|_{s = s'_m}.$$

Обозначив

$$\widetilde{y}(s) = \operatorname{col}(((A_k(s) + y(s)) y_m^{(N-k)}, k = \overline{0, N}), \; m = \overline{1, M}),$$

$$\widetilde{G}(s) = \operatorname{diag}(\operatorname{str}(P_{k(m)}^+ \overline{G}_k(s), k = \overline{0, N}), m = \overline{1, M}),$$

систему уравнений (46) приведем к системе линейных интегральных уравнений

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(s) \widetilde{y}(s) ds = \vec{u},$$

среднеквадратически обращая которые, находим [11]

$$\tilde{y}(s) = \tilde{G}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{P}^{+}\vec{u} \qquad (47)$$

при $\tilde{P} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{G}(s)\tilde{G}^{\mathrm{T}}(s)ds.$

Решение (47) запишем в виде

$$(A_k(s) + y(s))\, y_m^{(N-k)} = P_{k(m)}^{+} \overline{G}_k(s) \tilde{P}_{k(m)}^{+} \vec{u} \ \ (k = \overline{0, N}, m = \overline{1, M}). \qquad (48)$$

Последнее позволяет сделать вывод, что значения $y_m^{(N-k)}$ $(k = \overline{0, N}, m = \overline{1, M})$ можно найти — они будут решениями уравнения

$$(y_m^{(N-k)})^2 + \alpha_{km}\, y_m^{(N-k)} = \beta_{km}, \qquad (49)$$

в котором

$$\alpha_{km} = \partial^{N-k} A_k(s)|_{s=s'_m},$$

$$\beta_{km} = P_{(m)}^{+} \partial^{N-k} \overline{G}_k A_k(s)|_{s=s'_m} \tilde{P}_{(m)}^{+} \vec{u}.$$

Считая $y_m^{(N-k)}$ $(k = \overline{N, 0}, m = \overline{1, M})$ известными, вводим в рассмотрение вектор $U = \mathrm{col}((y_m^{(N-k)}, k = \overline{N, 0}), m = \overline{1, M})$ и векторную функцию $A(s) = \mathrm{col}((A_k(s)\, y_m^{(N-k)}, k = \overline{0, N}), m = \overline{1, M})$, с использованием которых из (47) или (что эквивалентно) (48) получаем $Uy(s) = \tilde{G}^{\mathrm{T}}(s)\tilde{P}^{+}\vec{u} - A(s)$, откуда [9] находим

$$y(s) = (U^{\mathrm{T}}U)^{-1} U^{\mathrm{T}} [\tilde{G}(s)\tilde{P}^{+}\vec{u} - A(s)], \qquad (50)$$

которое является решением задачи (2), (9).

Обозначая $y_{km}(\vec{u})$ корень (km)-го квадратического уравнения (49) и учитывая, что

$$U^{\mathrm{T}}U = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} y_{km}^2(\vec{u}),$$

$$U^{\mathrm{T}} \tilde{G}^{\mathrm{T}}(s) = \mathrm{str}\left(\sum_{k=0}^{N} P_{k(m)}^{+} \overline{G}_k(s)\, y_{km}(\vec{u}), m = \overline{1, M} \right),$$

$$U^{\mathrm{T}} A(s) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} A_k(s)\, y_{km}^2(\vec{u}),$$

функцию (50) записываем в виде

$$y(s) = \frac{\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} [P_{k(m)}^{+} \overline{G}_k(s) \tilde{P}_{k(m)}^{+} \vec{u} y_{km}(\vec{u}) - A_k(s)\, y_{km}^2(\vec{u})]}{\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=1}^{M} y_{km}^2(\vec{u})},$$

откуда (как частный случай) получаем решение задачи псевдообращения уравнения (4), которая решена в [7].

Решение задачи при непрерывно определенном внешнединамическом возмущении. Рассмотрим решение задачи (10) по псевдообращению дифференциального уравнения (2), считая функцию $u(s)$ известной.

