УДК 519.21

Ю.В. ЖЕРНОВИЙ

НАДІЙНІСТЬ СИСТЕМИ З РЕЗЕРВУВАННЯМ, ПОСЛІДОВНИМ З'ЄДНАННЯМ ЕЛЕМЕНТІВ І ПОРОГОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ ВІДНОВЛЕННЯ

Анотація. Запропоновано метод дослідження надійності систем із резервуванням, послідовним з'єднанням елементів і стратегіями відновлення, які передбачають зміну інтенсивності ремонту залежно від кількості несправних елементів. Розглянуто випадок показникового розподілу часу безвідмовної роботи елементів, непоказникового розподілу часу відновлення і наявності одного каналу ремонту. Отримано формули для визначення перетворень Лапласа розподілу кількості несправних елементів протягом періоду зайнятості каналу ремонту, функції розподілу періоду зайнятості та для обчислення стаціонарних характеристик надійності.

Ключові слова: надійність, відновлювана система, резервування, послідовне з'єднання елементів, метод потенціалів.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

В інженерній практиці часто використовують відновлювані системи з послідовним з'єднанням елементів і групою резервних елементів, кожен з яких може бути задіяний у випадку виходу з ладу елемента основної системи [1, 2]. Елемент, що вийшов з ладу, скеровують на ремонт і резервний елемент миттєво займає його місце. Така система, яка складається з однотипних (ідентичних) елементів, може бути структурною одиницею системи, до складу якої входять підсистеми декількох типів.

Розглянемо систему, яка складається з $n+m$ елементів однакової надійності. Основні n елементів з'єднані послідовно, m — кількість резервних елементів ($m \geq 0$), при цьому застосовується роздільне резервування заміщенням (рис. 1). Система припиняє функціонування в нормальному режимі в момент, коли кількість елементів, що вийшли з ладу, досягає числа $m+1$. Припускаємо, що ті $n-1$ елементів, які були справними і працювали в момент виходу системи з ладу, в режимі простою системи продовжують працювати і можуть виходити з ладу. Ремонт елементів здійснює один канал.

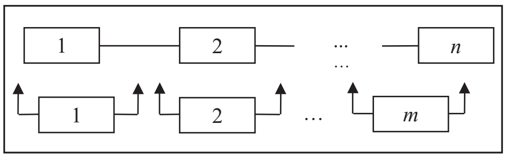

Рис. 1. Система з резервуванням і послідовним з'єднанням елементів

Якщо розподіли часу безвідмовної роботи і часу ремонту кожного елемента є показниковими з параметрами λ і μ відповідно, і «k» — стан системи, який означає, що k елементів вийшли з ладу, то граф станів системи має вигляд, зображений на рис. 2.

Нехай p_k — стаціонарна ймовірність перебування системи у стані «k», тоді стаціонарні характеристики надійності системи визначають за формулами

$$K = \sum_{k=0}^{m} p_k, \quad N = \sum_{k=0}^{m+n} k p_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{m+n-1} k p_{k+1}, \quad W = Q / \lambda_{\text{av}}, \quad \lambda_{\text{av}} = \sum_{k=0}^{m+n-1} \lambda_k p_k,$$

$$\lambda_k = \begin{cases} n\lambda, & 0 \leq k \leq m; \\ (n+m-k)\lambda, & m+1 \leq k \leq m+n-1. \end{cases}$$

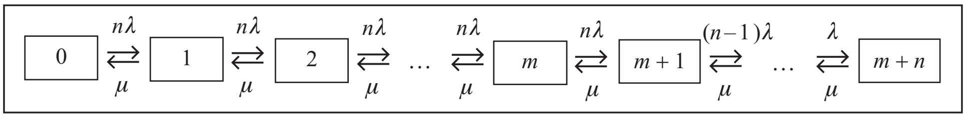

Рис. 2. Граф станів системи з показниковими розподілами

Тут K — коефіцієнт готовності, тобто ймовірність того, що система працює в нормальному режимі; N — середня кількість елементів, що вийшли з ладу; Q — середня довжина черги на ремонт; W — середній час очікування в черзі на ремонт.

