СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

І.В. СЕРГІЄНКО, О.М. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, О.В. ТКАЧЕНКО, А.А. БІЛОБОРОДОВ

УДК 519.6

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ФОРМУЛІ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Анотація. Розглянуто питання про класи функцій, які точно відновлюються за допомогою формули Даламбера, узагальненої О.М. Литвином у 1989 р. Відомо, що ця формула в окремому випадку дає поліном Тейлора розвинення функції за однією змінною, але на відміну від полінома Тейлора зберігає той самий клас диференційовності, якому належить наближувана функція, навіть якщо частинні похідні s-го порядку ($s = 1, 2, \dots, N$) не належать тому самому класу диференційовності, якому належить наближувана функція. При цьому використано систему параметрів $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$. Запропоновано метод оптимального вибору цих параметрів, а також сформульовано та доведено теореми про класи функцій, які точно відновлюються узагальненими операторами Даламбера.

Ключові слова: інтерполяція, оператор, залишок, оптимізація.

ВСТУП

У цій статті запропоновано та досліджено методи оптимального вибору параметрів $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ в узагальненій формулі Даламбера, представленій О.М. Литвином [1–5].

Під час побудови та дослідження формул наближення функції однієї та багатьох змінних за допомогою інтерполяційних формул інформацію про клас диференційовності наближуваної функції ніде не подають в явному вигляді, за винятком випадків, коли порядок використаних значень похідних у точках інтерполяції обмежено класом диференційовності наближуваної функції. Проте під час наближення функції двох і більше змінних операторами інтерлінації ермітового типу за допомогою їхніх слідів та слідів їхніх нормальних похідних на заданій лінії або системі заданих ліній виникають ситуації, коли інформацію про наближувану функцію та її нормальні похідні задають слідами на вказаній лінії або на декількох лініях, і в цьому випадку відповідні сліди похідних можуть не мати того самого класу диференційовності, що й наближувана функція. Наприклад, оператор Тейлора за однією змінною може представляти функції, які можуть бути навіть не диференційовними за всіма змінними.

У цій статті використано такі позначення: $C^n(D)$ — множина функцій неперервних разом з їхніми похідними до n-го порядку включно в області D; C_n^m —

число сполучень із n по m, $C_n^m = \dfrac{n!(n-m)!}{m!}$; δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = j, \\ 0, & \text{якщо } i \neq j; \end{cases}$ I — тотожний оператор.

УЗАГАЛЬНЕНА ФОРМУЛА ДАЛАМБЕРА

Твердження 1 [1–5]. Нехай $r, N \in \mathbf{N}$, $r > N$. Функція $f(x, y) \in C^r(R^2)$, β_i, $i = \overline{0, N}$, — задані числа, що не дорівнюють одне одному, $\beta_k \neq \beta_l$, $k \neq l$; $k, l = \overline{0, N}$. Тоді оператор

$$D_{N,\beta} f(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_{N0i} f(x + \beta_i y, 0) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} \int_0^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt, \tag{1}$$

де числа λ_{Nsi} $(0 \leq s,\ i \leq N)$ є розв'язками системи $(N+1)$ лінійних алгебраїчних рівнянь, відповідних значенням $0 \leq s \leq N$,

$$\sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} \beta_i^p = \delta_{p,s},\ 0 \leq p \leq N, \tag{2}$$

має властивості

$$D_{N,\beta} f(x, y) \in C^r(R^2), \tag{3}$$

$$\left. \frac{\partial^s D_{N,\beta} f(x, y)}{\partial y^s} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^s f(x, y)}{\partial y^s} \right|_{y=0},\ s = \overline{0, N}. \tag{4}$$

Наголошуємо, що твердження 1 виконується для довільних $\{\beta_i\}$, $i = \overline{0, N}$, які задовольняють вказані вище умови, тому актуальною є задача вибору параметрів $\{\beta_i\}$ за умови мінімуму похибки наближення $R_{N,\beta} f(x, y) = (I - D_{N,\beta}) f(x, y)$. Отже, можна сформулювати таку оптимізаційну задачу:

$$\| R_{N,\beta} f(x, y) \|_{L_2} \to \min_{\beta_i,\, i = \overline{0, N}},$$

де $\| \ \|_{L_2}$ — деяка норма.

