УДК 519.65

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ, Л.С. МЕЛЬНИЧОК, Я.В. ПІЗЮР

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення експоненціальним виразом функцій багатьох змінних з відносною похибкою. Він полягає в побудові проміжного чебишовського наближення узагальненим поліномом значень логарифма функції з абсолютною похибкою. Для побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних узагальненим поліномом використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Подані результати розв'язування тестових прикладів підтверджують швидку збіжність методу під час обчислення параметрів чебишовського наближення таблично заданих неперервних функцій однієї, двох і трьох змінних.

Ключові слова: чебишовське наближення експоненціальним виразом, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Під час моделювання складних систем, функціонування яких залежить від багатьох параметрів, виникає потреба в наявності ефективних алгоритмів для апроксимації функцій багатьох змінних [1–3]. Для покращення точності моделювання доцільно використовувати нелінійні щодо параметрів залежності [4–9], які відповідають суті досліджуваних процесів.

Нехай неперервна додатна функція n змінних $f(X)$, де X — вектор, $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, задана на множині точок $\Omega=\{X_j\}_{j=1}^{s}$ обмеженої області D $(\Omega \in D)$ і не набуває значень, рівних нулеві $(\forall X \in D, f(X)>0)$, де $D \subset R^n$, R^n — n-вимірний векторний простір. Функцію $f(X)$ на множині точок Ω необхідно наблизити експоненціальним виразом $E_m(a; X)$,

$$E_m(a; X)=a_0 e^{P_m(a;\, X)}, \; m+1<s, \tag{1}$$

де $P_m(a; X)$ — узагальнений поліном,

$$P_m(a; X)=\sum_{i=1}^{m} a_i \varphi_i(X),$$

за системою лінійно незалежних неперервних на D дійсних функцій $\varphi_i(X)$, $i=\overline{1,m}$, а a_i, $i=\overline{0,m}$, — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$. Вираз $E_m(a^*; X)$ називатимемо чебишовським наближенням функції $f(X)$ з відносною похибкою на множині точок Ω, якщо він задовольняє умову

$$\max_{X \in \Omega}\left|\frac{f(X)-E_m(a^*; X)}{f(X)}\right|=\min_{a \in A} \max_{X \in \Omega}\left|\frac{f(X)-E_m(a; X)}{f(X)}\right|.$$

Чебишовське наближення експоненціальним виразом використовують для опису спеціальних математичних функцій [10, 11], а також різних фізичних, біологічних і хімічних процесів [12–15], зокрема для опису термометричної характеристики германієвого мікросенсора [16, 17], для наближення початкових умов задачі просторової теплопровідності [4] тощо.

Властивості та спосіб обчислення параметрів чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою функцій однієї змінної визначено в праці [12], де побудова чебишовського наближення експоненціальним виразом з відносною похибкою потребує обчислення параметрів чебишовського наближення поліномом з абсолютною похибкою. Аналогічно до методу, описаного в праці [12], ми зводимо чебишовське наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою до побудови чебишовського наближення узагальненим поліномом

$$\overline{P}_m(a; X) = \overline{a}_0 + P_m(a; X) \tag{2}$$

функції $f_l(X) = \ln(f(X))$ на множині точок Ω з абсолютною похибкою щодо невідомих параметрів $\overline{a}_0$ і a_i, $i = \overline{1, m}$. Чебишовське наближення функцій багатьох змінних $f_l(X)$ поліномом (2) обчислюємо як граничне наближення у нормі простору L^p для $p \to \infty$ за методом, описаним в працях [18, 19].

ВЛАСТИВОСТІ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

У праці [12] теоретично обґрунтовано, що чебишовське наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою функції однієї змінної можна отримати на підставі чебишовського наближення поліномом значення логарифма функції з абсолютною похибкою. У випадку функцій багатьох змінних ця особливість чебишовського наближення експоненціальним виразом також справджується.

