

РОЗРІДЖЕНЕ ЗБАЛАНСОВАНЕ РОЗМІЩЕННЯ СФЕРИЧНИХ ПОРОЖНИН У ТРИВИМІРНИХ ОБЛАСТЯХ¹

Анотація. Розглянуто оптимізаційну задачу розміщення сферичних порожнин у тривимірних областях, обмежених циліндричними і сферичними поверхнями та площинами, яка зводиться до задачі компоновання сферичних об'єктів у складеному контейнері з урахуванням обмежень на «розрідженість» розміщення об'єктів та умов балансу (розміщення центра ваги системи). Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Запропоновано метод швидкого пошуку допустимих розв'язків, що ґрунтується на балансних гомотетичних перетвореннях 3D-об'єктів, та методи пошуку локально-оптимальних розв'язків із застосуванням алгоритму декомпозиції та r -алгоритму. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: розріджене компоновання, сферичні об'єкти, ϕ -функція, нелінійне програмування, r -алгоритм.

ВСТУП

Задача генерування структур із порожнинами належить класу оптимізаційних задач компоновання геометричних об'єктів, які мають широкий спектр застосування, наприклад, у медицині [1], аерокосмічній техніці [2, 3] для виробництва деталей із застосуванням 3D-друку. Адитивне виробництво забезпечує геометричну свободу для виробництва деталей, що мають складну конфігурацію [4–7]. Створення систем із порожнинами є типовою практикою для скорочення обсягу друкованого матеріалу та часу 3D-друку.

Огляд, що охоплює основні геометричні методи, які нині застосовуються дослідниками для розміщення двовимірних об'єктів, представлено в [8]. Менше робіт присвячено тривимірному пакуванню [9–11] і ще менше — оптимізаційним задачам компоновання в адитивному виробництві [12,13]. З попередніми результатами авторів можна ознайомитися, наприклад, у роботах [14–23].

На сьогодні найбільш ефективним є застосування методів топологічної оптимізації для знаходження найкращого розміщення та геометрії порожнин усередині області моделювання. Крім того, цей тип оптимізації можна застосовувати не тільки для оптимізації натурних, досить великогабаритних конструкцій, але і для знаходження оптимальної конструкції матеріалів на мікрорівні та нанорівні.

Новизна підходу полягає у побудові математичних моделей та розробленні методів для визначення оптимального розміщення сферичних порожнин усередині області моделювання, які ґрунтуються на методах геометричного проектування [14–23] та використанні r -алгоритму [24–29].

Розглянуто задачу «розрідженого» компоновання сферичних об'єктів заданих радіусів із змінними параметрами розміщення в області, обмеженій циліндричними, сферичними поверхнями та площинами, з урахуванням обмежень на сумарний об'єм сферичних об'єктів за мінімального відхилення центра ваги системи від заданої точки (умова балансу).

Для аналітичного опису геометричних обмежень використано метод ϕ -функцій (ϕ -function technique).

¹ Роботу підтримано Національним фондом досліджень України (грант № 2020.02/0128, Стоян Ю.Г., Романова Т.Є., Стоян Ю.Є.) та Volkswagen Foundation (грант 97 775, Романова Т.Є., Стецюк П.І.).

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Нехай область розміщення подано як $C = \Omega \setminus \Lambda$, де $\Lambda = \bigcup_{l=1}^n \Lambda_l$, $l \in J_n = \{1, \dots, n\}$. Вважаємо, що кожен об'єкт Ω і Λ_l , $l \in J_n$, може мати форму куба, кругового циліндра, сферичного об'єкта або кругового конуса.

Об'єкти Ω і Λ_l , $l \in J_n$, мають фіксовані параметри розміщення u_0 , $u_l = (x_l, y_l, z_l, \theta_l)$, $l \in J_n$, у фіксованій системі координат. Тут (x_l, y_l, z_l) є відомим вектором трансляції та θ_l є вектором відомих параметрів обертання (три кути Ейлера). Задано множину сферичних об'єктів $S_q \subset R^3$, $q \in I_N = \{1, \dots, N\}$. Сферичні об'єкти S_q , $q \in I_N$, можуть неперервно транслюватися. Вектор трансляції позначено $v_q = (x_q, y_q, z_q)$, $q \in I_N$. Центр кожного сферичного об'єкта збігається з початком його локальної системи координат. Вектор v визначає розташування сферичних об'єктів S_q , $q \in I_N$, в евклідовому просторі R^3 , де $v = (v_1, \dots, v_N)$. Кожен сферичний об'єкт S_q має вагу m_q , $q \in I_N$, тоді як кожна компонента Λ_l має вагу m_l^l , $l \in J_n$. Вага області Ω становить m_0 .

Передбачається, що центр тяжіння об'єкта S_q розміщений у точці v_q (початок локальної системи координат), а центр тяжіння області розміщений у заданій точці. Центр тяжіння $v_c = (x_c, y_c, z_c)$ системи сферичних порожнин, розміщених усередині області, визначають у такий спосіб:

$$x_c(v) = \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} x_q, \quad y_c(v) = \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} y_q, \quad z_c(v) = \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} z_q, \quad (1)$$

$$\text{де } M = m_0 - \sum_{q=1}^N m_q - \sum_{l=1}^n m_l^l.$$

Допустиме відхилення центру тяжіння $v_c = (x_c, y_c, z_c)$ від заданої точки визначають у вигляді системи нерівностей

$$|x_c| \leq \delta^0, \quad |y_c| \leq \delta^0, \quad |z_c| \leq \delta^0, \quad (2)$$

де $\delta^0 \geq 0$.

