УДК 519.216

Т.А. АЛИЕВ, Н.Ф. МУСАЕВА, Н.Э. РЗАЕВА

АЛГОРИТМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМИРОВАННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ЗАШУМЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Аннотация. Показано, что в объектах управления сигналы обычно представляют собой различные физические величины, такие как температура, давление, вибрация и т.д. Поэтому при решении задач контроля, диагностики и идентификации возникает необходимость формирования нормированных корреляционных матриц. Проанализированы трудности формирования нормированных корреляционных матриц зашумленных входных-выходных сигналов технических объектов. Предложены алгоритмы определения эквивалентных отсчетов помехи и полезного сигнала и показана возможность их использования для формирования нормированных корреляционных матриц, эквивалентных корреляционным матрицам полезных сигналов зашумленных случайных процессов. Показано, что при этом значительно упрощается процедура формирования нормированных корреляционных матриц и существенно уменьшается погрешность их элементов.

Ключевые слова: сигнал, помеха, зашумленный сигнал, нормированные корреляционные матрицы, объект, диагностика.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при решении задач диагностики и идентификации технического состояния объектов управления возникает необходимость формирования корреляционных матриц [1–8]. Элементами этих матриц являются оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций входных-выходных случайных сигналов объекта исследования. Однако на полезные случайные сигналы $X(t)$, получаемые на выходах датчиков этих объектов, накладываются помехи $\mathrm{E}(t)$, которые также представляют собой случайные функции. Причины появления помех различны, но вне зависимости от их происхождения результаты вычисления оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций искажаются, что в итоге приводит к ошибочным значениям элементов корреляционных матриц и, как следствие, к неадекватному решению задач контроля, диагностики, прогноза, идентификации, оптимизации и др. [9–11].

Обычно, если известна причина появления помехи, ее стараются устранить либо применяют различные алгоритмы и технологии фильтрации [1, 2, 12]. Однако для многих реальных объектов помехи в технологических процессах возникают не только под влиянием внешних факторов $\mathrm{E}_1(t)$. Некоторые из помех $\mathrm{E}_2(t)$ косвенно отражают определенные процессы, приводящие к образованию дефектов при эксплуатации исследуемых объектов [1–3, 13]. Вследствие этого часто диапазон спектра суммарной помехи $\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}_1(t) + \mathrm{E}_2(t)$ пересекается со спектром полезного сигнала $X(t)$ и между ними возникает корреляция. Кроме того, спектры помехи $\mathrm{E}(t)$ и полезного сигнала не являются строго стабильными. Поэтому в процессе фильтрации не всегда достигается желаемый результат, иногда может произойти искажение спектра полезного сигнала $X(t)$ [1, 2, 12].

В связи с указанными факторами в предлагаемой работе рассматривается один из возможных вариантов создания альтернативных алгоритмов и технологий формирования корреляционных матриц с элементами, эквивалентными элементам матрицы полезных сигналов. Это позволит получить конечный результат

© Т.А. Алиев, Н.Ф. Мусаева, Н.Э. Рзаева, 2021

решения перечисленных задач, идентичный результатам вычислений для матриц с элементами, не имеющими погрешностей.

Однако с учетом того, что в объектах управления входные-выходные сигналы представляют собой различные физические величины (например, температура, давление, вибрация, перемещение и т.д.), значения которых варьируются в разных диапазонах, для приведения элементов к безразмерным величинам следует формировать нормированные эквивалентные корреляционные матрицы с элементами, эквивалентными элементам нормированных корреляционных матриц полезных сигналов. В предлагаемой работе рассматривается один из возможных вариантов решения этой проблемы.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известно [1–3, 8], что техническое состояние объекта в общем случае описывается матричными уравнениями. При нормальном состоянии объекта, когда отсутствует помеха от появления дефектов, износов, коррозии, трещин, поломок и других неисправностей, матричное уравнение состоит из матриц, элементами которых являются оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций полезных сигналов $X(t)$, $Y(t)$:

$$\vec{R}_{XY}(\mu) = \vec{R}_{XX}(\mu)\vec{W}(\mu), \ \mu = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, (N-1)\Delta t, \quad (1)$$

где

$$\vec{R}_{XX}(\mu) = \begin{Vmatrix} R_{XX}(0) & R_{XX}(\Delta t) & \ldots & R_{XX}[(N-1)\Delta t] \\ R_{XX}(\Delta t) & R_{XX}(0) & \ldots & R_{XX}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{XX}[(N-1)\Delta t] & R_{XX}[(N-2)\Delta t] & \ldots & R_{XX}(0) \end{Vmatrix}, \quad (2)$$

$$\vec{R}_{XY}(\mu) = [R_{XY}(0) \quad R_{XY}(\Delta t) \quad \ldots \quad R_{XY}[(N-1)\Delta t]]^{\mathrm{T}}, \quad (3)$$

$\vec{W}(\mu) = [W(0) \quad W(\Delta t) \quad \ldots \quad W((N-1)\,\Delta t)]^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец импульсных переходных функций; $R_{XX}(\mu) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} X(i\Delta t)X((i+\mu)\Delta t)$ — оценки автокорреляционной функции центрированного полезного входного сигнала $X(t)$, $R_{XY}(\mu) \approx \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} X(i\Delta t)Y((i+\mu)\Delta t)$ — оценки взаимно корреляционной функции центрированных полезных входного $X(t)$ и выходного $Y(t)$ сигналов.

Однако при появлении дефектов вместо полезных сигналов $X(t)$, $Y(t)$ от соответствующих датчиков поступают зашумленные сигналы $G(t) = X(t) + \mathrm{E}(t)$, $\mathrm{H}(t) = Y(t) + \Phi(t)$. Наличие помех $\mathrm{E}(t)$, $\Phi(t)$ искажает результаты решения матричного уравнения (1), так как для реальных технических объектов формирование корреляционных матриц (2), (3) из оценок полезных сигналов $X(t)$ и $Y(t)$ становится невозможным.

При этом корреляционные матрицы (2), (3) реальных технологических процессов представляются в виде

$$\vec{R}_{GG}(\mu) = \begin{Vmatrix} R_{GG}(0) & R_{GG}(\Delta t) & \ldots & R_{GG}[(N-1)\Delta t] \\ R_{GG}(\Delta t) & R_{GG}(0) & \ldots & R_{GG}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{GG}[(N-1)\Delta t] & R_{GG}[(N-2)\Delta t] & \ldots & R_{GG}(0) \end{Vmatrix}, \quad (4)$$

$$\vec{R}_{G\text{H}}(\mu)=[R_{G\text{H}}(0) \quad R_{G\text{H}}(\Delta t) \quad \dots \quad R_{G\text{H}}[(N-1)\Delta t]]^{\text{T}}, \tag{5}$$

где

$$R_{GG}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G(i\Delta t)G((i+\mu)\Delta t)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i\Delta t)+\text{E}(i\Delta t))(X((i+\mu)\Delta t)+\text{E}((i+\mu)\Delta t)), \tag{6}$$

$$R_{G\text{H}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}G(i\Delta t)\text{H}((i+\mu)\Delta t)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X(i\Delta t)+\text{E}(i\Delta t))(Y((i+\mu)\Delta t)+\Phi((i+\mu)\Delta t)), \tag{7}$$

$R_{GG}(\mu)$, $R_{G\text{H}}(\mu)$ — оценки автокорреляционных и взаимно корреляционных функций зашумленных центрированных сигналов $G(t)$, $\text{H}(t)$.