Теорема 1. Нехай неперервна додатна функція $f(X)$ задана на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$ обмеженої області D $(\Omega \subset D)$ і не набуває значень, рівних нулеві $(\forall X \in D, f(X) > 0)$, де $D \subset R^n$. Чебишовське наближення експоненціальним виразом (1) функції $f(X)$ з відносною похибкою на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$ визначається через чебишовське наближення узагальненим поліномом (2) функції $f_l(X) = \ln(f(X))$ на множині точок Ω з абсолютною похибкою. Значення параметрів a_i, $i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення виразом (1) збігаються зі значеннями однойменних параметрів чебишовського наближення узагальненим поліномом $\overline{P}_m(a; X)$ (2) функції $f_l(X)$ на множині точок Ω з абсолютною похибкою, а значення параметра a_0 обчислюється за формулою

$$a_0 = \frac{2 f(X_{\max}) f(X_{\min})}{\overline{E}_m(a; X_{\min}) f(X_{\max}) + \overline{E}_m(a; X_{\max}) f(X_{\min})}, \tag{3}$$

де $X_{\max}$ — точка, в якій відносна похибка наближення функції $f(X)$ виразом

$$\overline{E}_m(a; X) = e^{P_m(a; X)}$$

досягає найбільшого значення на множині точок $X \in \Omega$, а $X_{\min}$ — точка, в якій значення відносної похибки найменше.

Доведення. У роботі [4] для функцій багатьох змінних теоретично обґрунтовано, що точки H-множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (2) збігаються з точками H-множини чебишовського наближення експоненціальним виразом (1). У точках H-множини похибка чебишовського наближення набуває найбільшого значення за модулем [4]. Відповідно до [4] точки H-множини чебишовського наближення функцій багатьох змінних — це аналог точок альтернансу чебишовського наближення функцій однієї змінної. Ґрунтуючись на теоретичному висліді праці [4] щодо згаданої властивості точок H-множини чебишовського наближення, припустимо, що H-множина точок чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) складається з $(m+2)$-х точок:

$$H = \{H_i^+, i = \overline{1, k}, H_i^-, i = \overline{1, l}, \; k + l = m + 2\}.$$

Позначимо H^+ точки, в яких похибка наближення додатна, а через H^- — точки, в яких похибка наближення від'ємна. Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення параметри чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) функції $f(X)$ з відносною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 - a_0 e^{P_m(a;H_i^+)} / f(H_i^+) = |\mu|, \; i = \overline{1, k}, \\ 1 - a_0 e^{P_m(a;H_i^-)} / f(H_i^-) = -|\mu|, \; i = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{4}$$

де $|\mu|$ — похибка чебишовського наближення. Послідовно віднімаючи від k-го рівняння системи (4) $(k-1)$-е, від $(k-1)$-го рівняння — $(k-2)$-е й т.д. і аналогічно від l-го рівняння — $(l-1)$-е і т.д., вилучаємо з системи рівнянь (4) невідомі a_0 і μ. Через те, що значення функції $f(X)$ додатні й відмінні від нуля, то після логарифмування отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} P_m(a; H_{i+1}^+) - P_m(a; H_i^+) = \ln(f(H_{i+1}^+)) - \ln(f(H_i^+)), \; i = \overline{1, k-1}, \\ P_m(a; H_{i+1}^-) - P_m(a; H_i^-) = \ln(f(H_{i+1}^-)) - \ln(f(H_i^-)), \; i = \overline{1, l-1}. \end{cases} \tag{5}$$

Система рівнянь (5) збігається з системою рівнянь для визначення параметрів a_i, $i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення узагальненим поліномом (2) функції $f_l(X)$ з абсолютною похибкою. Оскільки точки H-множини чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) збігаються з точками H-множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (2), параметри чебишовського наближення узагальненим поліномом (2) функції $f_l(X)$ з абсолютною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} \ln(f(H_i^+)) - \bar{a}_0 - P_m(a; H_i^+) = |\bar{\mu}|, \; i = \overline{1, k}, \\ \ln(f(H_i^-)) - \bar{a}_0 - P_m(a; H_i^-) = -|\bar{\mu}|, \; i = \overline{1, l}, \end{cases} \tag{6}$$

де $|\bar{\mu}|$ — похибка чебишовського наближення. Аналогічно до вилучення невідомих a_0 і μ з системи рівнянь (4) вилучимо невідомі $\bar{a}_0$ і $\bar{\mu}$ з системи рівнянь (6). Після вилучення цих невідомих отримуємо систему рівнянь, яка збігається з системою рівнянь (5).