Визначимо евклідову відстань між сферичними об'єктами $S_q(v_q)$ та $S_g(v_g)$:

$$\text{dist}(S_q(v_q), S_g(v_g)) = \min_{t_q \in S_q(v_q), t_g \in S_g(v_g)} \|t_q - t_g\|,$$

а також евклідову відстань між сферичним об'єктом $S_q(v_q)$ та об'єктом $C^* = \Omega^* \cup \Lambda$:

$$\text{dist}(S_q(v_q), C^*) = \min_{t_q \in S_q(v_q), t \in C^*} \|t_q - t\|.$$

Визначимо мінімальні відстані: ρ_1 — між кожною парою сферичних об'єктів, ρ_2 — між кожним об'єктом $S_q(v_q)$ та об'єктом Ω^* , ρ_3 — між кожним об'єктом $S_q(v_q)$ та компонентою Λ_l , $l \in J_n$;

$$\rho_1 = \min \{ \text{dist}(S_q(v_q), S_g(v_g)) \mid (q, g) \in \Xi \}, \quad \Xi = \{(q, g) \mid q \in I_N, g \in I_N, q < g\},$$

$$\rho_2 = \min \{ \text{dist}(S_q(v_q), \Omega^*) \mid q \in I_N \},$$

$$\rho_3 = \min \{ \text{dist}(S_q(v_q), \Lambda_l(u_l)), q \in I_N, l \in J_n \}.$$

Нехай $\rho = \min \{ \rho_1, \rho_2, \rho_3 \}$.

Задачу розміщення сферичних об'єктів $S_q(v_q)$, $q \in I_N$, у межах області C можна визначити як задачу утворення структур з порожнинами (далі — розріджене компонування), якщо вона максимізує мінімальні відстані між кожною парою сферичних об'єктів $S_q(v_q)$, $S_g(v_g)$, $(q, g) \in \Xi$, між кожним об'єктом $S_q(v_q)$ та об'єктом Ω^* , $q \in I_N$, а також між кожним об'єктом $S_q(v_q)$, $q \in I_N$, та компонентою Λ_l , $l \in J_n$, тобто максимізує ρ .

Умови розміщення сферичних об'єктів $S_q(v_q)$, $q \in I_N$, у межах області C для задачі розрідженого компонування можна сформулювати в такий спосіб:

$$\text{dist}(S_q(v_q), \Omega^*) \geq \rho, \quad q \in I_N, \quad (3)$$

$$\text{dist}(S_q(v_q), S_g(v_g)) \geq \rho, \quad (q, g) \in \Xi, \quad (4)$$

$$\text{dist}(S_q(v_q), \Lambda_l(u_l)) \geq \rho, \quad q \in I_N, \quad l \in J_n. \quad (5)$$

Сформулюємо задачу розрідженого збалансованого компонування так: визначити компонування сферичних об'єктів $S_q(v_q)$, $q \in I_N$, у заданому контейнері з урахуванням умов балансу (1), (2) та умов розміщення (3)–(5).

Для опису умов включення (3) (containment constraints) та умов неперетину (4), (5) (non-overlapping constraints), враховуючи, що $\rho > 0$ — це змінна, застосовують псевдонормалізовані *phi*-функції та псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції [22, 23].

Математичну модель задачі розрідженого компонування можна сформулювати як таку задачу неперервної оптимізації:

$$\max \rho \quad \text{s.t.} \quad (v, \tau, \rho) \in W, \quad (6)$$

$$W = \{(v, \tau, \rho) : \widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, \rho) \geq 0, (q, g) \in \Xi,$$

$$\widehat{\Phi}'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \rho) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n,$$

$$\widehat{\Phi}_q(v_q, \rho) \geq 0, q \in I_N, Y(v) \geq 0, \rho > 0\}, \quad (7)$$

де $v = (v_1, \dots, v_N)$, $\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \dots, \tau_{ql}, \dots, \tau_{Nn})$, нерівність $\widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, \rho) \geq 0$ представляє умови (4) для сферичних об'єктів $S_q(v_q)$ і $S_g(v_g)$, $q < g \in I_N$; нерівність $\widehat{\Phi}'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \rho) \geq 0$ представляє умови (5) для об'єктів $S_q(v_q)$ та $\Lambda_l(u_l)$, $q \in I_N$, $l \in J_n$; нерівність $\widehat{\Phi}_q(v_q, \rho) \geq 0$ представляє умови (3) для об'єктів $S_q(v_q)$ та Ω^* , $i \in I_n$; нерівність $Y(v) \geq 0$ представляє умови балансу (1), (2), при цьому

$$Y(v) = \min \{f_1(v), f_2(v)\},$$

$$f_1(v) = \min \{x_c + \delta^0, -x_c + \delta^0\}, \quad f_2(v) = \min \{y_c + \delta^0, -y_c + \delta^0\}.$$

Область допустимих розв'язків W визначається системою негладких нерівностей, які можна звести до системи нерівностей із диференційовними функціями. Це можна зробити через псевдонормалізовані *phi*-функції та псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції [20–34], які мають вигляд

$$\min \{f_1(v, \tau, \rho), f_2(v, \tau, \rho), \dots, f_m(v, \tau, \rho)\} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(v, \tau, \rho) \geq 0, \\ f_2(v, \tau, \rho) \geq 0, \\ \dots \\ f_m(v, \tau, \rho) \geq 0, \end{cases}$$

де кожна функція $f_i(v, \tau, \rho)$, $i \in I_m$, є диференційовною функцією, m — кількість функцій, які формують окрему *phi*-функцію з (7).

Модель (6), (7) є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування. Це точне формулювання в тому сенсі, що воно дає всі оптимальні розв'язки задачі розрідженого збалансованого компоунування сферичних об'єктів.

Кількістю основних змінних у задачі є $\sigma = 1 + 3n + Nn$, де n — кількість опуклих компонент $\Lambda_l(u_l)$, $l = 1, \dots, n$. Модель (6), (7) включає $O(N^2)$ нелінійних нерівностей та $O(Nn)$ змінних, що є допоміжними змінними у квазі-*phi*-функціях.

ПОШУК ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Підхід до пошуку допустимих стартових точок для задачі (6), (7) містить такі кроки.

Крок 1. Генерування N випадкових точок $v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)}$ в області S . Формування точки $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)}, u_1, \dots, u_n)$, де $u_l, l \in J_n$, — фіксовані параметри розміщення компонент $\Lambda_l, l \in J_n$.

Крок 2. Пошук збалансованого компоунування N зважених точок (вироджених сфер) у межах області S шляхом розв'язування такої задачі нелінійного програмування:

$$\min \delta \text{ s.t. } (v, \delta) \in V \subset R^{3N+1}, \quad (8)$$

$$V = \{(v, u, \delta) : \phi_q(v) \geq 0, q \in I_N, \varphi_l(u) \geq 0, l \in J_n, Y(v, \delta) \geq 0\}, \quad (9)$$

де $v = (v_1, \dots, v_N)$. Точку v^0 розглядають як стартову допустиму точку.

Для нерівності $\phi_q(v) \geq 0$ передбачається, що $v_q \in \Omega$, тоді як для нерівності $\varphi_l(u) \geq 0$ передбачається, що $v_l \in \Omega$. Знаходимо точку $v^{(1)} = (v_1^{(1)}, \dots, v_N^{(1)}, u_1, \dots, u_n)$ локального екстремуму задачі (8), (9).

Крок 3. Визначення стартових значень змінних τ_{ql} для кожної квазі-*phi*-функції $\Phi'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \rho) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n$. Ці змінні розглядають як параметри роздільних прямих між кожною парою зважених точок $v_q^{(1)}$ і $v_l, q \in I_N, l \in J_n$. Визначення вектора $\tau^{(1)} = (\tau_{ql}^{(1)}, q \in I_N, l \in J_n)$.

Крок 4. Формування точки $(v^{(1)}, \tau^{(1)})$.

Крок 5. Пошук початкових розмірів сферичних об'єктів шляхом розв'язання такої задачі нелінійного програмування:

$$\max \lambda \text{ s.t. } (v, \tau, \lambda) \in \Lambda, \quad (10)$$

$$\Lambda = \{(v, \tau, \lambda) : \widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, \lambda) \geq 0, (q, g) \in \Xi,$$

$$\widehat{\Phi}'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \lambda) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n,$$

$$\widehat{\Phi}_q(u_q, \lambda) \geq 0, q \in I_N, Y(v, u, l) \geq 0, \lambda \geq 0\}, \quad (11)$$

починаючи з точки $(u^{(1)}, \tau^{(1)}, \lambda = 0)$.

У задачі (10), (11) змінна λ є коефіцієнтом гомотетії сферичних об'єктів $S_q, q \in I_N$, а також компонент $\Lambda_l, l \in J_n, l \in J_n, l \in J_n$, функція $\widehat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, \lambda)$ є псевдонормалізованою *phi*-функцією для $\lambda S_q(v_q)$ і $\lambda S_g(v_g), (q, g) \in \Xi$, функція $\widehat{\Phi}'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \lambda) \geq 0$ є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією об'єктів $\lambda S_q(v_q)$ і $\lambda \Lambda_l(u_l), q \in I_N, l \in J_n$, а $\widehat{\Phi}_q(u_q, \lambda)$ є псевдонормалізованою *phi*-функцією об'єктів $\lambda S_q(v_q)$ і Ω^* .

Знаходимо точку $(u^{(2)}, \tau^{(2)}, \lambda^{(2)} = 1)$ глобального максимуму задачі (10), (11). Якщо $\lambda^{(2)} < 1$, тоді переходимо до кроку 1. Фактично задача (10), (11) — це зада-

ча «збільшення» зважених точок $v_1^{(1)}, \dots, v_N^{(1)}, u_1, \dots, u_n$ (вироджені об'єкти, $\lambda = 0$) до початкових розмірів сферичних об'єктів $S_q(v_q), q \in I_N, (\lambda = 1)$, що не перетинаються та знаходяться всередині області C .

Крок 6. Визначення початкового значення ρ :

$$\rho^{(2)} = \min \{ \widehat{\Phi}_{qg}(v_q^2, v_g^2) \geq 0, (q, g) \in \Xi, \\ \widehat{\Phi}'_{ql}(v_q^{(2)}, u_l, \tau_{ql}^{(2)}), g \in I_N, l \in J_n, \widehat{\Phi}_q(v_q^{(2)}), q \in I_N \}.$$

Крок 7. Формування точки $(u^{(2)}, \tau^{(2)}, \rho^{(2)})$ для подальшої локальної оптимізації. Вихідні дані, які відповідають локальній точці мінімуму задачі (10), (11), є такими:

ρ^* — оптимізоване значення цільової функції;

$v^* = (v_1^*, \dots, v_q^*)$ — вектор параметрів розміщення сферичних об'єктів $S_q, q \in I_N$, де $v_i^* = (x_i^*, y_i^*, z_i^*)$.

ПОШУК ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ

Область допустимих розв'язків W визначається системою $O(N^2)$ нерівностей з $O(Nn)$ змінними. Для розв'язання задачі (6), (7) використано алгоритм декомпозиції. Цей алгоритм зводить задачу (6), (7) до множини підзадач нелінійного програмування значно меншої розмірності. Ці підзадачі мають $O(N)$ нерівностей та змінних. Ключова ідея алгоритму є такою.

Крок 1. Побудова нерухомих окремих кубоподібних індивідуальних контейнерів для кожного вектора допустимих параметрів розміщення сферичних об'єктів у кластері. Сферичні об'єкти не перетинаються, якщо їхні кубоподібні контейнери не перетинаються. До того ж, трансляції сферичних об'єктів усередині кубоподібних контейнерів не впливають на неперетин сфер. Для забезпечення неперетину сферичних об'єктів не потрібно переглядати всі $O(N^2)$ пар кубоїдів. Натомість достатньо перевірити неперетин лише $O(N)$ «близьких» пар.

Крок 2. Формування системи лінійних нерівностей для опису вільного руху кожного сферичного об'єкту у відповідному окремому індивідуальному контейнері.

Крок 3. Формування підобласті допустимих розв'язків у такий спосіб. Для всіх сферичних об'єктів додаємо $O(N)$ лінійних нерівностей до системи (7) і видаляємо $O(N^2)$ нелінійних нерівностей, що відповідають неперетину пар індивідуальних контейнерів. Отже, неперетин перевіряється лише для $O(N)$ сферичних об'єктів. Деякі надлишкові обмеження включення та неперетину сферичних об'єктів з опуклими компонентами також видаляються. Ця допоміжна підзадача локальної мінімізації має $O(N)$ змінних та $O(N)$ нелінійних обмежень.

Крок 4. Розв'язання задачі, сформованої на кроці 3. Перехід до кроку 1.

Результатом останньої ітерації алгоритму є локальний максимум задачі (6), (7).

Стратегія розв'язання задачі (6), (7) містить три основні етапи.

Етап 1. Створення множини допустимих стартових точок для задачі (6), (7).

Етап 2. Побудова множини локальних максимумів для задачі (6), (7), починаючи з кожної допустимої точки, отриманої на етапі 1.

Етап 3. Вибір найкращого локального максимуму із множини локальних максимумів, знайдених на етапі 2.

**ПОШУК ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
З ВИКОРИСТАННЯМ r -АЛГОРИТМУ**

За допомогою методу негладких штрафних функцій задачу (6), (7) можна звести до задачі безумовної максимізації негладкої функції

$$\max_{(v, \tau, \rho) \in W} \{f(v, \tau, \rho) = \rho + \Phi_P(v, \tau, \rho)\}, \quad (12)$$

де негладка штрафна функція $\Phi_P(v, \tau, \rho)$ має вигляд

$$\Phi_P(v, \tau, \rho) = -\sum_{i=1}^2 P_i F_i(v, \tau, \rho) - P_3 F_3(v, \rho) - P_4 F_4(v) - P_5 \max\{0, -\rho\}. \quad (13)$$

Тут $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$, де $P_k, k = 1, 2, 3, 4, 5$, — додатні штрафні коефіцієнти, а функції $F_i(v, \tau, \rho), i = 1, 2, F_3(v, \rho), F_4(v)$ визначаються так:

$$F_1(v, \tau, \rho) = \sum_{(q, g) \in \Xi} \max\{0, -\hat{\Phi}_{qg}(v_q, v_g, \rho)\}, \quad (14)$$

$$F_2(v, \tau, \rho) = \sum_{q \in I_N, l \in J_n} \max\{0, -\hat{\Phi}'_{ql}(v_q, u_l, \tau_{ql}, \rho)\}, \quad (15)$$

$$F_3(v, \rho) = \sum_{q \in I_N} \max\{0, -\hat{\Phi}_q(v_q, \rho)\}, \quad (16)$$

$$F_4(v) = \max\{0, -Y(v)\}. \quad (17)$$

Знаходження локального максимуму задачі (6), (7) можна замінити на пошук локального максимуму задачі (12), яка є задачею безумовної максимізації багатоекстремальної негладкої функції $f(v, \tau, \rho)$, де штрафна функція $\Phi_P(v, \tau, \rho)$ обчислюється за формулами (13)–(17). Якщо для деяких додатних значень штрафних коефіцієнтів $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ локальному максимуму функції $f(v, \tau, \rho)$ відповідає рівне нулю значення штрафної функції $\Phi_P(v, \tau, \rho)$, то він буде локальним максимумом задачі (6), (7). Вибір штрафних коефіцієнтів P_1, P_2, P_3, P_4 надає змогу враховувати точність виконання чотирьох груп обмежень із (7). Коефіцієнт P_1 відповідає за «сумарне порушення» першої групи обмежень, коефіцієнт P_2 — за «сумарне порушення» другої групи обмежень, коефіцієнт P_3 — за «сумарне порушення» третьої групи обмежень, а коефіцієнт P_4 — за «порушення» четвертої групи обмежень. Коефіцієнт P_5 надає змогу врахувати невід'ємність змінної ρ .

Алгоритм пошуку найкращого розв'язку задачі (6), (7) ґрунтується на методі мультистарти з випадковим вибором стартових точок у сполученні з модифікацією r -алгоритму Шора [25], яка використовується для пошуку локальних максимумів функції $f(v, \tau, \rho)$. Алгоритм не вимагає, щоб стартові точки були допустимими для задачі (6), (7), та полягає в такому. Нехай **ntest** — кількість стартових точок. Для кожної чергової стартової точки уточнюють локальний максимум з не меншим значенням цільової функції. Пошук локального максимуму функції $f(v, \tau, \rho)$ здійснюють за допомогою модифікації r -алгоритму з постійним коефіцієнтом розтягу простору й адаптивним регулюванням кроку [28, 29]. Найкращий із **ntest** локальних максимумів функції $f(v, \tau, \rho)$, для якого реалізується близьке до нуля значення штрафної функції $\Phi_P(v, \tau, \rho)$, приймають як розв'язок задачі (6), (7). Йому відповідає найбільше значення величини ρ , знайдене за **ntest** пошуків локального максимуму функції $f(v, \tau, \rho)$.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

У цьому розділі представлено низку тестових прикладів, що демонструють роботу розроблених програмних модулів, які реалізують запропоновані методи розв'язання задачі (6), (7) для сферичних об'єктів залежно від видів обмежень, зумовлених різними технологіями 3D-друку. Всі експерименти виконано на AMD FX(tm)-6100, 3.30 GHz комп'ютері мовою програмування C ++, Windows 7. Для локальної оптимізації використано IPOPT (<https://github.com/coin-or/Ipopt>). Багатостартовий запуск програми виконано 100 разів для кожного прикладу.

Приклад 1. Нехай $N = 60$, розглянемо S_q , $q = 1, \dots, 10$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 3$; S_q , $q = 11, \dots, 30$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 2$; S_q , $q = 31, \dots, 60$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 1$:

а) область — кубоїд Ω , $l = 36$, $w = 36$, $h = 36$.

На рис. 1, а наведено розріджене розміщення сферичних об'єктів у кубоїді Ω , що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 4.4932$;

б) область — кубоїд Ω , $l = 36$, $w = 36$, $h = 36$ із зоною заборони (компонентою Λ_1).

Компонента Λ_1 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(8, 0, 16), (16, 0, 20), (20, 0, 16), (20, 0, 20), (16, 36, 16), (16, 36, 20), (20, 36, 16), (20, 36, 20)\}$.

На рис. 1, б наведено розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 4.1359$.

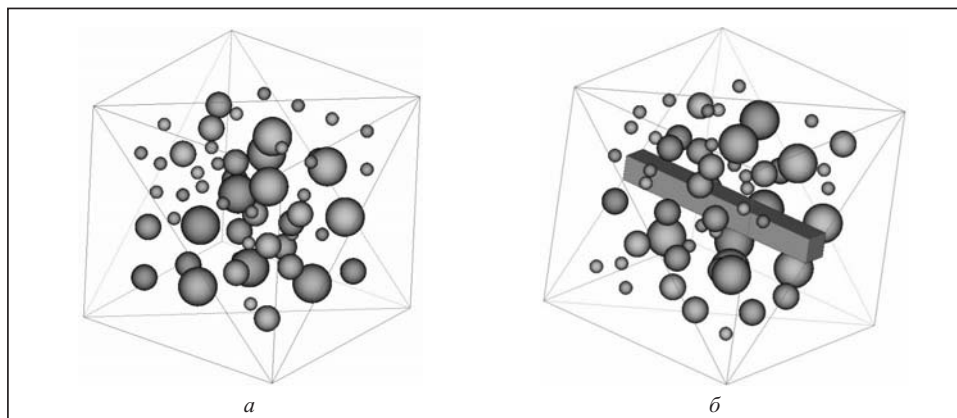


Рис. 1. Розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів, що відповідає локальному максимуму ρ^* : у кубоїді Ω (а); у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$ (б)

Приклад 2. Нехай $N = 30$, розглянемо S_q , $q = 1, \dots, 5$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 2.5$; S_q , $q = 6, \dots, 15$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 2$; S_q , $q = 16, \dots, 30$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 1$; область — куля Ω радіуса $r = 20$:

а) компонента Λ_1 — куля радіуса $r_1 = 4$ з центром $(0, 0, 0)$.

На рис. 2, а наведено розріджене розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 5.362246$;

б) компоненти Λ_l , $l = 1, 2$, — кулі радіуса $r_l = 20$. Центри компонент розміщені у точках $(0, 0, 30)$ і $(0, 0, -30)$.

На рис. 2, б наведено розріджене розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 4.79394$.

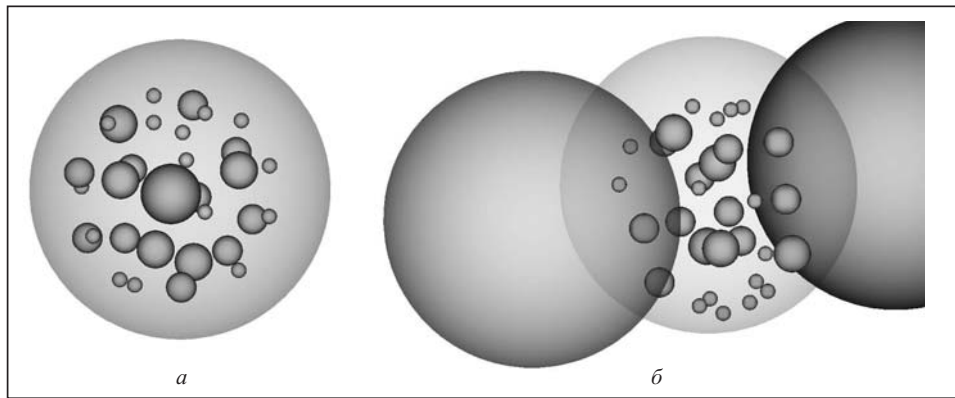


Рис. 2. Розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів, що відповідає локальному максимуму ρ^* : у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$ (а); у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ (б)

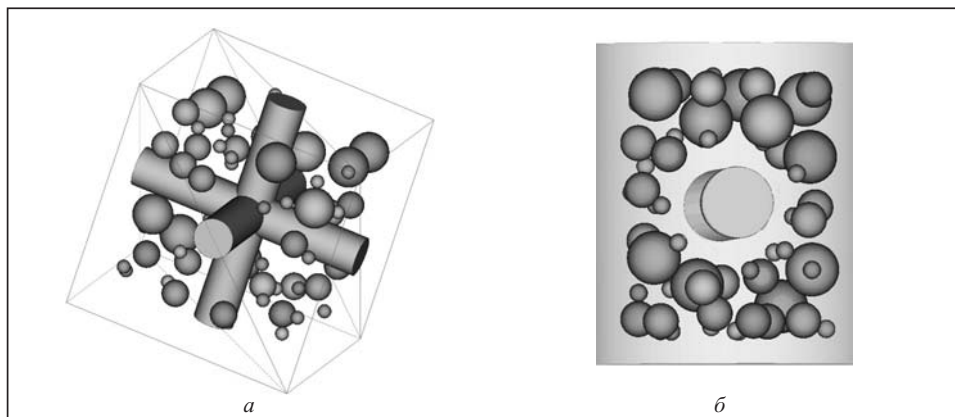


Рис. 3. Розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів, що відповідає локальному максимуму ρ^* : у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ (а); у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$ (б)

Приклад 3: а) нехай $N = 32$, розглянемо $S_q, q = 1, \dots, 32$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 3, q \in I_N$. Область — кубоїд $\Omega, l = 36, w = 36, h = 36$, компоненти $\Lambda_l, l = 1, 2, 3$, — циліндри з метричними характеристиками $r_l = 3, h_l = 36$. Центри основ циліндрів розміщені у центрі граней Ω .

На рис. 3, а наведено розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$, що відповідає точці локального максимуму $(\rho^*, v^*, \tau^*), \rho^* = 3.6473$;

б) нехай $N = 60$, розглянемо $S_q, q = 1, \dots, 10$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 3$; $S_q, q = 11, \dots, 30$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 2$; $S_q, q = 31, \dots, 60$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 1$.

Область — циліндр Ω з метричними характеристиками $r = 15, h = 18$, компонента Λ_1 — циліндр з радіусом основи $r_l = 4$, розміщений уздовж осі OX .

На рис. 3, б наведено розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus \Lambda_1$, що відповідає точці локального максимуму $(\rho^*, v^*, \tau^*), \rho^* = 2.755339$.

Приклад 4: а) нехай $N = 60$, радіус куль $r_q = 2, q \in I_N$. Область — $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$: Ω_1 — кубоїд з вершинами $\{(0, 0, 0), (10, 0, 0), (10, 20, 0), (0, 20, 0), (0, 0, 50), (10, 0, 50), (10, 20, 50), (0, 20, 50)\}$, Ω_2 — кубоїд з вершинами $\{(30, 0, 0), (40, 0, 0), (40, 20, 0), (30, 20, 0), (30, 0, 50), (40, 0, 50), (40, 20, 50)$,

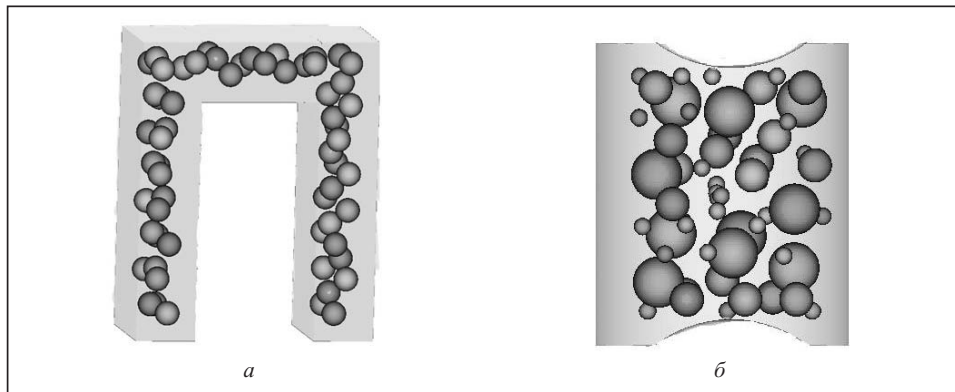


Рис. 4. Розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів, що відповідає локальному максимуму ρ^* : у складеній області Ω (а); у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ (б)

$(30, 20, 50)\}$, Ω_3 — кубоїд з вершинами $\{(10, 0, 40), (10, 20, 40), (30, 0, 40), (30, 20, 40), (10, 0, 50), (10, 20, 50), (30, 0, 50), (30, 20, 50)\}$.

На рис. 4, а наведено розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів у складеній області Ω , що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 2.06725$;

б) нехай $N = 60$, розглянемо S_q , $q = 1, \dots, 10$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 3$; S_q , $q = 11, \dots, 30$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 2$; S_q , $q = 31, \dots, 60$, сферичних об'єктів радіуса $r_q = 1$.

Область — циліндр Ω з метричними характеристиками $r = 15$, $h = 18$, компоненти Λ_l , $l = 1, 2$, — кулі радіуса $r_l = 15$. Центри куль розміщені у точках $(0, 0, 30)$ і $(0, 0, -30)$.

На рис. 4, б наведено розріджене збалансоване розміщення сферичних об'єктів у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 3.0495$.

ВИСНОВКИ

Досліджено оптимізаційну задачу компоновання сферичних об'єктів заданих радіусів із змінними параметрами розміщення у складеному контейнері (обмеженому циліндричними, сферичними поверхнями та площинами) з урахуванням обмежень на «розрідженість» розміщення об'єктів, сумарний об'єм та умов балансу (мінімальне відхилення центра ваги системи від заданої точки). Для аналітичного опису геометричних обмежень використано метод ϕ -функцій (ϕ -function technique). Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Запропоновано швидкий метод пошуку допустимих стартових точок, що ґрунтується на гомотетичних перетвореннях 3D-об'єктів, та методи пошуку локально-оптимальних розв'язків із застосуванням алгоритму декомпозиції та r -алгоритму Шора.

Постановка задачі мотивована застосуванням в адитивних технологіях для оптимізації топології промислових продуктів. Вона є еквівалентною задачі генерування об'ємних структур із порожнинами, які мають широкий спектр застосування, зокрема, у аерокосмічній галузі для виробництва полегшених деталей складної геометрії за допомогою 3D-друку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy: mathematical models and methods of solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Vol. 2015, Article ID 142987. <http://doi.org/10.1155/2015/142987>.
2. Ungson Y., Burtseva L., Garcia-Curiel E., Valdez-Salas B., Flores-Rios B.L., Werner F., Petranovskii V. Filling of irregular channels with round cross-section: modeling aspects to study the properties of porous materials. *Materials*. 2018. Vol. 11, N 10. P. 1901.
3. Fasano G., Pinter J.D. (Eds.) Modeling and optimization in space engineering — State of the art and new challenges. Springer International Publishing, 2019. 492 p.
4. Gardan J. Additive manufacturing technologies: state of the art and trends. *Int. J. Prod. Res.* 2016. Vol. 54, Iss. 10. P. 3118–3132.
5. Gebhardt A., Kessler J., Thurn L. 3D printing: Understanding additive manufacturing. Hanser Publications, 2019. 204 p.
6. Mahesh M., Lane B., Donmez M., Feng S., Moylan S. A review on measurement science needs for real-time control of additive manufacturing metal powder bed fusion processes. *Int. J. Prod. Res.* 2017. Vol. 55, Iss. 5. P. 1400–1418.
7. Mehrpouya M., Dehghanghadikolaei A., Fotovvati B., Vosooghnia A., Sattar S. Emamian, Annamaria Gisario. The potential of additive manufacturing in the Smart Factory Industrial 4.0: A review. *Appl. Sci.* 2019. Vol. 9, N 18. P. 3865–3899.
8. Leao A., Toledo F., Oliveira J., Carravilla M., Alvarez-Valdés R. Irregular packing problems: A review of mathematical models. *Eur. J. Oper. Res.* 2019. Vol. 282, Iss. 3. P. 803–822. <http://doi.org/10.1016/j.ejor.2019.04.045>.
9. Birgin E., Lobato R. A matheuristic approach with nonlinear subproblems for large-scale packing of ellipsoids. *Eur. J. Oper. Res.* 2019. Vol. 272 (2). P. 447–464.
10. Kallrath J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes. *J. Global Optimiz.* 2017. Vol. 67, Iss. 1–2. P. 151–185.
11. Araújo L., Özcan E., Atkin J., Baumers M. Analysis of irregular three-dimensional packing problems in additive manufacturing: a new taxonomy and dataset. *Int. J. Prod. Res.* 2019. Vol. 57, Iss. 18. P. 5920–5934. <https://doi.org/10.1080/00207543.2018.1534016>.
12. Lee M., Fang Q., Cho Y., Ryu J., Liu L., Kim D. Support-free hollowing for 3D printing via Voronoi diagram of ellipses. *Computer-Aided Design*. 2018. Vol. 101. P. 23–26.
13. Duriagina Z., Lemishka I., Litvinchev I., Marmolejo J.A., Pankratov A., Romanova T., Yaskov G. Optimized filling of a given cuboid with spherical powders for additive manufacturing. *Journal of the Operations Research Society of China*. 2020. <http://doi.org/10.1007/s40305-020-00314-9>.
14. Romanova T.E., Stetsyuk P.I., Chugay A.M., Shekhovtsov S.B. Parallel computing technologies for solving optimization problems of geometric design. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 894–904. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00199-4>.
15. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Avramov K., Chernobryvko M., Yanchevskiy I., Mozgova I., Bennell J. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing. *International Journal of Production Research*. 2021. Vol. 59, Iss. 2. P. 560–575. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1697836>.
16. Yanchevskiy I., Lachmayer R., Mozgova I., Lippert R-B., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I. Circular packing for support-free structures. *EAI Endorsed Transactions on Energy Web*. 2020. Iss. 30. <http://dx.doi.org/10.4108/eai.13-7-2018.164561>.
17. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Yanchevskiy I., Mozgova I. Optimal packing in additive manufacturing. *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Iss. 13. P. 2758–2763. <http://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.11.625>.
18. Grebennik I.V., Kovalenko A.A., Romanova T.E., Urniaieva I.A., Shekhovtsov S.B. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0023-2>.

19. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Plankovskyy S., Tsegelnyk Y., Shypul O. Sparsest packing of two-dimensional objects. *International Journal of Production Research*. 2020. <https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1755471>.
20. Romanova T., Litvinchev I., Pankratov A. Packing ellipsoids in an optimized cylinder. *Eur. J. Oper. Res.* 2020. Vol. 285, Iss. 2. P. 429–443. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.01.051>.
21. Stoyan Y., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I., Yakovlev S., Cantú J.M.V. Optimized packing multidimensional hyperspheres: a unified approach. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2020. Vol. 17, Iss. 6. P. 6601–6630. <http://doi.org/10.3934/mbe.2020344>.
22. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing oblique 3D objects. *Mathematics*. 2020. Vol. 8 (7), P. 1130. <https://doi.org/10.3390/math8071130>.
23. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Plankovskyy S., Tsegelnyk Y., Shypul O. Sparsest balanced packing of irregular 3D objects in a cylindrical container. *Eur. J. Oper. Res.* 2020. Vol. 201, Iss. 1. P. 84–100. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.09.021>.
24. Стецюк П.И. r -алгоритмы и эллипсоиды. *Кибернетика и системный анализ*. 1996. Т. 32, № 1. С. 113–134.
25. Шор Н.З., Стецюк П.И. Использование модификации r -алгоритма для нахождения глобального минимума полиномиальных функций. *Кибернетика и системный анализ*. 1997. Т. 33, № 4. С. 28–49.
26. Сергиенко И.В., Стецюк П.И. О трех научных идеях Н.З. Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 1. С. 4–22.
27. Stetsyuk P.I. Shor's r -algorithms: theory and practice. *Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko*. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds). Springer International Publishing, 2017. P. 495–520.
28. Стецюк П.И. Теория и программные реализации r -алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
29. Стецюк П.И. Комп'ютерна програма «Octave-програма galgb5a: $r(\alpha)$ -алгоритм з адаптивним кроком». Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 85010. Україна. Міністерство економічного розвитку і торгівлі. Державний департамент інтелектуальної власності. Дата реєстрації 29.01.2019.

Надійшла до редакції 21.12.2020

Ю.Г. Стоян, Т.Е. Романова, А.В. Панкратов, П.И. Стецюк, Ю.Е. Стоян

**РАЗРЕЖЕННОЕ СБАЛАНСИРОВАННОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ПУСТОТ
В ТРЕХМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ**

Аннотация. Рассмотрена оптимизационная задача размещения сферических пустот в трехмерных областях, ограниченных цилиндрическими, сферическими поверхностями и плоскостями, которая сводится к задаче компоновки сферических объектов в составном контейнере с учетом ограничений на «разреженность» размещения объектов и условий баланса (положение центра тяжести системы). Построена математическая модель в виде задачи нелинейного программирования. Предложены метод быстрого поиска допустимых решений, основанный на балансных гомотетичных преобразованиях 3D-объектов, и методы поиска локально-оптимальных решений с применением алгоритма декомпозиции и r -алгоритма. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: разреженная компоновка, сферические объекты, ρ -функция, нелинейное программирование, r -алгоритм.

Y.G. Stoyan, T.E. Romanova, O.V. Pankratov, P.I. Stetsyuk, Y.E. Stoian

**SPARSE BALANCED DISTRIBUTION OF SPHERICAL VOIDS
IN THREE-DIMENSIONAL DOMAINS**

Abstract. The paper considers the optimization problem of generating spherical voids in three-dimensional domains bounded by cylindrical and spherical surfaces and planes. The problem is reduced to the problem of arranging spherical objects in a composite container, taking into account constraints on “sparseness” of the objects and balancing conditions (a location of the gravity center of the system). A mathematical model in the form of a nonlinear programming problem is provided. A fast method of finding allowable solutions based on the balanced homothetic transformations of 3D objects and methods of finding locally optimal solutions using the decomposition algorithm and r -algorithm are proposed. The results of numerical experiments are given.

Keywords: sparse layout, spherical objects, phi-function, nonlinear programming, r -algorithm.

Стоян Юрій Григорович,

чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, професор, завідувач відділу Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: yustoyan19@gmail.com.

Романова Тетяна Євгенівна,

доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: tarom27@yahoo.com.

Панкратов Олександр Вікторович,

доктор техн. наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: pankratov2001@yahoo.com.

Стецюк Петро Іванович,

доктор фіз.-мат. наук, завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: stetsyukp@gmail.com.

Стоян Юрій Євгенович,

кандидат техн. наук, провідний інженер Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, e-mail: urikpostg@gmail.com.