Класичні формули ермітової інтерлінації будуть представляти функції, які можуть бути навіть недиференційовними за всіма змінними. Наприклад, оператор Тейлора за однією змінною

$$T_N f(x, y) = \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \frac{(y - \gamma(x))^s}{s!}$$

має такі властивості:

$$\left. \frac{\partial^q T_N f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=\gamma(x)} = \left. \frac{\partial^q f(x, y)}{\partial y^q} \right|_{y=\gamma(x)},\ 0 \leq q \leq N,$$

$$f \in C^r(R^2) \cap f^{(0,s)}(x, \gamma(x)) \in C^{r-s}(R),\ 0 \leq s \leq N \leq r \Rightarrow T_N f \in C^{r-N}(R^2).$$

Інакше кажучи, функція $f(x, y) = |x + y - 1|(x + y - 1)^{2n}$ має частинні похідні порядку $2n+1$ за змінними x, y, які є розривними на лінії $x + y - 1 = 0$, бо її частинні похідні $2n$-го порядку мають вигляд $f^{(0,2n)}(x, y) = (2n+1)!|x + y - 1|$. Тому поліном Тейлора за степенями змінної y до порядку $2n$ буде недиференційовною функцією.

Оператор (1), наведений у твердженні 1, автоматично зберігає клас диференційовності функції f. Іншими словами,

$$f \in C^r(R^2) \Rightarrow D_{N,\beta} f(x, y) \in C^r(R^2).$$

Твердження 2 [1–5]. Залишок наближення функції $f(x, y)$ узагальненим оператором Даламбера $D_{N,\beta} f(x, y) : R_{N,\beta} f(x, y) = (I - D_{N,\beta}) f(x, y)$ можна представити у вигляді

$$R_{N,\beta} f(x, y) =$$

$$= \int_0^y \left[\sum_{i=0}^N \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{x+\beta_i(y-z)} (A_{N+1,\beta} f)(t, z) \cdot \frac{(x + \beta_i(y - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz, \qquad (5)$$

де

$$(A_{N+1,\beta} f)(x, y) = \prod_{i=0}^N \left(-\beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y), \qquad (6)$$

$$\Delta_{Ni} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^N (\beta_i - \beta_k), \ 0 \le s, \ i \le N.$$

ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ПАРАМЕТРІВ $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$ В УЗАГАЛЬНЕНІЙ ФОРМУЛІ ДАЛАМБЕРА

У цій статті розглянуто задачу вибору параметрів $\{\beta_i\}$, $i = \overline{0, N}$, за умови мінімуму похибки наближення $R_{N,\beta} f(x, y)$ (5). Отримано наведені нижче результати, сформульовані у вигляді теорем. Усі результати підтверджено відповідним обчислювальним експериментом.

Теорема 1. Нехай $\{\beta_k\}, 0 < \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_N < \infty$, — задана система чисел, а числа λ_{Nsi} є розв'язком системи (2), тоді для системи чисел $\tilde{\beta}_i = \beta_i C$, $i = \overline{0, N}$, $C > 0$, числа $\tilde{\lambda}_{Nsi} = \lambda_{Nsi} C^{-s}$ будуть розв'язками системи (2).

Доведення. Виконаємо безпосередню перевірку:

$$\sum_{i=0}^N \tilde{\lambda}_{Nsi} \tilde{\beta}_i^p = \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p C^{(p-s)} = C^{(p-s)} \sum_{i=0}^N \lambda_{Nsi} \beta_i^p = C^{(p-s)} \delta_{sp} = \begin{cases} 1, & s = p, \\ 0, & s \neq p \end{cases} = \delta_{sp}.$$

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Нехай $r, N \in \mathbf{N}$, $r > N$, $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $\{\beta_k\}, 0 < \beta_0 < \beta_1 < \ldots$ $\ldots < \beta_N < B < \infty$, — задана система чисел, а числа λ_{Nsi} є розв'язком системи (2), тоді оператор

$$\tilde{D}_{N,\beta} f(x, y) = \sum_{i=0}^N \lambda_{N0i} f\left(x + \frac{\beta_i}{B} y, 0 \right) +$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N_{si}}B^{s}\int_{0}^{x+\frac{\beta_i}{B}y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{\left(x+\frac{\beta_i}{B}y-t\right)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

має такі властивості:

$$\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)\in C^{r}(R^{2}),$$

$$\left.\frac{\partial^{s}\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)}{\partial y^{s}}\right|_{y=0}=\left.\frac{\partial^{s}f(x,y)}{\partial y^{s}}\right|_{y=0},\quad s=\overline{0,\,N}.$$

Доведення. Перейшовши до системи чисел $\widetilde{\beta}_i=\beta_i/B,\, 0<\widetilde{\beta}_0<\widetilde{\beta}_1<\ldots$ $\ldots<\widetilde{\beta}_N<1,\ \widetilde{\lambda}_{Nsi}=\lambda_{Nsi}B^{s}$, можемо записати оператор $\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)$ у вигляді

$$\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\widetilde{\lambda}_{N0i}f(x+\widetilde{\beta}_i y,0)+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\widetilde{\lambda}_{Nsi}\int_{0}^{x+\widetilde{\beta}_i y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\widetilde{\beta}_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt.$$

Тоді згідно з теоремою 1 числа $\widetilde{\lambda}_{Nsi}$ є розв'язками системи

$$\sum_{i=0}^{N}\widetilde{\lambda}_{Nsi}\widetilde{\beta}_i^{p}=\delta_{sp}.$$

Отже, отримуємо оператор $\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)$, який є узагальненим оператором Даламбера (1), при цьому доведення першої властивості $\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)\in C^{r}(R^{2})$ є таким самим, як і в узагальненій формулі Даламбера [1]. Теорему 2 доведено.

Теорема 3. Нехай $r,\ N\in\mathbf{N},\ r>N,\ f(x,y)\in C^{r}(R^{2}),\ \{\beta_k\},0<\beta_0<\beta_1<\ldots$ $\ldots<\beta_N<B<\infty$, — задана система чисел, а числа λ_{Nsi} є розв'язком системи (2), тоді оператор

$$\widetilde{D}_{N,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\lambda_{N0i}f(x+\beta_i y,0)+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_{x}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt$$

тотожно дорівнює оператору (1) $D_{N,\beta}f(x,y)$.

Доведення. Запишемо таку послідовність рівностей:

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_{0}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\left[\int_{0}^{x} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt+\right.$$

$$\left.+\int_{x}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt\right]=\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_{0}^{x} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt+$$

$$+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_{x}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt.$$

Для доведення достатньо показати, що $\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)\times$ $\times\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt=0$,

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{(s-1)!}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)\sum_{k=0}^{s-1}C_{s-1}^k(x-t)^{s-k-1}(\beta_i y)^k dt=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{(s-1)!}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\sum_{k=0}^{s-1}\beta_i^k C_{s-1}^k y^k\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)(x-t)^{s-k-1}dt=$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\frac{1}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{s-1}\left[C_{s-1}^k y^k\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)(x-t)^{s-k-1}dt\cdot\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^k\right].$$

Враховуючи, що $\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\beta_i^k=0,\ k\neq s$, отримаємо

$$\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=0}^{N}\lambda_{Nsi}\int_0^x f^{(0,s)}(t,0)\frac{(x+\beta_i y-t)^{s-1}}{(s-1)!}dt=0.$$

Теорему 3 доведено.

Із теореми 3 випливає, що під час побудови оператора $D_{N,\beta}f(x,y)$ можна обчислювати інтеграли за меншою областю інтегрування. Це має сенс у разі програмної реалізації, де інтеграли обчислюють наближено. Зменшення області інтегрування може зумовити зниження похибки наближення. Враховуючи теореми 1, 2, можна досягти вибору чисел $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N$ у межах від 0 до 1, що надасть змогу додатково зменшити область інтегрування.

Теорема 4. Якщо функція $f(x,y)\in C^r(R^2)$ має вигляд $f(x,y)=g(x+\alpha y)$, $g(t)\in C^r(R)$, $N<r$, то для залишку оператора (1) виконується така рівність:

$$R_{N,\beta}f(x,y)=$$

$$=\begin{cases}\prod_{i=0}^{N}(\alpha-\beta_i)\int_0^y\left(\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_x^{x+\beta_i(y-z)}g^{(N+1)}(t+\alpha z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}dt\right)dz, & \text{для } \alpha\notin\{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N\},\\ 0, & \text{для } \alpha\in\{\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N\}.\end{cases}$$

Доведення. Якщо взяти до уваги вигляд функції $f(x,y)=g(x+\alpha y)$, можна дійти висновку, що

$$\frac{\partial^p f}{\partial x^p}=\frac{1}{\alpha^p}\frac{\partial^p f}{\partial y^p}=g^{(p)}(x+\alpha y),\ 0\le p\le N.$$

Доведемо таку рівність:

$$(A_{N+1,\beta}f)(x,y)=\prod_{i=0}^{N}(\alpha-\beta_i)g^{(N+1)}(x+\alpha y). \tag{7}$$

Доведення рівності (7) здійснюють методом математичної індукції. Для $N=1$ маємо

$$(A_{2,\beta}f)(x,y)=\left(-\beta_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\beta_0\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)g(x+\alpha y)=$$

$$=\left(-\beta_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(\alpha g^{(1)}(x+\alpha y)-\beta_0 g^{(1)}(x+\alpha y))=$$

$$=(\alpha-\beta_0)\left(-\beta_1\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)g^{(1)}(x+\alpha y)=(\alpha-\beta_1)(\alpha-\beta_0)g^{(2)}(x+\alpha y).$$

Нехай для $N=m$ виконується рівність

$$(A_{m+1,\beta}f)(x,y)=\prod_{i=0}^{m}(\alpha-\beta_i)g^{(m+1)}(x+\alpha y),$$

тоді для $N=m+1$ маємо

$$(A_{m+2,\beta}f)(x,y)=\prod_{i=0}^{m+1}\left(-\beta_i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\left(-\beta_{m+1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\times$$

$$\times\prod_{i=0}^{m}\left(-\beta_i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=\left(-\beta_{m+1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\prod_{i=0}^{m}(\alpha-\beta_i)g^{(m+1)}(x+\alpha y)=$$

$$=\prod_{i=0}^{m}(\alpha-\beta_i)\left(-\beta_{m+1}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)g^{(m+1)}(x+\alpha y)=$$

$$=\prod_{i=0}^{m}(\alpha-\beta_i)(-\beta_{m+1}g^{(m+2)}(x+\alpha y)+\alpha g^{(m+2)}(x+\alpha y))=\prod_{i=0}^{m+1}(\alpha-\beta_i)g^{(m+2)}(x+\alpha y).$$

Підставляючи (7) у (5), отримаємо

$$R_{N,\beta}f(x,y)=$$

$$=\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_x^{x+\beta_i(y-z)}\prod_{k=0}^{N}(\alpha-\beta_k)g^{(N+1)}(t+\alpha z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}dt\right]dz=$$

$$=\prod_{k=0}^{N}(\alpha-\beta_k)\int_0^y\left[\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\int_x^{x+\beta_i(y-z)}g^{(N+1)}(t+\alpha z)\frac{(x+\beta_i(y-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}dt\right]dz.$$

Видно, що для будь-якого значення $\beta_k=\alpha$ множник при залишку $\prod_{k=0}^{N}(\alpha-\beta_k)=0.$ Теорему 4 доведено.

Отже, в теоремі 4 стверджується, що для функцій вигляду $f(x,y)=g(x+\alpha y)$ наближення цих функцій за допомогою узагальненої формули Даламбера є точним, якщо $\beta_k=\alpha$ для довільних, не рівних один одному β_i, $i\neq k$, $i=\overline{0,N}$.

Наслідок 1. Якщо $f(x,y)=|x+y-1|(x+y-1)^2$, то така функція відновлюється за допомогою оператора $D_{2,\beta}$ точно для $\beta_1=1$ або $\beta_2=1$.

Теорема 5. Якщо наближувана функція $f(x, y) \in C^r(R^2)$ має вигляд

$$f(x, y) = \sum_{j=0}^{m} \varphi_j (x + \alpha_j y) + \widetilde{f}(x, y), \tag{8}$$

$\varphi_j(t) \in C^r(R)$, $\widetilde{f}(x, y) \in C^r(R^2)$, $j = \overline{0, m}$, $0 \le m \le N < r$, то для залишку (5) узагальненого оператора Даламбера виконується рівність

$$R_{N,\beta} f(x, y) = R_{N,\beta} \widetilde{f}(x, y)$$

за умови, що

$$\alpha_j \in \{\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N\}, \ j = \overline{0, m}. \tag{9}$$

Доведення. Для доведення теореми 5 достатньо показати, що за умови (8) виконується рівність $A_{N+1,\beta} f(x, y) = A_{N+1,\beta} \widetilde{f}(x, y)$. Враховуючи лінійність оператора $A_{N+1,\beta}$, можемо записати:

$$A_{N+1,\beta} f(x, y) = A_{N+1,\beta} \left(\sum_{j=0}^{m} \varphi_j (x + \alpha_j y) + \widetilde{f}(x, y) \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} A_{N+1,\beta} \varphi_j (x + \alpha_j y) + A_{N+1,\beta} \widetilde{f}(x, y).$$

З урахуванням вигляду оператора (6) та за умови (8) кожний доданок $A_{N+1,\beta} \varphi_j (x + \alpha_j y)$ дорівнює нулю, в результаті отримаємо $A_{N+1,\beta} f(x, y) =$ $= A_{N+1,\beta} \widetilde{f}(x, y)$ (див. також [4–7]). Теорему 5 доведено.

ПЕРЕВІРКА НАСЛІДКУ 1 ТЕОРЕМИ 4

У наслідку 1 теореми 4 стверджується, що функція $f(x, y) = |x + y - 1| (x + y - 1)^2$ відновлюється за допомогою оператора $D_{2,\beta}$ точно для $\beta_2 = 1$. Щоб перевірити це твердження, побудуємо оператор $D_{2,\beta}$ для функції $f(x, y)$ та переконаємося в тому, що

$$D_{2,\beta} f(x, y) - f(x, y) = 0.$$

Оператор D_2 для функції $f(x, y) = |x + y - 1| (x + y - 1)^2$ має такий вигляд:

$$D_{2,\beta} f(x, y) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_{20i} f(x + \beta_i y, 0) + \sum_{s=1}^{2} \sum_{i=0}^{2} \lambda_{2si} \int_{x}^{x+\beta_i y} f^{(0,s)}(t, 0) \frac{(x + \beta_i y - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt.$$

Зауважимо, що

$$f^{(0,1)}(x, y) = 3|x + y - 1| (x + y - 1),$$

$$f^{(0,2)}(x, y) = 6|x + y - 1|.$$

Позначимо $f(x + \beta_i y, 0) = f_i(x, y)$. Тоді

$$D_{2,\beta} f(x, y) = \sum_{i=0}^{2} \lambda_{20i} f_i(x, y) + \sum_{i=0}^{2} \lambda_{21i} \underbrace{\int_{x}^{x+\beta_i y} 3|t - 1| (t - 1) dt}_{I_{1i}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{2} \lambda_{22i} \underbrace{\int_{x}^{x+\beta_i y} 6|t - 1| (x + \beta_i y - t) dt}_{I_{2i}},$$

$$I_{1i}=\int\limits_{x}^{x+\beta_i y}3|t-1|(t-1)dt=|t-1|(t-1)^2\Big|_x^{x+\beta_i y}=f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2,$$

$$I_{2i}=\int\limits_{x}^{x+\beta_i y}6|t-1|(x+\beta_i y-t)dt=6(x+\beta_i y-1)\int\limits_{x}^{x+\beta_i y}|t-1|dt-6\int\limits_{x}^{x+\beta_i y}|t-1|(t-1)dt=$$

$$=3(x+\beta_i y-1)|t-1|(t-1)-2|t-1|(t-1)^2\Big|_x^{x+\beta_i y}=$$

$$=|x+\beta_i y-1|(x+\beta_i y-1)^2-3(x+\beta_i y-1)|x-1|(x-1)+2|x-1|(x-1)^2=$$

$$=f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2+\beta_i y|x-1|(x-1),$$

$$\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}I_{1i}=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}(f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2)=$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}f_i(x,y),$$

$$\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}I_{2i}=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}(f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2+\beta_i y|x-1|(x-1))=$$

$$=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}f_i(x,y)-|x-1|(x-1)^2\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}+y|x-1|(x-1)\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}\beta_i=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}f_i(x,y),$$

$$D_{2,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_{20i}f_i(x,y)+\sum_{i=0}^{2}\lambda_{21i}f_i(x,y)+$$

$$+\sum_{i=0}^{2}\lambda_{22i}f_i(x,y)=\sum_{i=0}^{2}f_i(x,y)(\lambda_{20i}+\lambda_{21i}+\lambda_{22i}).$$

Для $N=2$ розв'язки системи (2) мають такий вигляд:

$$\lambda_{200}=\frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)},\ \lambda_{201}=\frac{\beta_0\beta_2}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)},\ \lambda_{202}=\frac{\beta_0\beta_1}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)},$$

$$\lambda_{210}=\frac{-(\beta_1+\beta_2)}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)},\ \lambda_{211}=\frac{-(\beta_0+\beta_2)}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)},\ \lambda_{212}=\frac{-(\beta_0+\beta_1)}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)},$$

$$\lambda_{220}=\frac{1}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)},\ \lambda_{221}=\frac{1}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)},$$

$$\lambda_{222}=\frac{1}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)},$$

$$\lambda_{200}+\lambda_{210}+\lambda_{220}=\frac{\beta_1\beta_2}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)}-\frac{\beta_1+\beta_2}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)}+$$

$$+\frac{1}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)}=\frac{(\beta_1-1)(\beta_2-1)}{(\beta_0-\beta_1)(\beta_0-\beta_2)},$$

$$\lambda_{201}+\lambda_{211}+\lambda_{221}=\frac{\beta_0\beta_2}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)}-\frac{\beta_0+\beta_2}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)}+$$

$$+\frac{1}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)}=\frac{(\beta_0-1)(\beta_2-1)}{(\beta_1-\beta_0)(\beta_1-\beta_2)},$$

$$\lambda_{202}+\lambda_{212}+\lambda_{222}=\frac{\beta_0\beta_1}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)}-\frac{\beta_0+\beta_1}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)}+$$

$$+\frac{1}{(\beta_2-\beta_0)(\beta_2-\beta_1)}=\frac{(\beta_1-1)(\beta_0-1)}{(\beta_0-\beta_2)(\beta_1-\beta_2)}.$$

Покладемо $\beta_2=1$, у результаті отримаємо

$$\lambda_{200}+\lambda_{210}+\lambda_{220}=\lambda_{201}+\lambda_{211}+\lambda_{221}=0,\ \lambda_{202}+\lambda_{212}+\lambda_{222}=1,$$

$$D_{2,\beta}f(x,y)=\sum_{i=0}^{2}f_i(x,y)(\lambda_{20i}+\lambda_{21i}+\lambda_{22i})=f_2(x,y)=f(x+\beta_2 y,0)=$$

$$=f(x+y,0)=|x+y-1|(x+y-1)^2=f(x,y).$$

Отже, для $\beta_2=1$ маємо $D_{2,\beta}f(x,y)=f(x,y)$. Інакше кажучи,

$$R_{2,\beta}f(x,y)=D_{2,\beta}f(x,y)-f(x,y)\equiv 0.$$

ВИСНОВКИ

У твердженні 1 наведено оператор, який надає змогу в результаті його застосування отримати функції, що належать тому самому класу диференційовності, що й наближувана функція. При цьому похідні від цього оператора за однією змінною до N-го порядку включно збігаються з відповідними похідними наближуваної функції на заданій лінії. У твердженні 2 наведено аналітичне зображення залишку наближення функції двох змінних за допомогою узагальненого оператора Даламбера. Цей залишок значною мірою використовує диференціальний оператор $A_{N+1,\beta}$, який є диференціальним оператором з частинними похідними $N+1$-го порядку, що залежать від параметрів $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N$. Доведено, що для кожної функції вигляду (8) залишок наближення узагальненою формулою Даламбера за умови (9) можна представити у вигляді $R_{N,\beta}f(x,y)=R_{N,\beta}\widetilde{f}(x,y)$, тобто $R_{N,\beta}f(x,y)=0$, якщо $\widetilde{f}(x,y)\equiv 0$. При цьому невідомі параметри β_0, $\beta_1,\ldots,\beta_N$ можна знайти, скориставшись умовою мінімуму похибки у відповідній нормі та класичними методами оптимізації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
2. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ: Наук. думка, 2005. 331 с.
3. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Побудова та дослідження оператора наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності за слідами їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії. *Проблеми машинобудування*. 2016. Т. 19, № 2. С. 50–57.
4. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів і суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 404 с.
5. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії. *Доп. НАН України*. 2014. № 2. С. 50–55.
6. Литвин О.М. Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n. *Доп. АН УРСР*. 1984. № 7. С. 15–19.
7. Литвин О.М. Точний розв'язок задачі Коші для рівняння $\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a_i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(x,t)=g(x,t)$. *Доп. АН УРСР*. 1991. № 3. С. 12–17.

Надійшла до редакції 15.01.2021

И.В. Сергиенко, О.Н. Литвин, О.О. Литвин,
А.В. Ткаченко, А.А. Белобородов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ В ОБОБЩЕННОЙ ФОРМУЛЕ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Рассмотрены классы функций, которые точно восстанавливаются с помощью формулы Даламбера, обобщенной О.Н. Литвином в 1989 г. Известно, что эта формула в частном случае дает полином Тейлора разложения функций по одной переменной, но в отличие от полинома Тейлора сохраняет тот же класс дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция, даже если частные производные s-го порядка ($s = 1, 2, \dots, N$) не принадлежат тому же классу дифференцируемости, которому принадлежит приближаемая функция. При этом используется система параметров $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$. Предложен метод оптимального выбора этих параметров, а также сформулирован и доказан ряд теорем о классах функций, которые точно восстанавливаются обобщенными операторами Даламбера.

Ключевые слова: интерполяция, оператор, остаток, оптимизация.

I.V. Sergienko, O.M. Lytvyn, O.O. Lytvyn, O.V. Tkachenko, A.A. Biloborodov

OPTIMIZATION OF PARAMETERS IN THE GENERALIZED D'ALEMBERT FORMULA FOR A FUNCTION OF TWO VARIABLES

Abstract. The authors consider classes of functions that can be exactly restored using the d'Alembert formula generalized by O.M. Lytvyn in 1989. This formula as a special case is know to give the Taylor polynomial of the one variable function, but in opposite to the Taylor polynomial it preserves the same differentiability class to which the approximated function belongs, even if its partial derivatives of s order ($s = 1, 2, \dots, N$) do not belong to the same differentiability class. In such case, the system of parameters $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ is used. The authors propose a method for the choice of optimal parameters and provide and prove several theorems related to classes of functions that can be exactly restored by the generalized d'Alembert operators.

Keywords: interpolation, operator, remainder, optimization.

Сергієнко Іван Васильович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, директор Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: incyb@incyb.kiev.ua.

Литвин Олег Миколайович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: Olegolitvin55@gmail.com.

Ткаченко Олександр Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, начальник відділу ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя.

Білобородов Артем Андрійович,
аспірант кафедри Харківського національного університету радіоелектроніки, e-mail: biloborodow23april@gmail.com.