Оскільки система рівнянь для обчислення значень параметрів a_i, $i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) функції $f(X)$ на множині точок Ω з відносною похибкою збігається з системою рівнянь щодо значень однойменних параметрів чебишовського наближення функції $f_l(X)$ поліномом (2) на множині точок Ω з абсолютною похибкою, то обчислення значень параметрів a_i, $i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) можна звести до обчислення значень параметрів чебишовського наближення поліномом (2).

Значення параметра a_0 можна визначити як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення функції $f(X)$ виразом $a_0 \overline{E}_m(a; X)$ на множині точок Ω з відносною похибкою

$$\max_{X \in \Omega} \left| \frac{f(X) - a_0 \bar{E}_m(a; X)}{f(X)} \right| \xrightarrow[a_0]{} \min. \quad (7)$$

Розв'язок задачі (7) щодо значення параметра a_0 обчислюється за формулою (3).

Отже, значення параметрів a_i, $i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою збігаються зі значеннями одноіменних параметрів чебишовського наближення узагальненим поліномом $\bar{P}_m(a; X)$ функції $f_l(X)$ на множині точок Ω з абсолютною похибкою, а значення параметра a_0 обчислюють за формулою (3). Теорему доведено.

Ми розглянули чебишовське наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою, оскільки обчислення параметрів такого наближення зводиться до розв'язування лінійної задачі. З урахуванням швидкості зміни значень експоненціального виразу використання наближення експоненціальним виразом з відносною похибкою є практично доцільним [12].

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Для побудови чебишовського наближення узагальненим поліномом (2) функції $f_l(X)$ можна використати метод, описаний в [18, 19], який полягає в послідовному обчисленні середньостепеневих наближень поліномом (2) функції $f_l(X)$ у просторі E^p для $p = 2, 3, 4, \ldots$ Для оцінки похибки наближення в просторі E^p використовуємо норму

$$\|\Delta\|_{E^p} = \left(\sum_{X \in \Omega} \left| f_l(X) - \bar{P}_m(a; X) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ для $p \to \infty$ збігається зі значенням норми в просторі неперервних функцій $\|\Delta\|_C$ [20]:

$$\|\Delta\|_C = \max_{X \in \Omega} \left| f_l(X) - \bar{P}_m(a; X) \right|.$$

Для побудови середньостепеневих наближень використовуємо ітерації на основі методу найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_r(X)(f_l(X) - \bar{P}_m(a; X))^2 \xrightarrow[a \in A]{} \min, \; r = 0, 1, \ldots, \quad (8)$$

з ваговою функцією

$$\rho_0(X) \equiv 1, \; \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} \left| \Delta_i(X) \right|, \; r = 1, \ldots, p-2, \quad p = 3, 4, \ldots,$$

де $\Delta_k(X) = f_l(X) - \bar{P}_{m,k-1}(a; X)$, $k = \overline{1, r}$, $\bar{P}_{m,k}(a; X)$ — наближення функції $f_l(X)$ за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(X)$, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня $k+2$.

Завершення побудови середньостепеневих наближень за ітераціями (8) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\left| \mu_{r-1} - \mu_r \right| \le \varepsilon \mu, \quad (9)$$

де

$$\mu_r(X) = \max_{X \in \Omega} \left| f_l(x) - \bar{P}_{m,r}(a; X) \right|.$$

Застосування модуля у лівій частині цієї умови зумовлено можливою наявністю похибок заокруглення під час обчислення похибки наближення $\mu_r(X)$.