Как и ранее, будем исходить из представления (38) уравнения (2). В отличие от (41), однако, коэффициенты $\overline{a}_k(s)$ определим непрерывно так, чтобы

$$\overline{a}_k(s) = \arg\min_{a(s)} \sum_{l=1}^{L} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s_l - s')(a(s') - a_k) ds' - y(s_l) \right)^2 . \qquad (51)$$

Из (51) с точностью

$$\varepsilon_k^2 = \min_{\overline{a}_k(s)} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s')(\overline{a}_k(s') - a_k) ds' - \vec{y} \right\|^2 = \vec{y}_k^{\mathrm{T}} \vec{y}_k - \vec{y}_k^{\mathrm{T}} P_k P_k^{+} \vec{y}_k ,$$

где $\vec{y}$ — вектор значений функции состояния $y(s)$,

$$\vec{y}_k = \mathrm{col}\,(y(s_l) - a_k \int_{-\infty}^{+\infty} G(s_l - s') ds',\ l = \overline{1, L}),$$

$$\overline{G}_k(s') = \mathrm{col}\,(G_k(s_l - s'),\ l = \overline{1, L}),$$

$$P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s') \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s')\, ds',$$

находим [11]

$$\overline{a}_k(s) = \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s') P_k^{+} \vec{y}_k . \qquad (52)$$

С учетом (52) рассматриваемое уравнение запишем в виде

$$\sum_{k=0}^{N} \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s') P_k^{+} \vec{y}_k \partial_s^{N-k} y(s) = u(s). \qquad (53)$$

Обозначая

$$y_l^{(N-k)} = \partial_s^{N-k} y(s)|_{s=s_l} \quad (s = \overline{0, N})$$

значения производных функции $y(s)$ в точках $s = s_l$ $(l = \overline{1, L})$, из (53) имеем

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{l=1}^{L} \overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s_i) P_{kl}^{+} y_{kl} y_i^{(N-k)} = u(s_i) \ \ (i = \overline{1, L}), \qquad (54)$$

где $(P_{k1}^{+}, \ldots, P_{kL}^{+}) = P_k^{+}$, $(y_{k1}, \ldots, y_{kL}) = \vec{y}_k^{\mathrm{T}}$.

Несложно видеть, что совокупность уравнений (54) легко приводится к системе линейных алгебраических уравнений

$$A\alpha = \overline{u}, \qquad (55)$$

в которых

$$\alpha = \mathrm{col}\,(((y_{kl} y_i^{(N-k)},\ l = \overline{1, L}),\ k = \overline{0, N}),\ i = \overline{1, L}),$$

$$A = \mathrm{diag}\,(\mathrm{str}\,((\overline{G}_k^{\mathrm{T}}(s_i) P_{kl}^{+},\ l = \overline{1, L}),\ k = \overline{0, N}),\ i = \overline{1, L}),$$

$$\overline{u} = \mathrm{col}\,(u(s_l),\ l = \overline{1, L}).$$

Из (55), как и ранее, находим

$$\Omega_\alpha = \arg\min_{\xi} || A\xi - \overline{u} ||^2 = A^{\mathrm{T}} P^{+} \overline{u} + v - A^{\mathrm{T}} P^{+} A_v ,$$

где $P = AA^{\mathrm{T}}$, $A_v = Av$, v — произвольный вектор размерности $L^2 \times (N+1)$, а $\varepsilon^2 = \min_{\alpha} || A\alpha - \overline{u} ||^2 = \overline{u}^{\mathrm{T}} \overline{u} - \overline{u}^{\mathrm{T}} PP^{+} \overline{u}$.

При этом
$$\hat{\alpha}=\arg\min_{\alpha\in\Omega_\alpha}||\alpha||^2=A^{\mathrm{T}}P^{+}\bar{u}=$$
$$=\mathrm{col}\left(\left(\left(\bar{G}_p^{\mathrm{T}}(s_i)P_{pq}^{+}\sum_{k=0}^{N}\sum_{l=1}^{L}(\bar{G}_k^{\mathrm{T}}(s_i)P_{kl}^{+})^{-2}u(s_i),\, q=\overline{1,L}\right)p=\overline{0,N}\right)i=\overline{1,L}\right).$$

Откуда
$$y_{ki}\,y_i^{(N-k)}=\bar{G}_k^{\mathrm{T}}(s_i)P_{ki}^{+}\sum_{j=0}^{N}\sum_{l=1}^{L}(\bar{G}_j^{\mathrm{T}}(s_i)P_{jl}^{+})^{-2}u(s_i) \qquad (56)$$
для $k=\overline{0,N}$, $i=\overline{1,L}$.