В то же время на практике на многих реальных технических объектах оценки корреляционных функций полезных $X(t)$, $Y(t)$ и зашумленных $G(t)$, $\text{H}(t)$ сигналов нормируют, чтобы привести их к безразмерным величинам [1, 2, 8, 13, 14]. Нормированные автокорреляционные и взаимно корреляционные функции $r_{XX}(\mu)$, $r_{XY}(\mu)$, $r_{GG}(\mu)$, $r_{G\text{H}}(\mu)$ полезных и зашумленных сигналов вычисляются так:

$$r_{XX}(\mu)=\frac{R_{XX}(\mu)}{D_X},\ r_{XY}(\mu)=\frac{R_{XY}(\mu)}{\sqrt{D_X D_Y}},\ r_{GG}(\mu)=\frac{R_{GG}(\mu)}{D_G},\ r_{G\text{H}}(\mu)=\frac{R_{G\text{H}}(\mu)}{\sqrt{D_G D_{\text{H}}}}, \tag{8}$$

где $D_X=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[X(i\Delta t)]^2$, $D_Y=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[Y(i\Delta t)]^2$, $D_G=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[G(i\Delta t)]^2$,

$D_{\text{H}}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[\text{H}(i\Delta t)]^2$ — оценки дисперсий сигналов $X(t)$, $Y(t)$, $G(t)$, $\text{H}(t)$.

При этом соответствующие нормированные корреляционные матрицы зашумленных сигналов $G(t)$, $\text{H}(t)$ представляются в виде

$$\vec{r}_{GG}(\mu)=\begin{Vmatrix} r_{GG}(0) & r_{GG}(\Delta t) & \dots & r_{GG}[(N-1)\Delta t] \\ r_{GG}(\Delta t) & r_{GG}(0) & \dots & r_{GG}[(N-2)\Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{GG}[(N-1)\Delta t] & r_{GG}[(N-2)\Delta t] & \dots & r_{GG}(0) \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

$$\vec{r}_{G\text{H}}(\mu)=[r_{G\text{H}}(0) \quad r_{G\text{H}}(\Delta t) \quad \dots \quad r_{G\text{H}}[(N-1)\Delta t]]^{\text{T}}. \tag{10}$$

Очевидно, что нормированные корреляционные матрицы полезных сигналов будут иметь вид [1–3, 8]:

$$\vec{r}_{XY}(\mu)=\begin{Vmatrix} r_{XX}(0) & r_{XX}(\Delta t) & \dots & r_{XX}[(N-1)\Delta t] \\ r_{XX}(\Delta t) & r_{XX}(0) & \dots & r_{XX}[(N-2)\Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{XX}[(N-1)\Delta t] & r_{XX}[(N-2)\Delta t] & \dots & r_{XX}(0) \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$$\vec{r}_{XY}(\mu)=[r_{XY}(0) \quad r_{XY}(\Delta t) \quad \dots \quad r_{XY}[(N-1)\Delta t]]^{\text{T}}. \tag{12}$$

При этом матричное уравнение (1) с учетом (11), (12) преобразуется к виду

$$\vec{r}_{XY}(\mu) = \vec{r}_{XX}(\mu)\, W(\mu), \quad \mu = 0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, (N-1)\Delta t. \tag{13}$$

Сравнивая матрицы (9) и (11), (10) и (12), видим, что их соответствующие элементы значительно отличаются, т.е.

$$r_{GG}(\mu) \neq r_{XX}(\mu),\ r_{G\text{H}}(\mu) \neq r_{XY}(\mu),$$

вследствие чего имеют место неравенства

$$\vec{r}_{GG}(\mu) \neq \vec{r}_{XX}(\mu),\ \vec{r}_{G\text{H}}(\mu) \neq \vec{r}_{XY}(\mu). \tag{14}$$

В связи с этим для устранения погрешностей и, следовательно, неравенств (14), которые часто возникают на практике при формировании нормированных корреляционных матриц, необходимо разработать алгоритмы и технологии формирования эквивалентных нормированных корреляционных матриц $\vec{r}^{\,e}_{XX}(\mu), \vec{r}^{\,e}_{XY}(\mu)$, обеспечивающих выполнение равенства (13):

$$\vec{r}^{\,e}_{XX}(\mu) \approx \vec{r}_{XX}(\mu),\ \vec{r}^{\,e}_{XY}(\mu) \approx \vec{r}_{XY}(\mu). \tag{15}$$

Очевидно, что добиться получения равенств (15) можно в результате вычисления элементов $r^{e}_{XX}(\mu)$, $r^{e}_{XY}(\mu)$, эквивалентных элементам матрицы полезных сигналов $r_{XY}(\mu)$, $r_{XY}(\mu)$:

$$r^{e}_{XX}(\mu) \approx r_{XY}(\mu),\ r^{e}_{XY}(\mu) \approx r_{XY}(\mu).$$

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ НОРМИРОВАННЫХ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ

Рассмотрим особенности вычисления нормированных корреляционных матриц, элементами которых являются оценки корреляционных функций стационарных эргодических зашумленных сигналов $G(t)$, $\text{H}(t)$ с нормальным законом распределения. При этом формулы (6), (7) вычисления оценок автокорреляционных и взаимно корреляционных функций можно представить в виде [1–3, 13–15]:

$$R_{GG}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(i\Delta t)\, G(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [X(i\Delta t) X((i+\mu)\Delta t) + \text{E}(i\Delta t) X((i+\mu)\Delta t) +$$

$$+ X(i\Delta t)\, \text{E}((i+\mu)\Delta t) + \text{E}(i\Delta t)\, \text{E}((i+\mu)\Delta t] = R_{XX}(\mu) + R_{\text{E}X}(\mu) + R_{X\text{E}}(\mu) + R_{\text{EE}}(\mu),$$

$$R_{G\text{H}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(i\Delta t)\text{H}(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} [X(i\Delta t)\, Y((i+\mu)\Delta t) + X(i\Delta t)\, \Phi((i+\mu)\Delta t) +$$

$$+ \text{E}(i\Delta t)\, Y((i+\mu)\Delta t) + \text{E}(i\Delta t)\, \Phi((i+\mu)\Delta t)] = R_{XY}(\mu) + R_{X\Phi}(\mu) + R_{\text{E}Y}(\mu) + R_{\text{E}\Phi}(\mu),$$

где $R_{\text{E}X}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{E}(i\Delta t) X((i+\mu)\Delta t)$, $R_{X\text{E}}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\text{E}((i+\mu)\Delta t)$,

$$R_{X\Phi}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)\, \Phi((i+\mu)\Delta t),\ R_{\text{E}Y}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{E}(i\Delta t)\, Y((i+\mu)\Delta t),$$

$R_{\text{E}\Phi}(\mu) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{E}(i\Delta t)\, \Phi((i+\mu)\Delta t)$ — соответствующие оценки взаимно корреляционных функций; $R_{\text{EE}}(\mu)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\text{E}(i\Delta t)\,\text{E}((i+\mu)\Delta t)$ — оценки автокорреляционной функции помехи $\text{E}(t)$; $D_{\text{E}}=R_{\text{EE}}(0)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\text{E}(i\Delta t)\text{E}(i\Delta t)$ — дисперсия помехи $\text{E}(t)$.

В случае отсутствия корреляции между полезными сигналами $X(t)$, $Y(t)$ и помехами $\text{E}(t)$, $\Phi(t)$, т.е. при $R_{\text{E}X}(\mu)=0$, $R_{X\text{E}}(\mu)=0$, $R_{X\Phi}(\mu)=0$, $R_{\text{E}Y}(\mu)=0$, $R_{\text{E}\Phi}(\mu)=0$, с учетом условия

$$R_{\text{EE}}(\mu)=\begin{cases} D_{\text{E}} & \text{при} \quad \mu=0, \\ 0 & \text{при} \quad \mu\neq 0 \end{cases}$$

имеем

$$R_{GG}(\mu)=\begin{cases} R_{XX}(0)+D_{\text{E}} & \text{при} \quad \mu=0, \\ R_{XX}(\mu) & \text{при} \quad \mu\neq 0, \end{cases} \tag{16}$$

$$R_{G\text{H}}(\mu)=R_{XY}(\mu). \tag{17}$$

Согласно (16) корреляционную матрицу (4) зашумленных сигналов $\vec{R}_{GG}(\mu)$ можно преобразовать к виду:

$$\vec{R}_{GG}(\mu)\approx\begin{Vmatrix} R_{XX}(0)+D_{\text{E}} & R_{XX}(\Delta t) & \dots & R_{XX}[(N-1)\Delta t] \\ R_{XX}(\Delta t) & R_{XX}(0)+D_{\text{E}} & \dots & R_{XX}[(N-2)\Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{XX}[(N-1)\Delta t] & R_{XX}[(N-2)\Delta t] & \dots & R_{XX}(0)+D_{\text{E}} \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Используя (17), вектор-столбец (5) также можно представить в виде

$$\vec{R}_{G\text{H}}(\mu)=[R_{XY}(0) \quad R_{XY}(\Delta t) \quad \dots \quad R_{XY}[(N-1)\Delta t]]^{\text{T}}=\vec{R}_{XY}(\mu). \tag{19}$$

Очевидно, что вектор-столбец (19) можно считать эквивалентным вектор-столбцу (3) полезных сигналов $X(t)$, $Y(t)$, так как оценки их соответствующих элементов совпадают.

В тоже время, как следует из (18), корреляционная матрица $\vec{R}_{GG}(\mu)$ зашумленного сигнала $G(t)$ отличается от корреляционной матрицы $\vec{R}_{XX}(\mu)$ (2) полезного сигнала $X(t)$ диагональными элементами, которые представляют собой сумму оценки корреляционной функции полезного сигнала $R_{XX}(0)$ и дисперсии помехи D_{E}.

Кроме того, как указывалось ранее, на практике для реальных объектов при решении прикладных задач достаточно часто возникает необходимость нормирования элементов корреляционных матриц. Очевидно, что с учетом (16) формулу (8) определения оценок нормированной автокорреляционной функции можно преобразовать так:

$$r_{GG}(\mu=0)=\frac{R_{GG}(\mu=0)}{D_G}=\frac{R_{XX}(\mu=0)+D_{\text{E}}}{D_G}, \tag{20}$$

$$r_{GG}(\mu\neq 0)=\frac{R_{GG}(\mu\neq 0)}{D_G-D_{\text{E}}}=\frac{R_{XX}(\mu\neq 0)}{D_X}. \tag{21}$$

Естественно, что формулу вычисления оценок нормированных взаимно корреляционных функций также можно представить в виде:

$$r_{GН}(\mu \neq 0) = \frac{R_{GН}(\mu)}{\sqrt{(D_G - D_{Е})(D_{Н} - D_{Ф})}} = \frac{R_{XY}(\mu)}{\sqrt{D_X D_Y}}. \tag{22}$$

Следовательно, эквивалентную нормированную корреляционную матрицу (9) зашумленного сигнала $G(t)$ с учетом (20), (21) можно представить в виде

$$\vec{r}^{\,e}_{GG}(\mu) \approx \begin{Vmatrix} \frac{R_{GG}(0)}{D_G} & \frac{R_{XX}(\Delta t)}{D_G - D_{Е}} & \cdots & \frac{R_{XX}[(N-1)\Delta t]}{D_G - D_{Е}} \\ \frac{R_{XX}(\Delta t)}{D_G - D_{Е}} & \frac{R_{GG}(0)}{D_G} & \cdots & \frac{R_{XX}[(N-2)\Delta t]}{D_G - D_{Е}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{R_{XX}[(N-1)\Delta t]}{D_G - D_{Е}} & \frac{R_{XX}[(N-2)\Delta t]}{D_G - D_{Е}} & \cdots & \frac{R_{GG}(0)}{D_G} \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Аналогично с учетом (22) также можно сформировать эквивалентную матрицу нормированной взаимно корреляционной функции

$$\vec{r}^{\,e}_{GН}(\mu) \approx \left[\frac{R_{XY}(0)}{\sqrt{(D_G - D_{Е})(D_{Н} - D_{Ф})}} \quad \frac{R_{XY}(\Delta t)}{\sqrt{(D_G - D_{Е})(D_{Н} - D_{Ф})}} \cdots \right.$$

$$\left. \cdots \frac{R_{XY}[(N-1)\Delta t]}{\sqrt{(D_G - D_{Е})(D_{Н} - D_{Ф})}} \right]^{\mathrm{T}}. \tag{24}$$

Из выражений (23), (24) следует, что для устранения погрешностей, которые возникают при нормировании корреляционных матриц при выполнении соотношений (16), (17), необходимо определить оценки дисперсий $D_{Е}$ и $D_{Ф}$ помех $Е(t)$, $Ф(t)$ зашумленных сигналов $G(t)$, $Н(t)$.

В то же время, как указывалось ранее, для реальных технических объектов характерно в процессе эксплуатации переходить в скрытый период образования различных дефектов [1, 2, 13]. Обычно все это отражается на сигналах, получаемых от соответствующих датчиков в виде шума, который в большинстве случаев коррелируется с полезными сигналами $X(t)$, $Y(t)$ [1, 2, 13], т.е. $R_{ЕX}(\mu) \neq 0$, $R_{XЕ}(\mu) \neq 0$, $R_{ЕY}(\mu) \neq 0$.

Вследствие этого суммарная помеха формируется из помехи $Е_1(t)$, возникающей под влиянием внешних факторов, и из шума $Е_2(t)$, появляющегося в результате образования различных дефектов. При этом дисперсия зашумленного сигнала имеет вид

$$D_G = R_{GG}(0) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G^2(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^2(i\Delta t) + 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)Е(i\Delta t) +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Е^2(i\Delta t) = R_{XX}(0) + 2R_{XЕ}(0) + R_{ЕЕ}(0). \tag{25}$$

Как следует из формулы (25), когда суммарная помеха

$$Е(t) = Е_1(t) + Е_2(t) \tag{26}$$

имеет корреляцию с полезным сигналом $X(t)$, тогда дисперсия ее суммарной помехи $D_{Е}$ определяется по выражению

$$D_{Е} = 2R_{XЕ}(0) + R_{ЕЕ}(0). \tag{27}$$

Из формулы (27) следует, что дисперсия D_{E} суммарной помехи (26) представляет собой сумму дисперсии помехи, которая возникает под влиянием внешних факторов $R_{\text{EE}}(0)$, и взаимно корреляционной функции между полезным сигналом и помехой $R_{X\text{E}}(0)$, появившейся в результате образования различных неисправностей в объекте [1, 2].

В связи с этим формулу определения оценки $R_{GG}(\mu)$ можно представить в виде:

$$R_{\text{GG}}(\mu)=\begin{cases} R_{XX}(0)+2R_{X\text{E}}(0)+R_{\text{EE}}(0) & \text{при} \quad \mu=0, \\ R_{XX}(\mu)+2R_{X\text{E}}(\mu) & \text{при} \quad \mu\neq 0. \end{cases} \tag{28}$$

Из выражения (28) видно, что при наличии корреляции, используя оценки $R_{\text{EE}}(0)$ и $R_{X\text{E}}(\mu)$, можно формировать корреляционные матрицы $\vec{R}^{e}_{GG}(\mu)$, эквивалентные матрицам полезных сигналов $\vec{R}_{XX}(\mu)$. При этом их можно представить в виде

$$\vec{R}^{e}_{GG}(\mu)\approx\begin{Vmatrix} R^{e}_{GG}(0) & R^{e}_{GG}(\Delta t) & \dots & R^{e}_{GG}[(N-1)\Delta t] \\ R^{e}_{GG}(\Delta t) & R^{e}_{GG}(0) & \dots & R^{e}_{GG}[(N-2)\Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R^{e}_{GG}[(N-1)\Delta t] & R^{e}_{GG}[(N-2)\Delta t] & \dots & R^{e}_{GG}(0) \end{Vmatrix}=$$

$$=\vec{R}_{XX}(\mu), \tag{29}$$

$$\vec{r}^{e}_{GG}(\mu)=\begin{Vmatrix} r^{e}_{GG}(0) & r^{e}_{GG}(\Delta t) & \dots & r^{e}_{GG}[(N-1)\Delta t] \\ r^{e}_{GG}(\Delta t) & r^{e}_{GG}(0) & \dots & r^{e}_{GG}[(N-2)\Delta t] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r^{e}_{GG}[(N-1)\Delta t] & r^{e}_{GG}[(N-2)\Delta t] & \dots & r^{e}_{GG}(0) \end{Vmatrix}=\vec{r}_{XX}(\mu), \tag{30}$$

где $R^{e}_{GG}(0)=R_{GG}(0)-2R_{X\text{E}}(0)-R_{\text{EE}}(0)$, $R^{e}_{GG}(\mu)=R_{GG}(\mu)-2R_{X\text{E}}(\mu)$ при $\mu\neq 0$,

$$r^{e}_{GG}(0)=\frac{R_{GG}(0)-2R_{X\text{E}}(0)-R_{\text{EE}}(0)}{D_G-D_{\text{E}}},\ r^{e}_{GG}(\mu)=\frac{R_{GG}(\mu)-2R_{X\text{E}}(\mu)}{D_G-D_{\text{E}}} \ \text{при}\ \mu\neq 0.$$

Таким образом, из выражений (29) и (30) видно, что при наличии корреляции между полезным сигналом и помехой, т.е. при $R_{X\text{E}}(\mu)\neq 0$, для формирования эквивалентных корреляционных матриц необходимо определить оценки дисперсиии помехи D_{E} и взаимно корреляционную функцию между полезным сигналом и помехой $R_{X\text{E}}(\mu)$. Разработка алгоритмов и технологий определения указанных оценок позволяет в результате анализа зашумленных сигналов сформировать корреляционные матрицы, эквивалентные матрицам полезных сигналов. С учетом того, что технология корреляционного анализа защумленных сигналов широко применяется во многих областях [1–8], создание технологий корреляционного анализа полезного сигнала и технологий анализа помехи имеет как теоретическое, так и важное практическое значение. В связи с этим целесообразно формировать нормированные эквивалентные корреляционные матрицы. Далее рассматривается один из возможных вариантов решения этой задачи.

АЛГОРИТМЫ КОРРЕКЦИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ ПУТЕМ ПОСТРОЕНИЯ МАТРИЦЫ С ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Далее будет показано, что можно уменьшить погрешности традиционных методов корреляционного анализа зашумленных сигналов, применив технологию определения эквивалентных отсчетов их помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ [1, 2]. Вначале рассмотрим возможность вычисления приближенных величин отсчетов помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$, которые трудно измерить. Анализ существующих вариантов решения этой задачи показал [1, 2], что с использованием технологии вычисления оценки дисперсии помехи D_{E} можно вместо трудно измеримых отсчетов помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$ определить их приближенные эквивалентные величины $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$. В работах [1–3, 8, 13] доказано, что форумулу вычисления дисперсии помехи $\mathrm{E}(t)$ можно представить в виде

$$D_{\mathrm{E}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} G(i\Delta t)\,G(i\Delta t) + G(i\Delta t)\,G((i+2)\Delta t) - 2G(i\Delta t)\,G((i+1)\Delta t)\,. \tag{31}$$

Исходя из (31), приближенную эквивалентную оценку квадрата отсчета помехи можно определить по формуле

$$\mathrm{E}^2(i\Delta t) = G(i\Delta t)[G(i\Delta t) + G((i+2)\Delta t) - 2G((i+1)\Delta t)] \approx [\mathrm{E}^e(i\Delta t)]^2. \tag{32}$$

Несмотря на возможные отклонения квадратов эквивалентных отсчетов $[\mathrm{E}^e(i\Delta t)]^2$ от их истинных значений $[\mathrm{E}(i\Delta t)]^2$, имеет место приближенное равенство

$$P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathrm{E}^e(i\Delta t)]^2 > \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathrm{E}(i\Delta t)]^2\right\} \approx$$

$$\approx P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathrm{E}^e(i\Delta t)]^2 < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[\mathrm{E}(i\Delta t)]^2\right\}, \tag{33}$$

где P — вероятность.

Исходя из данного приближенного равенства вероятностей (33), можно записать $\mathrm{E}(i\Delta t) \approx \mathrm{E}^e(i\Delta t) = \sqrt{[\mathrm{E}^e(i\Delta t)]^2}$ или с учетом (31), (32) получить выражение для вычисления отсчетов эквивалентной помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$:

$$\mathrm{E}(i\Delta t) \approx \mathrm{E}^e(i\Delta t) = \operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t)\sqrt{|\varepsilon'(i\Delta t)|}\,, \tag{34}$$

где $\varepsilon'(i\Delta t) = G(i\Delta t)[G(i\Delta t) + G((i+2)\Delta t) - 2G((i+1)\Delta t)]$,

$$\operatorname{sgn}\varepsilon'(i\Delta t) = \begin{cases} +1, & \text{когда } \varepsilon'(i\Delta t) > 0, \\ 0, & \text{когда } \varepsilon'(i\Delta t) = 0, \\ -1, & \text{когда } \varepsilon'(i\Delta t) < 0. \end{cases}$$

Аналогично выражению (32) можно утверждать, что, несмотря на возможные отклонения приближенных величин эквивалентных отсчетов $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ от их истинных значений $\mathrm{E}(i\Delta t)$ на величину $\Delta\mathrm{E}(i\Delta t) = \mathrm{E}^e(i\Delta t) - \mathrm{E}(i\Delta t)$, между их оценками имеет место приближенное равенство

$$P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}^e(i\Delta t) > \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}(i\Delta t)\right\} \approx P\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}^e(i\Delta t) < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}(i\Delta t)\right\}. \tag{35}$$

Тогда формулу вычисления средней величины $\overline{\mathrm{E}}(i\Delta t)$ отсчетов помехи $\mathrm{E}(i\Delta t)$ можно свести к вычислению средней величины эквивалентных отсчетов помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$, т.е.

$$\overline{\mathrm{E}}(i\Delta t) \approx \overline{\mathrm{E}}^e(i\Delta t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}(i\Delta t) \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{E}^e(i\Delta t). \tag{36}$$

Из равенств (31)–(36) следует, что с помощью эквивалентных отсчетов помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ по формуле

$$X^e(i\Delta t) \approx G(i\Delta t) - \mathrm{E}^e(i\Delta t) \approx G(i\Delta t) - \mathrm{E}(i\Delta t) \approx X(i\Delta t) \tag{37}$$

можно определить эквивалентные отсчеты $X^e(i\Delta t)$ полезного сигнала $X(i\Delta t)$.

При этом, несмотря на определенные погрешности отсчетов $X^e(i\Delta t)$ по сравнению с отсчетами полезных сигналов $X(i\Delta t)$, при достаточно длительном времени наблюдения T выполняется равенство

$$\left.\begin{array}{rcl} P[X(\Delta t) \geq X^e(\Delta t)] & = & P[X(\Delta t) \leq X^e(\Delta t)] \\ P[X(2\Delta t) \geq X^e(2\Delta t)] & = & P[X(2\Delta t) \leq X^e(2\Delta t)] \\ & \ldots & \\ P[X(n\Delta t) \geq X^e(n\Delta t)] & = & P[X(n\Delta t) \leq X^e(n\Delta t)] \end{array}\right\}.$$

Благодаря этому появляется возможность, выделив эквивалентные отсчеты помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ из зашумленного сигнала $G(i\Delta t)$, по полученным эквивалентным отсчетам полезного сигнала $X^e(i\Delta t)$ определить оценки $R^e_{X^eX^e}(\mu)$, эквивалентные оценкам корреляционных функций полезного сигнала $R_{XX}(\mu)$, т.е.

$$R_{XX}(\mu) \approx R^e_{X^eX^e}(\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X^e(i\Delta t)X^e(i\Delta t) & \text{при } \mu = 0, \\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X^e(i\Delta t)X^e((i+\mu)\Delta t) & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases}$$

В результате получаем равенство $R_{XX}(\mu) \approx R^e_{X^eX^e}(\mu)$, которое показывает, что, используя эквивалентные отсчеты помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ и полезного сигнала $X^e(i\Delta t)$, можно значительно уменьшить погрешность традиционных технологий корреляционного анализа зашумленных сигналов.

Благодаря этому появилась возможность по оценкам корреляционных функций $R^e_{X^eX^e}(\mu)$, полученным по эквивалентным отсчетам полезного сигнала $X^e(i\Delta t)$, формировать корреляционную матрицу $\vec{R}^e_{X^eX^e}(\mu)$, эквивалентную матрице полезных сигналов:

$$\vec{R}^e_{X^eX^e}(\mu) = \left\| \begin{array}{cccc} R^e_{X^eX^e}(0) & R^e_{X^eX^e}(\Delta t) & \ldots & R^e_{X^eX^e}[(N-1)\Delta t] \\ R^e_{X^eX^e}(\Delta t) & R^e_{X^eX^e}(0) & \ldots & R^e_{X^eX^e}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R^e_{X^eX^e}[(N-1)\Delta t] & R^e_{X^eX^e}[(N-2)\Delta t] & \ldots & R^e_{X^eX^e}(0) \end{array} \right\| \approx$$

$$\approx \vec{R}_{XX}(\mu).$$

При этом очевидно, что формулы определения оценок нормированных корреляционных функций можно представить в виде

$$r_{XX}(\mu)=\frac{R_{XX}(\mu)}{D_X}\approx\frac{R^e_{X^eX^e}(\mu)}{D_{X^e}}, \quad r_{XY}(\mu)=\frac{R_{XY}(\mu)}{\sqrt{D_X D_Y}}\approx\frac{R^e_{X^eY^e}(\mu)}{\sqrt{D_{X^e}D_{Y^e}}},$$

что позволяет устранить погрешности нормирования, возникающие при применении формулы (8).

В результате эквивалентную нормированную корреляционную матрицу можно представить так:

$$\vec{r}^{\,e}_{X^eX^e}(\mu)=\begin{Vmatrix} r^e_{X^eX^e}(0) & r^e_{X^eX^e}(\Delta t) & \ldots & r^e_{X^eX^e}[(N-1)\Delta t] \\ r^e_{X^eX^e}(\Delta t) & r^e_{X^eX^e}(0) & \ldots & r^e_{X^eX^e}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r^e_{X^eX^e}[(N-1)\Delta t] & r^e_{X^eX^e}[(N-2)\Delta t] & \ldots & r^e_{X^eX^e}(0) \end{Vmatrix}\approx$$

$$\approx\vec{r}_{XX}(\mu).$$

Таким образом, можно считать, что нормированные корреляционные матрицы $\vec{r}^{\,e}_{X^eX^e}(\mu)$, $\vec{r}^{\,e}_{X^eY^e}(\mu)$, сформированные из оценок, вычисленных по эквивалентным отсчетам полезных сигналов $X^e(i\Delta t)$, $Y^e(i\Delta t)$, будут эквивалентны нормированным корреляционным матрицам полезных сигналов $\vec{r}_{XX}(\mu), \vec{r}_{XY}(\mu)$, т.е.

$$\vec{r}_{XX}(\mu)\approx\vec{r}^{\,e}_{X^eX^e}(\mu),\ \vec{r}_{XY}(\mu)\approx\vec{r}^{\,e}_{X^eY^e}(\mu).$$

При этом матричные уравнения (1) и (13) можно представить в виде

$$\vec{R}^{\,e}_{X^eY^e}(\mu)=\vec{R}^{\,e}_{X^eX^e}(\mu)\ \vec{W}(\mu),\ \vec{r}^{\,e}_{X^eY^e}(\mu)=\vec{r}^{\,e}_{X^eX^e}(\mu)\ \vec{W}(\mu).$$

Таким образом, можно значительно уменьшить погрешности, провести корреляционный анализ зашумленных сигналов, повысить уровень адекватности при решении задач контроля, диагностики и идентификации технического состояния объектов управления. Отметим, что имея данные об эквивалентных отсчетах помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ и полезного сигнала $X^e(i\Delta t)$, можно улучшить также результаты решения задач управления.

ТЕХНОЛОГИЯ ПРОВЕДЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Далее приводятся результаты вычислительных экспериментов по коррекции погрешностей элементов корреляционных матриц зашумленных сигналов с помощью построения матрицы с эквивалентными элементами. Вычислительные эксперименты проводились с использованием средства компьютерной математики MATLAB.

Осуществляется одна из реализаций стационарного эргодического полезного сигнала $X(t)$, который считается истинным полезным сигналом. С помощью генератора случайных чисел формируется коррелированная с полезным сигналом $X(t)$ нормально распределенная помеха $\mathrm{E}(t)$ с заданным значением среднего квадратического отклонения σ_{E} и нулевым математическим ожиданием $m_{\mathrm{E}}=0$.

Предполагается, что это истинная помеха. Формируется зашумленный сигнал $G(t) = X(t) + \mathrm{E}(t)$ [16].

После этого согласно (34) вычисляются эквивалентные отсчеты помехи $\mathrm{E}^e(i\Delta t)$ и по формуле (37) определяются эквивалентные отсчеты $X^e(i\Delta t)$ полезного сигнала $X(t)$. Для $X^e(t)$, $X(t)$ и $G(t)$ с помощью традиционных алгоритмов вычисляются:

— средние значения $m_{X^e} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X^e(i\Delta t)$, $m_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X(i\Delta t)$;

— средние квадратические отклонения $\sigma_{X^e} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X^e(i\Delta t) - m_{X^e})^2$, $\sigma_X = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(i\Delta t) - m_X)^2$ и дисперсии $D_{X^e} = \sigma^2_{X^e}, D_X = \sigma^2_X$;

— нормированные автокорреляционные функции

$$r_{X^eX^e}(\mu) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X^e(i\Delta t) - m_{X^e})(X^e((i+\mu)\Delta t) - m_{X^e})\right] \Big/ D_{X^e},$$

$$r_{XX}(\mu) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X(i\Delta t) - m_X)(X((i+\mu)\Delta t) - m_X)\right] \Big/ D_X,$$

$$r_{GG}(\mu) = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (G(i\Delta t) - m_G)(G((i+\mu)\Delta t) - m_G)\right] \Big/ D_G.$$

Затем с использованием формул (8), (9), (11), (23), (28), (30) формируются нормированные корреляционные матрицы $\vec{r}_{XX}(\mu)$ сгенерированного полезного сигнала, $\vec{r}_{GG}(\mu)$ зашумленного сигнала $G(t)$ и $\vec{r}_{X^eX^e}(\mu)$ эквивалентного полезного сигнала $X^e(t)$.

Для проведения сравнительного анализа определяются относительные погрешности:

— средних значений и средних квадратических отклонений эквивалентного $X^e(i\Delta t)$ и сгенерированного полезного $X(t)$ сигналов

$$\Delta m_X = \left| m_{X^e} - m_X \right| / m_X \cdot 100\%, \quad \Delta\sigma_X = \left| \sigma_{X^e} - \sigma_X \right| / \sigma_X \cdot 100\%;$$

— элементов нормированной матрицы зашумленного сигнала $G(t)$ и эквивалентного полезного сигнала $X^e(t)$

$$\Delta r_{GG}(i\Delta t) = \frac{|r_{GG}(i\Delta t) - r_{XX}(i\Delta t)|}{r_{XX}(i\Delta t)} \cdot 100\%,$$

$$\Delta r_{X^eX^e}(i\Delta t) = \frac{|r_{X^eX^e}(i\Delta t) - r_{XX}(i\Delta t)|}{r_{XX}(i\Delta t)} \cdot 100\%.$$

Далее формируются матрицы относительных погрешностей элементов нормированной матрицы зашумленных сигналов $\Delta\vec{r}_{GG}(\mu)$ и эквивалентных сигналов $\Delta\vec{r}_{X^e X^e}(\mu)$:

$$\Delta\vec{r}_{GG}(\mu) \approx \begin{Vmatrix} \Delta r_{GG}(0) & \Delta r_{GG}(\Delta t) & \ldots & \Delta r_{GG}[(N-1)\Delta t] \\ \Delta r_{GG}(\Delta t) & \Delta r_{GG}(0) & \ldots & \Delta r_{GG}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta r_{GG}[(N-1)\Delta t] & \Delta r_{GG}[(N-2)\Delta t] & \ldots & \Delta r_{GG}(0) \end{Vmatrix},$$

$$\Delta\vec{r}_{X^e X^e}(\mu) \approx \begin{Vmatrix} \Delta r_{X^e X^e}(0) & \Delta r_{X^e X^e}(\Delta t) & \ldots & \Delta r_{X^e X^e}[(N-1)\Delta t] \\ \Delta r_{X^e X^e}(\Delta t) & \Delta r_{X^e X^e}(0) & \ldots & \Delta r_{X^e X^e}[(N-2)\Delta t] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta r_{X^e X^e}[(N-1)\Delta t] & \Delta r_{X^e X^e}[(N-2)\Delta t] & \ldots & \Delta r_{X^e X^e}(0) \end{Vmatrix}.$$

Проводится сравнение величин относительных погрешностей элементов нормированной матрицы $\Delta\vec{r}_{GG}(\mu)$ зашумленных сигналов и нормированной матрицы $\Delta\vec{r}_{X^e X^e}(\mu)$ эквивалентных сигналов и делаются соответствующие выводы.

РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И СРАВНИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА

Известно, что любой стационарный случайный процесс $X(t)$ на бесконечном интервале T можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией гармонических колебаний со случайной амплитудой и фазой [16]:

$$X_k(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\left(a_{\nu k}\cos\left(\frac{2\pi\nu}{T}t + \varphi_{1\nu\pi}\right) + b_{\nu k}\sin\left(\frac{2\pi\nu}{T}t + \varphi_{2\nu\pi}\right)\right),$$

если известны функции распределения вероятности коэффициентов $a_{\nu k}$, $b_{\nu k}$ и фаз $\varphi_{\nu k}$, $\varphi_{1\nu k}$, $\varphi_{2\nu k}$. Поэтому смоделирован полезный случайный сигнал $X(t) = 58\cdot\sin\left(\pi\frac{(k\cdot 1.5)^n}{T} + \varphi\right) + 200$ в виде возмущенной гармонической дискретной функции с начальной фазой φ, которая имеет равномерное распределение вероятностей, где $k \in [0, K]$, $K = 2598$; показатель степени $n = 1.5$; период сигнала $T = 1196$; начальная фаза φ задается в виде $\mathrm{rand(size(k))} * \mathrm{pi}/3$ (здесь функция $\mathrm{rand(size(k))}$ формирует вектор, соразмерный с вектором k, элементами которого являются случайные величины, распределенные по равномерному закону в интервале (0,1)).

Помеха $\mathrm{E}(t)$ подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $m_{\mathrm{E}} \approx 0.489$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_{\mathrm{E}} \approx 20$. Коэффициент корреляции между полезным сигналом $X(t)$ и помехой $\mathrm{E}(t)$ составляет $r_{X\mathrm{E}} = 0.1856$.

Результаты вычислений представлены в табл. 1–3.

Сравнительный анализ результатов вычислительных экспериментов. После анализа полученных результатов сделаны следующие выводы:

— для контроля эффективности предложенных алгоритмов матрицы сформированы так, чтобы значения элементов матрицы $\vec{r}_{XX}(\mu)$ сгенерированного полезного сигнала $X(t)$ и матрицы $\vec{r}_{GG}(\mu)$ сгенерированного зашумленного сигнала $G(t)$ сильно отличались одна от другой (см. табл. 1), т.е. $r_{GG}(i\Delta t) \neq$ $\neq r_{XX}(i\Delta t)$;

Т а б л и ц а 1

Матрица $\vec{r}_{XX}(\mu)$ полезного сигнала $X(t)$							Матрица $r_{GG}(\mu)$ зашумленного сигнала $G(t)$						
1	0.90	0.85	0.78	0.68	0.56	0.43	1	0.76	0.71	0.65	0.58	0.47	0.36
0.90	1	0.90	0.85	0.78	0.68	0.56	0.76	1	0.76	0.71	0.65	0.58	0.47
0.85	0.90	1	0.90	0.85	0.78	0.68	0.71	0.76	1	0.76	0.71	0.65	0.58
0.78	0.85	0.90	1	0.90	0.85	0.78	0.65	0.71	0.76	1	0.76	0.71	0.65
0.68	0.78	0.85	0.90	1	0.90	0.85	0.58	0.65	0.71	0.76	1	0.76	0.71
0.56	0.68	0.78	0.85	0.90	1	0.90	0.47	0.58	0.65	0.71	0.76	1	0.76
0.43	0.56	0.68	0.78	0.85	0.90	1	0.36	0.47	0.58	0.65	0.71	0.76	1

Т а б л и ц а 2

Матрица $\vec{r}_{X^eX^e}(\mu)$ эквивалентного полезного сигнала $X^e(t)$						
1	0.85836	0.86669	0.79176	0.71752	0.50277	0.41286
0.85836	1	0.85836	0.86669	0.79176	0.71752	0.50277
0.86669	0.85836	1	0.85836	0.86669	0.79176	0.71752
0.79176	0.86669	0.85836	1	0.85836	0.86669	0.79176
0.71752	0.79176	0.86669	0.85836	1	0.85836	0.86669
0.50277	0.71752	0.79176	0.86669	0.85836	1	0.85836
0.41286	0.50277	0.71752	0.79176	0.86669	0.85836	1

Т а б л и ц а 3

Матрица погрешностей $\Delta\vec{r}_{GG}(\mu)$, %							Матрица погрешностей $\Delta\vec{r}_{X^eX^e}(\mu)$, %						
0	15.6	16.8	17.0	14.3	15.2	15.8	0	4.7	1.77	1.76	5.79	9.79	3.0
15.6	0	15.6	16.8	17.0	14.3	15.2	4.7	0	4.7	1.77	1.76	5.79	9.79
16.8	15.6	0	15.6	16.8	17.0	14.3	1.77	4.7	0	4.7	1.77	1.76	5.79
17.0	16.8	15.6	0	15.6	16.8	17.0	1.76	1.77	4.7	0	4.7	1.77	1.76
14.3	17.0	16.8	15.6	0	16.8	17.0	5.79	1.76	1.77	4.7	0	4.7	1.77
15.2	14.3	17.0	16.8	15.6	0	16.8	9.79	5.79	1.76	1.77	4.7	0	4.7
15.8	15.2	14.3	17.0	16.8	15.6	0	3.0	9.79	5.79	1.76	1.77	4.7	0

— значениями погрешностей между оценками средних и средних квадратических отклонений полезного сигнала $X(t)$ и эквивалентного полезного сигнала $X^e(t)$ можно пренебречь, поскольку $m_X \approx m_{X^e}$, $\sigma_X \approx \sigma_{X^e}$, так как $m_X = 200.34$, $m_{X^e} = 200.87$, $\Delta m_X = 0.265\%$, $\sigma_X = 41.069$, $\sigma_{X^e} = 42.001$, $\Delta\sigma_X = 2.2686\%$;

— значениями погрешностей между элементами матрицы $\vec{r}_{XX}(\mu)$ полезного сигнала $X(t)$ и матрицы $\vec{r}_{X^eX^e}(\mu)$ эквивалентного полезного сигнала $X^e(t)$ также можно пренебречь, так как (см. табл. 1, 2) $r_{X^eX^e}(i\Delta t) \approx r_{XX}(i\Delta t)$;

— несмотря на то, что матрицы сформированы таким образом, чтобы величины относительных погрешностей элементов матрицы $\Delta\vec{r}_{GG}(\mu)$ варьировались в широких пределах (от 17 % до 0 % , см. табл. 3), величины относительных погрешностей элементов матрицы $\Delta\vec{r}_{X^e X^e}(\mu)$ изменяются в узких пределах от 5 % до 0 % (исключение составляет точка вблизи нуля (9%) (см. табл. 3)).

Таким образом, множество проведенных вычислительных экспериментов свидетельствует о достоверности алгоритмов формирования нормированных эквивалентных корреляционных матриц зашумленных случайных сигналов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общеизвестно, что решение многих задач идентификации и управления сводится к решению матричного уравнения и при этом требуется формирование соответствующих корреляционных матриц. Теоретически решение этих вопросов непроблематично. Однако при применении этого метода для решения таких практических задач, как идентификация динамики изменения технического состояния объектов управления — морских платформ, установок бурения, компрессорных станций и т.д., возникает множество проблем. Например, когда сигналы представляют собой различные физические величины и требуется применять процедуру их нормирования. В этом случае оказывается, что при формировании нормированных корреляционных матриц возникают дополнительные погрешности. Кроме того, достаточно часто в процессе эксплуатации объекта по прошествии времени между полезным сигналом и помехой появляется корреляция, что оказывает значительное влияние на погрешность формирования элементов корреляционной матрицы. При решении практических задач, кроме указанных проблем, возникают также другие, менее значительные.

Предлагаемая работа, в первую очередь, посвящена устранению трудностей широкого применения указанной теории на практике. Предлагаемые технология коррекции оценок корреляционных функций с использованием оценок взаимно корреляционной функции между помехой и полезным сигналом и оценки дисперсии помехи, а также технология решения этого вопроса с использованием эквивалентных отсчетов помехи и полезного сигнала могут успешно применяться во всех областях, где используются технологии корреляционного анализа зашумленных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aliev T. Noise control of the beginning and development dynamics of accidents. Springer, 2019. 201 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-12512-7.
2. Aliev T.A. Digital noise monitoring of defect origin. New York: Springer, 2007. 223 p. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71754-8.
3. Aliev T.A., Musaeva N.F. An algorithm for eliminating microerrors of noise in the solution of statistical dynamics problems. *Automation and remote control.* 1998. Vol. 59 (2), N 5. P. 679–688.
4. Numpacharoen K., Atsawarungruangkit A. Generating correlation matrices based on the boundaries of their coefficients. PLoS ONE. 2012. Vol. 7, Issue 11. e48902. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0048902.
5. Hardin J., Stephan Ramon Garcia, Golan D. A method for generating realistic correlation matrices. *The Annals of Applied Statistics.* 2013. Vol. 7, N 3. P. 1733–1762. https://doi.org/10.1214/13-AOAS638.
6. Khubaev G. Ways to identify errors in large arrays of numerical information. *Voprosy statistiki.* 2014. N 10. P. 20-24. https://doi.org/10.34023/2313-6383-2014-0-10-20-24.
7. Mike K.P.So, Jerry Wong, Manabu Asai. Stress testing correlation matrices for risk management. *The North American Journal of Economics and Finance.* 2013. Vol. 26. P. 310–322. https://doi.org/10.1016/j.najef.2013.02.007.

8. Aliev T.A., Musaeva N.F., Sattarova U.E. Technology of calculating robust normalized correlation matrices. *Cybernetics and Systems Analysis,* 2011. Vol. 47, N 1. P. 152–165. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9298-2.

9. Bila G.D. Identification of a nonparametric signal under strongly dependent random noise. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2016. Vol. 52, N 1. P. 160–172. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9811-8.

10. Stoikova L.S. Greatest lower bound of system failure probability on a special time interval under incomplete information about the distribution function of the time to failure of the system. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 2. P. 217–224. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9921-y.

11. Bendat J.S., Piersol A.G. Engineering applications of correlation and spectral analysis, 2nd Ed. New York: Wiley, 1993. https://doi.org/10.2514/3.49131.

12. Manolakis D.G, Ingle V.K. The discrete fourier transform. Applied digital signal processing: Theory and practice. Cambridge: Cambridge University Press, 2011. P. 353–433. https://doi.org/10.1017/CBO9780511835261.008.

13. Aliev T.A., Musaeva N.F., Suleymanova M.T. Algorithms for indicating the beginning of accidents based on the estimate of the density distribution function of the noise of technological parameters. *Automatic Control and Computer Science.* 2018. Vol. 52, Issue 3. P. 231–242. https://doi.org/10.3103/S0146411618030021.

14. Техническая кибернетика. Кн. 2. (Под ред. Солодовникова В.В.). Москва: Машиностроение, 1967.

15. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Москва: Наука, 1969. 576 с.

16. Вохник О.М., Зотов А.М., Короленко П.В., Рыжикова Ю.В. Моделирование и обработка стохастических сигналов и структур. Москва: МГУ им. Ломоносова, НИИ Ядерной физики им. Д.В. Скобельцына, 2012. 81 с. URL: http://optics.sinp.msu.ru.

Надійшла до редакції 27.07.2020

Т.А. Алієв, Н.Ф. Мусаєва, Н.Е. Рзаєва

АЛГОРИТМИ ФОРМУВАННЯ ЕКВІВАЛЕНТНИХ НОРМОВАНИХ КОРЕЛЯЦІЙНИХ МАТРИЦЬ ЗАШУМЛЕННЯ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Анотація. У об'єктах керування сигнали зазвичай представляють собою різні фізичні величини, такі як температура, тиск, вібрація тощо. Тому під час разв'язання задач контролю, діагностики та ідентифікації виникає необхідність формування нормованих кореляційних матриць. Проналізіровано труднощі формування нормованих кореляційних матриць зашумлених вхідних-вихідних сигналів технічних об'єктів. Запропоновано алгоритми визначення еквівалентних відліків перешкоди і корисного сигналу і показано можливість їхнього використання для формування нормованих кореляційних матриць, еквівалентних кореляційним матрицям корисних сигналів зашумлених випадкових процесів. Доведено, що у цьому разі значно спрощується процедура формування нормованих кореляційних матриць і суттєво зменшується похибка їхніх елементів.

Ключові слова: сигнал, перешкода, зашумленний сигнал, нормовані кореляційні матриці, об'єкт, діагностика.

T.A. Aliev, N.F. Musaeva, N.E. Rzayeva

ALGORITHMS FOR GENERATING THE EQUIVALENT NORMALIZED CORRELATION MATRICES OF NOISY RANDOM SIGNALS

Abstract. It is shown that in control objects, signals are usually various physical quantities, such as temperature, pressure, vibration, etc. Therefore, when solving problems of control, diagnostics, and identification, it becomes necessary to generate normalized correlation matrices. The difficulties of generating normalized correlation matrices of noisy input-output signals of engineering objects are analyzed. Algorithms are proposed for determining equivalent samples of the noise and the useful signal and the possibility of their use for generating normalized correlation matrices equivalent to the correlation matrices of useful signals of noisy random processes is shown. It is shown that in this case, the procedure of the formation of normalized correlation matrices is substantially simplified and the error of their elements is significantly reduced.

Keywords: signal, noise, noisy signal, normalized correlation matrices, object, diagnostics.

Алієв Тельман Аббас огли,
академік НАН Азербайджану, доктор техн. наук, професор, директор Інституту систем керування НАН Азербайджану, завідувач кафедри Азербайджанського архітектурно-будівельного університету, Баку, e-mail: telmancyber@gmail.com.

Мусаєва Наіля Фуад кизи,
доктор техн. наук, професор кафедри Азербайджанського архітектурно-будівельного університету, завідувач лабораторії Інституту систем керування НАН Азербайджану, Баку, e-mail: musanaila@gmail.com.

Рзаева Нармин Эльдар кызы,
кандидат техн. наук, доцент, завідувач науково-дослідного відділу Азербайджанського архітектурно-будівельного університету, Баку, e-mail: nikanel1@gmail.com.