Відповідно до теореми 1 значення параметрів a_i, $i=\overline{1,m}$, чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) функції $f(X)$ на множині точок Ω з відносною похибкою збігаються зі значеннями однойменних параметрів отриманого наближення $\overline{P}_{m,r}(a;X)$, а значення параметра a_0 обчислюється за формулою (3).

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою для тестових прикладів підтверджують хорошу збіжність у випадку наближення функцій однієї, двох та трьох змінних.

Приклад 1. Знайдемо чебишовське наближення експоненціальним виразом $E_2(a;x)=a_0 e^{a_1 x + a_2 x^2}$ функції однієї змінної $y(x)=e^{1+2x+0.3x^3}$, заданої в точках x_i, $i=\overline{0,20}$, де $x_i=0.1i$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon=0.003$ в умові (9) за п'ять ітерацій (8) для функції $y_l(x)=\ln(y(x))$ отримано чебишовське наближення поліномом

$$\overline{P}_2(a;x)=0.8999999973x^2+1.32890568x+1.071094325,$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення 0.076952839. Чебишовське наближення функції $y(x)$ експоненціальним виразом

$$E_2(a;x)=2.909951377e^{1.32890568\,x+0.8999999973\,x^2} \tag{10}$$

забезпечує відносну похибку наближення 7.68%.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ експоненціальним виразом $E_2(a;x)$ з відносною похибкою, отримане за ітераційною схемою Ремеза [21, 22] з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена

$$E_2(a;x)=2.921771976e^{1.32499959071477\,x+0.900000214576721\,x^2}, \tag{11}$$

забезпечує похибку апроксимації 0.0748598. Перевищення похибки наближення експоненціальним виразом (10) порівняно з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює 0.0019414573. Похибка наближення експоненціальним виразом (10) перевищує на 2.59% похибку чебишовського наближення (11), отриманого за схемою Ремеза. Криву похибки апроксимації експоненціальним виразом (10) відображено на рис. 1. Вона відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення — має чотири екстремальні точки:

$$\begin{gathered}(0.,\ -0.07051128659),\ (0.5,\ 0.07680129784),\\ (1.5,\ -0.07680129924),\ (2.0,\ 0.07137685473),\end{gathered} \tag{12}$$

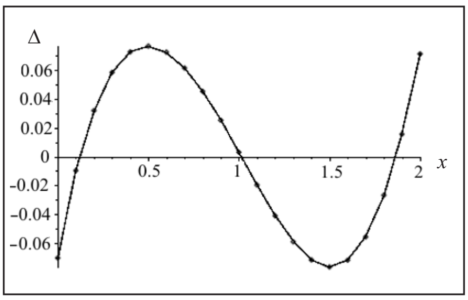

Рис. 1. Крива похибки чебишовського наближення функції $y(x)$ експоненціальним виразом (10) з відносною похибкою

в яких значення похибки наближення за модулем збігаються у межах заданої точності, а знак відхилення у цих точках чергується [21, 22]. Ці екстремальні точки збігаються з точками альтернансу, отриманими при наближенні за схемою Ремеза. Крім того, відповідно до твердження [4] щодо точок H-множини чебишовського наближення поліномом (2) ці точки збігаються також і з екстремальними точками наближення (12).

Розбіжність значень похибки наближення в екстремальних точках можна зменшити, збільшивши точність обчислення чебишовського наближення ε за умови (9). Чебишовське наближення функції $y(x)$ експоненціальним виразом $E_2(a;x)$ для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 72 ітерації:

$$E_2(a;x) = 2.921555346\, e^{1.325071275x + 0.9000000475x^2}. \qquad (13)$$

Наближення (13) забезпечує відносну похибку відтворення значень функції $y(x)$, яка дорівнює 7.4895%. В екстремальних точках відносна похибка наближення має вигляд

$$(0., \text{ — } 0.07478014822),\ (0.5,\ 0.07489517546),$$

$$(1.5, \text{ — } 0.07489517625),\ (2.0,\ 0.07479609998). \qquad (14)$$

Із (14) випливає, що з підвищенням точності обчислення чебишовського наближення екстремальні точки похибки наближення не змінилися, а розбіжність їхніх значень за модулем зменшилась.