При $k=N$ из (56) находим, что компоненты $y_1, y_2, \ldots, y_L$ искомого согласно (10) вектора $\vec{y}$ определяются соотношением
$$y_i^2-\alpha_{Ni}\,y_i=\bar{G}_N^{\mathrm{T}}(s_i)P_{Ni}^{+}\sum_{j=0}^{N}\sum_{l=1}^{L}(\bar{G}_j^{\mathrm{T}}(s_i)P_{jl}^{+})^{-2}u(s_i)(i=\overline{1,L}),$$
в котором $\alpha_{ki}=a_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(s_i-s')ds'$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в продолжение [7, 8] завершено исследование проблемы перехода от двух классов нелинейных дифференциально определенных математических моделей к их интегральному эквиваленту.

Рассмотрены случаи, когда линейное приближение модели дополнено исследаванной в [7, 8] нелинейной составляющей, полученной после несколько кратного умножения линейных дифференциальных преобразований функции состояния или после замены такими преобразованиями коэффициентов линейного математического приближения к дифференциальной модели системы. Псевдообращением исследуемых дифференциальных систем при дискретно и непрерывно заданной функции внешнединамических возмущающих факторов построены аналитические зависимости среднеквадратических приближений к решениям указанных дифференциальных уравнений. Выполнена оценка среднеквадратической точности полученных решений по отношению к исследуемому дифференциальному уравнению. Записаны условия однозначности множеств построенных решений.

Полученные математические результаты могут явиться основой для распространения идей и методов математического моделирования линейных динамических систем в ограниченных пространственно-временных областях при неполноте информации об их начально-краевом состоянии на нелинейные динамические системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скопецький В.В., Стоян В.А., Кривонос Ю.Г. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами. Київ: Наукова думка, 2002. 361 с.
2. Скопецький В.В., Стоян В.А., Зваридчук В.Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів. Київ: Вид-во «Сталь», 2008. 316 с.
3. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.

4. Стоян В.А., Двірничук В.Б. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України*. 2012. № 9. С. 36–43.
5. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. I. Мультипликативно нелинейные системы. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 54, № 1. С. 127–134.
6. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. II. Системы с адитивно выделенной нелинейностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 54, № 2. С. 102–107.
7. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. I. Случай дискретно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 115–127.
8. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. II. Случай непрерывно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 1. С. 118–128.
9. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 282 с.
10. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Київ: Наук. думка, 2007. 291 с.
11. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. 383 с.
12. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.

Надійшла до редакції 14.01.2020

В.А. Стоян

ПСЕВДООБЕРНЕННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ РОЗПОДІЛЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З АДИТИВНО ВИЗНАЧЕНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Анотація. Розглянуто просторово розподілені динамічні системи, лінійна математична модель яких доповнюється нелінійним диференціальним членом, отриманим множенням лінійних диференціальних перетворень функції стану або заміною такими перетвореннями коефіцієнтів лінійного наближення моделі. Побудовано псевдообернення наведених математичних моделей, які за середньоквадратичним критерієм узгоджуються з їхнім диференціальним представленням.

Ключові слова: псевдообернення, нелінійні динамічні системи, системи з розподіленими параметрами, просторово розподілені динамічні системи.

V.A. Stoyan

PSEUDO-INVERSION OF THE MATHEMATICAL MODELS OF DISTRIBUTED DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH ADDITIVELY DEFINITE NONLINEARITY

Abstract. The author considers spatially distributed dynamic systems whose linear mathematical model is complemented by a nonlinear differential term, obtained as the product of linear differential transformations of state function or by replacing such transformations of coefficients of the linear approximation of the model. Pseudo-inversions of the considered mathematical models, which are consistent with their differential representation according to the root-mean-square criteria, are generated.

Keywords: pseudo-inversion, nonlinear dynamic systems, distributed-parameter systems, spatially distributed dynamic systems.

Стоян Владимир Антонович,
доктор физ.-мат. наук, профессор кафедры Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: v_a_stoyans@ukr.net.