Якщо розглядати описану систему як одноканальну систему обслуговування, то у разі відсутності резервних елементів ($m=0$) це — класична замкнена система обслуговування [3]. У випадку $m \geq 0$ формули для стаціонарних імовірностей p_k відомі лише для системи з показниковими розподілами [1]. Їх можна отримати, враховуючи, що процес зміни станів системи — це процес загибелі та розмноження.

У цій статті розглянуто узагальнення описаної системи за припущення, що розподіл часу ремонту є непоказниковим і для підвищення надійності системи можна застосувати порогову стратегію зміни інтенсивності ремонту залежно від кількості елементів, що вийшли з ладу. Природною є стратегія, згідно з якою інтенсивність ремонту збільшується разом з кількістю несправних елементів. Нехай $F_k(x)$ — функція розподілу часу ремонту одного елемента, де k — кількість несправних елементів у момент початку ремонту елемента $(1 \leq k \leq m+n-1)$.

Для визначення розподілу кількості несправних елементів застосовано метод потенціалів, розроблений у працях [4–8] для дослідження одноканальних систем обслуговування з пороговими та гістерезисними стратегіями функціонування.

ХАРАКТЕРИСТИКИ БАЗОВИХ ВИПАДКОВИХ БЛУКАНЬ

Нехай $\mathbf{P}_k$ — умовна ймовірність за умови, що в початковий момент часу на ремонті перебувають $k \in \{0, 1, 2, \ldots, m+n\}$ елементів; $\eta(x)$ — кількість елементів, які вийшли з ладу на проміжку часу $[0; x)$. Для $k \in \{1, 2, \ldots, m+n\}$ покладемо:

$$f_k(s) = f_k^{(0)}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_k(x), \;\; f_k^{(i)}(s+\lambda) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-(s+\lambda)x} dF_k(x), \;\; i = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$M_k = \int_0^\infty x dF_k(x) < \infty, \;\; \overline{F}_k(x) = 1 - F_k(x).$$

Розподіл часу ремонту може змінюватися лише в момент початку ремонту елемента і не змінюється до завершення ремонту цього елемента. Оскільки в момент початку ремонту елемента на відновленні не може перебувати $m+n$ елементів, то покладемо $F_{m+n}(x) = F_{m+n-1}(x)$.

Для $\operatorname{Re} s \geq 0$ і $k \in \{1, 2, \ldots, m+n\}$ розглянемо послідовності $\pi_{ki}(s)$ і $q_{ki}(s)$, які визначаються за допомогою співвідношень

$$\pi_{ki}(s) = \frac{1}{f_k(s)} \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_k\{\eta(x) = i+1\} dF_k(x), \;\; i \in \{-1, 0, 1, \ldots, m+n-k-1\};$$

$$q_{ki}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \mathbf{P}_k\{\eta(x) = i\} \overline{F}_k(x) dx, \;\; i \in \{0, 1, 2, \ldots, m+n-k\}.$$

Послідовність $\pi_{ki}(s)$ для $s>0$ і фіксованого k можна тлумачити як розподіл стрибків деякого напівнеперервного знизу випадкового блукання S_k (назвемо його базовим), яке відповідає функції розподілу $F_k(x)$ і ймовірностям $\mathbf{P}_k\{\eta(x)=i+1\}$. Функцію $R_k(s)=\dfrac{1}{f_k(s)\pi_{k,-1}(s)}$, $(k\in\{1,2,\dots,m+n-1\})$ називають резольвентою, а сталу $R_k=\lim\limits_{s\to+0}R_k(s)$ — потенціалом випадкового блукання S_k.

Нехай T_k — випадкова величина, розподілена показниково з параметром $k\lambda$. Після обчислення функцій розподілів скінченних сум незалежних випадкових величин отримаємо

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_k>x\}=e^{-n\lambda x},\ \ k\in\{1,2,\dots,m\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_{m+n-k}>x\}=e^{-(m+n-k)\lambda x},\ \ k\in\{m+1,m+2,\dots,m+n-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j-1}T_{m+n-i}<x<\sum_{i=k}^{k+j}T_{m+n-i}\right\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j}T_{m+n-i}>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j-1}T_{m+n-i}>x\right\}=$$

$$=\frac{(m+n-k)!}{(m+n-k-j)!}\sum_{i=k}^{k+j}\frac{(-1)^{i+j-k}e^{-(m+n-i)\lambda x}}{(i-k)!(k+j-i)!},$$

$$k\in\{m,m+1,\dots,m+n-2\},\ \ j\in\{1,2,\dots,m+n-k-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=m+n-k\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{m+n-1}T_{m+n-i}<x\right\}=1+\sum_{i=1}^{m+n-k}(-1)^i C_{m+n-k}^{i}e^{-i\lambda x},$$

$$k\in\{m,m+1,\dots,m+n-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\{jT_n<x<(j+1)T_n\}=\frac{(n\lambda x)^j}{j!}e^{-n\lambda x},$$

$$k\in\{1,2,\dots,m-1\},\ \ j\in\{1,2,\dots,m-k\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=m+1-k\}=\mathbf{P}\{(m+1-k)T_n+T_{n-1}>x\}-\mathbf{P}\{(m+1-k)T_n>x\}=$$

$$=n^{m+1-k}e^{-(n-1)\lambda x}-\sum_{i=0}^{m-k}\frac{(n\lambda x)^i}{i!}e^{-n\lambda x}-n^{m+1-k}(n-1)e^{-n\lambda x}\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m+1-k}\sum_{s=1}^{m+2-k-i}\frac{(\lambda x)^{m+2-k-i-s}}{(m+2-k-i-s)!\,n^s},\ \ k\in\{1,2,\dots,m-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=j\}=$$

$$=\mathbf{P}\left\{(m+1-k)T_n+\sum_{i=1}^{k+j-m}T_{n-i}>x\right\}-\mathbf{P}\left\{(m+1-k)T_n+\sum_{i=1}^{k+j-m-1}T_{n-i}>x\right\}=$$

$$=\frac{n!\,n^{m-k}\lambda^{m+2-k}}{(m+n-k-j)!}\left(\sum_{u=1}^{k+j-m-1}\frac{(-1)^{k+j+u-m-1}}{(u-1)!(k+j-m-u-1)!}-\right.$$

$$\left.-(m+n-k-j)\sum_{u=1}^{k+j-m}\frac{(-1)^{k+j+u-m}}{(u-1)!(k+j-m-u)!}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(n-u)\lambda(n\lambda)^{m+1-k}}-\frac{1}{(n-u)\lambda(u\lambda)^{m+1-k}}e^{-(n-u)\lambda x}+\right.$$

$$\left.+e^{-n\lambda x}\sum_{i=1}^{m+1-k}\sum_{s=1}^{m+2-k-i}\frac{x^{m+2-k-i-s}}{(m+2-k-i-s)!(u\lambda)^{i}(n\lambda)^{s}}\right),$$

$$k\in\{1,2,\ldots,m-1\},\ \ j\in\{m-k+2,m-k+3,\ldots,m-k+n-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=m+n-k\}=\mathbf{P}\left\{(m+1-k)T_n+\sum_{i=1}^{n-1}T_i<x\right\}=$$

$$=(n\lambda)^{m+1-k}\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i C_{n-1}^i\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{((n-i)\lambda)^{m+1-k}}-\frac{1}{(n\lambda)^{m+1-k}}-\right.$$

$$\left.-i\lambda e^{-n\lambda x}\sum_{j=1}^{m+1-k}\sum_{s=1}^{m+2-k-j}\frac{x^{m+2-k-j-s}}{(m+2-k-j-s)!((n-i)\lambda)^{j}(n\lambda)^{s}}\right),\ \ k\in\{1,2,\ldots,m-1\}.$$

У разі відсутності резервних елементів ($m=0$) слід користуватися формулами

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=0\}=\mathbf{P}\{T_{n-k}>x\}=e^{-(n-k)\lambda x},\ \ k\in\{1,2,\ldots,n-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=j\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j-1}T_{n-i}<x<\sum_{i=k}^{k+j}T_{n-i}\right\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j}T_{n-i}>x\right\}-\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{k+j-1}T_{n-i}>x\right\}=$$

$$=\frac{(n-k)!}{(n-k-j)!}\sum_{i=k}^{k+j}\frac{(-1)^{i+j-k}e^{-(n-i)\lambda x}}{(i-k)!(k+j-i)!},\ \ k\in\{1,2,\ldots,n-2\},\ \ j\in\{1,2,\ldots,n-k-1\};$$

$$\mathbf{P}_k\{\eta(x)=n-k\}=\mathbf{P}\left\{\sum_{i=k}^{n-1}T_{n-i}<x\right\}=1+\sum_{i=1}^{n-k}(-1)^i C_{n-k}^i e^{-i\lambda x},\ \ k\in\{1,2,\ldots,n-1\}.$$

Послідовності $\pi_{ki}=\lim\limits_{s\to+0}\pi_{ki}(s)$, $q_{ki}=\lim\limits_{s\to+0}q_{ki}(s)$ використовуватимемо для обчислення стаціонарних характеристик надійності системи. Для обчислення цих послідовностей слід враховувати, що

$$\lim_{s\to+0}f_k(s)=1,\ \ \lim_{s\to+0}\frac{1-f_k(s)}{s}=M_k,\ \ k\in\{1,2,\ldots,m+n\}.$$

ОБЧИСЛЕННЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАДІЙНОСТІ СИСТЕМИ

Нехай $\xi(t)$ — кількість елементів, що перебувають на ремонті в момент часу t, і $\tau=\inf\{t\ge 0:\xi(t)=0\}$ позначає перший період зайнятості каналу ремонту. Введемо позначення:

$$\varphi_k(t,u)=\mathbf{P}_k\{\xi(t)=u,\tau>t\},\ \ \Phi_k(s,u)=\int_0^\infty e^{-st}\varphi_k(t,u)dt,$$

$$\operatorname{Re}s>0,\ \ k,u\in\{1,2,\ldots,m+n\}.$$

Очевидно, що $\varphi_0(t,u)=0$. За допомогою формули повної ймовірності отримаємо рівності

$$\varphi_k(t,u)=\sum_{j=0}^{m+n-k}\int_0^t \mathbf{P}_k\{\eta(x)=j\}\varphi_{k+j-1}(t-x,u)dF_k(x)+$$

$$+I\{k\le u\le m+n\}\mathbf{P}_k\{\eta(t)=u-k\}\overline{F}_k(t),\ 1\le k\le m+n.$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того, відбулася подія A чи ні.

Увівши позначення $f_{(k)}(s,u,m,n)=I\{k\le u\le m+n\}q_{k,u-k}(s)$, одержимо систему рівнянь для відшукання функцій $\Phi_k(s,u)$:

$$\Phi_k(s,u)=f_k(s)\sum_{j=0}^{m+n-k}\pi_{k,j-1}(s)\Phi_{k+j-1}(s,u)+f_{(k)}(s,u,m,n),$$
$$1\le k\le m+n;\ \Phi_0(s,k)=0. \tag{1}$$

Для розв'язання системи рівнянь (1) використовуватимемо функції $\mathcal{R}_{ki}(s)$, які визначимо за допомогою рекурентних співвідношень:

$$\mathcal{R}_{k1}(s)=R_{k+1}(s);$$
$$\mathcal{R}_{k,j+1}(s)=R_{k+1}(s)\left(\mathcal{R}_{k+1,j}(s)-f_{k+1}(s)\sum_{i=0}^{j-1}\pi_{k+1,i}(s)\mathcal{R}_{k+1+i,j-i}(s)\right), \tag{2}$$
$$0\le k\le m+n-1,\ 1\le j\le m+n-1-k.$$

Якщо інтенсивність ремонту є сталою (не залежить від кількості несправних елементів), то

$$F_k(x)=F(x),\ f_k(s)=f(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x),\ 1\le k\le m+n.$$

Сталі $\mathcal{R}_{ki}=\lim_{s\to+0}\mathcal{R}_{ki}(s)$ $(0\le k\le m+n,\ 1\le i\le m+n-k)$ обчислюватимемо за допомогою рекурентних співвідношень, які випливають з (2):

$$\mathcal{R}_{k1}=R_{k+1};\ \mathcal{R}_{k,j+1}=R_{k+1}\left(\mathcal{R}_{k+1,j}-\sum_{i=0}^{j-1}\pi_{k+1,i}\mathcal{R}_{k+1+i,j-i}\right),$$
$$0\le k\le m+n-1,\ 1\le j\le m+n-1-k.$$

Оскільки рівняння (1) мають таку саму структуру, як і одержані раніше в працях [4, 7], то наведені нижче твердження випливають безпосередньо з цих публікацій з поправкою на замкнену структуру потоку несправних елементів.

Теорема 1. Для всіх $u\in\{1,2,\dots,m+n\}$ і $\operatorname{Re}s>0$ функції $\Phi_k(s,u)$ визначаються формулами:

$$\Phi_k(s,u)=\mathcal{R}_{k,\,m+n-k}(s)\Phi_{m+n}(s,u)-\sum_{i=1}^{m+n-k}\mathcal{R}_{ki}(s)f_{(k+i)}(s,u,m,n),\ 1\le k\le m+n-1;$$
$$\Phi_{m+n}(s,u)=\frac{1}{\mathcal{R}_{0,\,m+n}(s)}\sum_{i=1}^{m+n}\mathcal{R}_{0i}(s)f_{(i)}(s,u,m,n).$$

Теорема 2. Перетворення Лапласа від функції розподілу періоду зайнятості τ каналу ремонту має вигляд

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau>t\}dt=\frac{\mathcal{R}_{1,m+n-1}(s)}{s\mathcal{R}_{0,m+n}(s)}\sum_{i=1}^{m+n}\mathcal{R}_{0i}(s)(1-f_i(s))-\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{m+n-1}\mathcal{R}_{1i}(s)(1-f_{i+1}(s)).$$

Якщо інтенсивність ремонту є сталою, то

$$\int_0^\infty e^{-st}\mathbf{P}\{\tau>t\}dt=\frac{1-f(s)}{s}\left(\frac{\mathcal{R}_{1,m+n-1}(s)}{\mathcal{R}_{0,m+n}(s)}\sum_{i=1}^{m+n}\mathcal{R}_{0i}(s)-\sum_{i=1}^{m+n-1}\mathcal{R}_{1i}(s)\right).$$

Теорема 3. Середня тривалість періоду зайнятості каналу ремонту T і стаціонарний розподіл кількості несправних елементів $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{\xi(t)=k\}=p_k$, $0\le k\le m+n$, визначаються формулами

$$T=\sum_{k=1}^{m+n-1}\mathcal{R}_{0k}M_k-\sum_{k=1}^{m+n-2}\mathcal{R}_{1k}M_{k+1};\;\; p_0=\frac{1}{1+n\lambda T};$$

$$p_k=n\lambda p_0\left(\mathcal{R}_{0k}q_{k0}+\sum_{i=1}^{k-1}(\mathcal{R}_{0i}q_{i,k-i}-\mathcal{R}_{1i}q_{i+1,k-i-1})\right),\; 1\le k\le m+n-1;$$

$$p_{m+n}=n\lambda p_0\left(\mathcal{R}_{0,m+n-1}q_{m+n-1,1}+\sum_{i=1}^{m+n-2}(\mathcal{R}_{0i}q_{i,m+n-i}-\mathcal{R}_{1i}q_{i+1,m+n-1-i})\right).$$

Якщо інтенсивність ремонту є сталою, то $M_k=M$, $1\le k\le m+n-1$, і

$$T=M\left(\mathcal{R}_{0,m+n-1}+\sum_{k=1}^{m+n-2}(\mathcal{R}_{0k}-\mathcal{R}_{1k})\right).$$

ПРИКЛАДИ ОБЧИСЛЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НАДІЙНОСТІ

Розглянемо систему, в якій послідовно з'єднані п'ять елементів однакової надійності ($n=5$), m — кількість резервних елементів. Припустимо, що час безвідмовної роботи кожного елемента розподілений показниково з параметром $\lambda=0.25$.

Спочатку розглянемо систему зі сталою інтенсивністю ремонту, коли середній час ремонту одного елемента $M=1$ і не залежить від кількості несправних елементів. Для розподілів часу ремонту введемо такі позначення: E — показниковий розподіл з параметром $\mu=1$, $U[0;2]$ — рівномірний розподіл на відрізку $[0;2]$, $\Gamma(V)$ і $W(V)$ — гамма-розподіл і розподіл Вейбулла відповідно з коефіцієнтом варіації V. Для порівняння стаціонарних розподілів кількості несправних елементів для систем з непоказниковим і показниковим розподілами часу ремонту використовуватимемо абсолютне відхилення $\Delta_e=\sum_{k=0}^{m+n}|p_k-p_{k(e)}|$, де p_k і $p_{k(e)}$ — стаціонарні ймовірності для випадків непоказникового і показникового розподілів часу ремонту відповідно. Значення стаціонарних характеристик систем зі сталою інтенсивністю ремонту для різних значень кількості резервних елементів m, обчислені за допомогою методу потенціалів, наведено у табл. 1.

У табл. 2 наведено показники надійності систем, для яких використовується стратегія збільшення інтенсивності ремонту зі збільшенням кількості несправних елементів. Для системи без резервних елементів ($m=0$) застосовується стратегія з такими середніми значеннями часу ремонту:

Таблиця 1

Найменування розподілу	m	Значення характеристик надійності систем з різними розподілами часу ремонту (випадок сталої інтенсивності ремонту)				
		T	N	K	W	Δ_e
$\Gamma(0.1)$	0	4.3975	1.6157	0.1539	0.9096	0.2887
$W(0.1)$	0	4.3971	1.6157	0.1539	0.9097	0.2886
$\Gamma(0.5)$	0	3.9770	1.6699	0.1675	1.0058	0.1970
$W(0.5)$	0	3.9630	1.6718	0.1680	1.0093	0.1939
$U[0;\ 2]$	0	3.8077	1.6945	0.1736	1.0505	0.1571
$\Gamma\ (0.9)$	0	3.3627	1.7687	0.1922	1.1895	0.0409
E	0	3.2188	1.7963	0.1991	1.2427	—
$W(1.5)$	0	2.6816	1.9191	0.2298	1.4917	0.1845
$W(2)$	0	2.3378	2.0198	0.2550	1.7110	0.3359
$W(5)$	0	1.6294	2.3172	0.3293	2.4548	0.7604
$\Gamma(0.1)$	3	28.1351	3.7738	0.4020	2.8811	0.3070
$W(0.1)$	3	28.1251	3.7738	0.4020	2.8811	0.3070
$\Gamma(0.5)$	3	19.3738	3.7641	0.4112	2.9196	0.2126
$W(0.5)$	3	19.1390	3.7658	0.4102	2.9232	0.2119
$U[0;\ 2]$	3	16.7403	3.7707	0.4092	2.9509	0.1817
$\Gamma(0.9)$	3	11.4186	3.7694	0.4214	3.0335	0.0451
E	3	10.0991	3.7752	0.4232	3.0743	—
$W(1.5)$	3	6.3475	3.8095	0.4343	3.2897	0.2021
$W(2)$	3	4.6594	3.8520	0.4424	3.5134	0.3743
$W(5)$	3	2.2878	4.0372	0.4565	4.4489	0.8876
$\Gamma(0.1)$	5	76.5135	5.5026	0.4393	4.5602	0.3322
$W(0.1)$	5	76.4773	5.5026	0.4392	4.5602	0.3322
$\Gamma(0.5)$	5	44.5345	5.4173	0.4559	4.5146	0.2241
$W(0.5)$	5	43.8476	5.4175	0.4553	4.5163	0.2234
$U[0;\ 2]$	5	36.4566	5.3963	0.4574	4.5147	0.1903
$\Gamma(0.9)$	5	21.2944	5.3004	0.4750	4.4995	0.0457
E	5	18.0299	5.2762	0.4783	4.5104	—
$W(1.5)$	5	9.7024	5.1877	0.4916	4.6155	0.2075
$W(2)$	5	6.5000	5.1473	0.4981	4.7808	0.3850
$W(5)$	5	2.6766	5.1758	0.4966	5.7227	0.9136

$$M_k = \begin{cases} 1, & k=1; \\ 0.8, & k=2; \\ 0.6, & k=3; \\ 0.4, & k=4, \end{cases}$$

де k — кількість несправних елементів на момент початку ремонту елемента. Для випадків $m=3$ і $m=5$ середній час ремонту задаємо так:

$$M_k = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le m; \\ 0.8, & k=m+1; \\ 0.6, & k=m+2; \\ 0.4, & k=m+3; \\ 0.2, & k=m+4. \end{cases}$$

Таблиця 2

Найменування розподілу	m	Значення характеристик надійності систем з різними розподілами часу ремонту (випадок застосування порогових стратегій відновлення)				
		T	N	K	W	Δ_e
$\Gamma_k(0.1)$	0	3.7112	1.4202	0.1773	0.6677	0.2974
U_k	0	3.2119	1.4870	0.1994	0.7816	0.1677
E_k	0	2.7390	1.5853	0.2261	0.9504	—
$W_k(1.5)$	0	2.3136	1.7151	0.2569	1.1837	0.1805
$W_k(5)$	0	1.4980	2.1978	0.3481	2.2067	0.7750
$\Gamma_k(0.1)$	3	20.9210	3.2527	0.5355	2.1305	0.3188
U_k	3	12.7702	3.2408	0.5289	2.1763	0.1884
E_k	3	7.9454	3.2506	0.5274	2.2831	—
$W_k(1.5)$	3	5.1489	3.3123	0.5218	2.4962	0.2206
$W_k(5)$	3	2.0437	3.7616	0.4956	3.8597	0.9218
$\Gamma_k(0.1)$	5	58.4388	4.9412	0.5733	3.6318	0.3339
U_k	5	28.7117	4.8227	0.5774	3.5757	0.1949
E_k	5	14.6647	4.7041	0.5824	3.5705	—
$W_k(1.5)$	5	8.1220	4.6400	0.5787	3.6880	0.2258
$W_k(5)$	5	2.4329	4.8682	0.5341	5.0565	0.9414

Для розподілів часу ремонту в табл. 2 використовуємо ті самі позначення, що й у табл. 1, з додаванням індексу k для розподілу із середнім значенням M_k. Зокрема, позначення U_k використовуємо для рівномірного розподілу на відрізку $[0; 2M_k]$.

Аналізуючи дані табл. 1 бачимо, що відхилення Δ_e збільшується відповідно до збільшення величини $|V-1|$, де V — коефіцієнт варіації розподілу часу ремонту; середня тривалість періоду зайнятості каналу ремонту T зменшується зі збільшенням V для фіксованого значення m і зростає зі збільшенням m для фіксованого розподілу часу ремонту. Середня кількість несправних елементів N також збільшується зі збільшенням m для фіксованого розподілу часу ремонту, що зумовлено, зокрема, збільшенням загальної кількості елементів. Зі збільшенням V середня кількість несправних елементів N збільшується для випадків, коли $m=0$ і $m=3$, і зменшується для $m=5$. Коефіцієнт готовності K і середній час очікування на ремонт W зростають зі збільшенням V і m. Для систем з розподілами $\Gamma(0.1)$ і $W(0.1)$ часу ремонту стаціонарні характеристики практично збігаються.

Дані табл. 2 свідчать про те, що використання стратегії зростання інтенсивності ремонту зі збільшенням кількості несправних елементів призводить до зменшення величин T, N і W і до збільшення коефіцієнта готовності K.

Отже, за допомогою методу потенціалів одержано прості та зручні для числової реалізації формули для відшукання характеристик надійності систем з послідовним з’єднанням елементів, використанням резервування і порогових стратегій відновлення з непоказниковими розподілами часу ремонту. Ми обмежилися випадком показникового розподілу часу безвідмовної роботи елементів і наявності одного каналу ремонту. Одержані аналітичним методом результати перевірено за допомогою імітаційних моделей з використанням GPSS World [2, 9].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ushakov I. Probabilistic reliability models. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012. 232 p.
2. Жерновий Ю.В. Імітаційні моделі надійності: Практикум з використання GPSS World. Житомир: ДП «Житомир-Poligraf», 2020. 168 с.
3. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания. Москва: Машиностроение, 1969. 324 с.
4. Жерновый Ю., Жерновый К. Метод потенциалов для пороговых стратегий обслуживания. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. 164 с.
5. Zhernovyi Yu.V., Zhernovyi K.Yu. Method of potentials for a closed system with queue length dependent service times. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2015. Vol. 60, N 12. P. 1341–1347. https://doi.org/10.1134/S1064226915120219.
6. Zhernovyi Yu., Kopytko B. The potentials method for a closed queueing system with hysteretic strategy of the service time change. *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*. 2015. Vol. 14, Iss. 2. P. 131–143. https://doi.org/10.17512/jamcm.2015.2.14.
7. Zhernovyi Yu.V., Zhernovyi K.Yu. Potentials method for $M/G/1/m$ systems with threshold operating strategies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 481–491. https:// doi.org/10.1007/s10559-016-9849-7.
8. Zhernovyi Yu.V. Potentials method for $M/G/1/m$ systems with hysteretic operating strategies. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 5. P. 770–781. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9878-2.
9. Zhernovyi Yu. Creating models of queueing systems using GPSS World: Programs, detailed explanations and analysis of results. Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2015. 220 p.

Надійшла до редакції 05.10.2020

Ю.В. Жерновый

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМЫ С РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ И ПОРОГОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Аннотация. Предложен метод исследования надежности систем с резервированием, последовательным соединением элементов и стратегиями восстановления, которые предусматривают изменение интенсивности ремонта в зависимости от числа неисправных элементов. Рассмотрен случай показательного распределения времени безотказной работы элементов, непоказательного распределения времени восстановления и наличия одного канала ремонта. Получены формулы для определения преобразований Лапласа распределения числа неисправных элементов в течение период занятости канала ремонта, функции распределения периода занятости и для вычисления стационарных характеристик надежности.

Ключевые слова: надежность, восстанавливаемая система, резервирование, последовательное соединение элементов, метод потенциалов.

Yu.V. Zhernovyi

RELIABILITY OF A SERIES SYSTEM WITH REDUNDANCY AND THRESHOLD RECOVERY STRATEGIES

Abstract. We propose a method for studying the reliability of series systems with redundancy and recovery strategies, which provide for a change in the repair intensity depending on the number of failed units. The case of the exponential distribution of the time to failure of units, the non-exponential distribution of the recovery time, and one repair channel are considered. Formulas to determine Laplace transforms of the distribution of the number of failed units during the busy period of the repair channel and of the distribution function of the busy period and to calculate the stationary reliability indices are obtained.

Keywords: reliability, recoverable system, redundancy, series system, method of potentials.

Жерновий Юрій Васильович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Львівського національного університету імені Івана Франка, e-mail: yuriy.zhernovyy@lnu.edu.ua.