Приклад 2. Знайдемо чебишовське наближення бета-функції Ейлера

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

заданої в точках (x_i, y_j), $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, де $x_i = 1 + 0.1i$, $y_j = 1 + 0.1j$, експоненціальним виразом

$$E_2(a;x,y) = a_0 e^{a_1(x+y) + a_2 xy + a_3(x^2 + y^2)} \qquad (15)$$

з відносною похибкою.

З використанням запропонованого методу для бета-функції Ейлера за вісім ітерацій (8) для $\varepsilon = 0.003$ отримано наближення експоненціальним виразом (15), в якому

$$a_0 = 8.38507483092,\ a_1 = -1.13493568422,\ a_2 = -0.405571471776,$$

$$a_3 = 0.279093111615. \qquad (16)$$

Це наближення забезпечує відносну похибку наближення бета-функції $B(x, y)$, яка дорівнює 1.1%.

Вигляд поверхні похибки наближення експоненціальним виразом (15) з коефіцієнтами (16) подано на рис. 2.

Приклад 3. Знайдемо чебишовське наближення функції $z_2(x, y, t) = e^{0.5(x^2 + y^2 + t^2) + \sin(xyt)}$, заданої в точках (x_i, y_j, t_r), $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, $r = \overline{0,10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, $t_r = 0.1r$, експоненціальним виразом

$$E_2(a;x,y) = a_0 e^{a_1(x+y+t) + a_2 xyt}$$

з відносною похибкою.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за вісім ітерацій отримано для функції $z_2(x, y, t)$ наближення експоненціальним виразом

$$E_2(a;x,y,t) =$$

$$= 0.828015993\, e^{0.5000037777(x+y+t) + 0.831658188xyt},$$

який забезпечує відносну похибку наближення 18%.

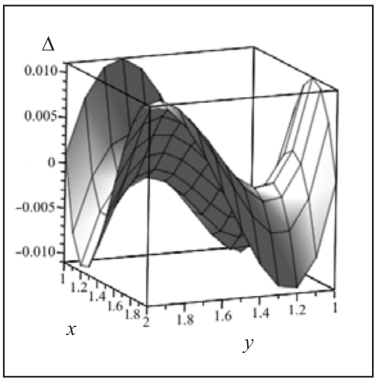

Рис. 2. Поверхня похибки чебишовського наближення бета-функції Ейлера експоненціальним виразом (16) з відносною похибкою

ВИСНОВКИ

Метод побудови чебишовського наближення таблично заданих додатних функцій багатьох змінних $f(X)$ експоненціальним виразом (1) з відносною похибкою ґрунтується на ідеї застосування проміжного чебишовського наближення узагальненим поліномом (2) функції $f_l(X)=\ln(f(X))$ з абсолютною похибкою. Запропонований метод забезпечує можливість обчислення чебишовського наближення експоненціальним виразом з необхідною точністю. Результати розв’язування тестових прикладів підтверджують досить швидку збіжність методу під час побудови чебишовського наближення експоненціальним виразом з відносною похибкою для функцій однієї, двох і трьох змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Cavoretto R. A numerical algorithm for multidimensional modeling of scattered data points. *Comp. Appl. Math.* 2015. Vol. 34. P. 65–80.
2. Iske A. Approximation theory and algorithms for data analysis. New York: Springer, 2018.
3. Kalenchuk-Porkhanova A.A. Best Chebyshev approximation of functions of one and many variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 6. P. 988–996.
4. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва: Наука, 1978. 272 с.
5. Dunham C.B. Approximation with one (or few) parameters nonlinear. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1988. Vol. 21, N 1. P. 115–118.
6. Braess D. Nonlinear approximation theory. Berlin; Heidelberg: Springer–Verlag, 1986.
7. DeVore R. Nonlinear approximation. *Acta Numerica. Cambridge University Press.* 1998. Vol. 7. P. 51–150.
8. DeVore R.A. , Kunoth A. Nonlinear approximation and its applications. In multscale, nonlinear and adaptive approximation. Berlin; Heidelberg: Springer–Verlag, 2009. P. 169–201.
9. Temlyakov V. Nonlinear methods of approximation. *J. of FOCM*. 2003. Vol. 3. P. 33–107.
10. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. Москва: Мир, 1980. 608 с.
11. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справочник. Киев: Наук. думка, 1984. 599 с.
12. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка, 1980. 352 с.
13. Dunham C.B. Difficulties in fitting scientific data. *ACM SIGNUM Newsletter.* 1990. Vol. 25, N 3. P. 15–20.
14. Каленчук-Порханова А.О., Вакал Л.П. Відтворення функціональних залежностей на основі нелінійних наближень деяких видів. Abstracts of International Conf. “Problems of decision making under uncertainties.” 21–25 May 2007. Chernivtsi, Ukraine, 2007. P. 135–137.
15. Zuowei Shen, Haizhao Yang, and Shijun Zhang. Nonlinear approximation via compositions. *Neural Networks.* Vol. 119, Nov. 2019. P. 74–84.
16. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential-power expression. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2013. Vol. 49, N 6. P. 877–881.
17. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential expression with relative error. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 2. P. 286–290.
18. Malachivskyy P.S., Matviychuk Y.N., Pizyur Ya.V., Malachivskyi R.P. Uniform approximation of functions of two variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 426–431.
19. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Malachivskyi R.P., and Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 1. P. 76–86.

20. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

21. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.

22. Малачівський П.С., Пізюр Я.В. Розв'язування задач в середовищі Maple. Львів: "РАСТР – 7", 2016. 282 с.

Надійшла до редакції 11.09.2020

П.С. Малачивский, Л.С. Мельнычок, Я.В. Пизюр

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Предложен метод построения чебышевского приближения экспоненциальным выражением функций многих переменных с относительной погрешностью. Он заключается в построении промежуточного чебышевского приближения обобщенным полиномом значений логарифма функции с абсолютной погрешностью. Для построения чебышевского приближения функций многих переменных обобщенным полиномом использована итерационная схема на основе метода наименьших квадратов с переменной весовой функцией. Представленные результаты решения тестовых примеров подтверждают быструю сходимость метода при расчете параметров чебышевского приближения таблично заданных непрерывных функций одной, двух и трех переменных.

Ключевые слова: чебышевское приближение экспоненциальным выражением, функции многих переменных, среднестепенное приближение, метод наименьших квадратов, переменная весовая функция.

P.S. Malachivskyy, L.S. Melnychok, Ya.V. Pizyur

CHEBYSHEV APPROXIMATION OF THE MULTIVARIABLE FUNCTIONS BY THE EXPONENTIAL EXPRESSION

Abstract. A method for constructing the Chebyshev approximation by the exponential expression of the multivariable functions with relative error is proposed. It generates an intermediate Chebyshev approximation by a polynomial of the values of the logarithm of a function with absolute error. An iterative scheme based on the least squares method with a variable weight function was used to construct a Chebyshev approximation of the multivariable functions by a generalized polynomial. The presented results of the solution of test examples confirm the fast convergence of the method when calculating the parameters of the Chebyshev approximation of table-defined continuous functions of one, two, and three variables.

Keywords: Chebyshev approximation by the exponential expression, multivariable functions, mean-power approximation, least squares method, variable weight function.

Малачівський Петро Стефанович,

доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Мельничок Лев Степанович,

кандидат техн. наук, старший науковий співробітник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, e-mail: levkom@gmail.com.

Пізюр Ярополк Володимирович,

кадидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка», Львів, e-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua.