УДК 517.9:519.6

В.М. БУЛАВАЦКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ С ЛОКАЛЬНОЙ *M*-ПРОИЗВОДНОЙ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ГЕОМИГРАЦИОННОЙ ДИНАМИКИ

Аннотация. В рамках математических моделей, основанных на понятии локальной M-производной по временно́й переменной, выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых двумерных краевых задач конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса и массообмена растворимых веществ при геофильтрации. В частности, поставлена обратная ретроспективная задача конвективной диффузии согласно схеме двумерной геофильтрации из бесконечного водоема к дренажу, получено ее регуляризованное решение, приведены некоторые оценки сходимости.

Ключевые слова: математическое моделирование, геомиграция, геофильтрация, массоперенос, массообмен, неклассические модели, локальная M-производная, задачи конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса, замкнутая форма решений.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена вопросам математического моделирования (в рамках неклассических математических моделей) миграционной динамики растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации подземных вод в предположении, что для рассматриваемой фильтрационной схемы известно решение задачи фильтрации, т.е. известна характеристическая функция течения $z = F(\omega)$, где $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал фильтрации, $\varphi = \varphi(x, y)$ — потенциал скорости фильтрации, $\psi = \psi(x, y)$ — функция тока [1]. Процесс массопереноса и массообмена растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации подземных вод описывается системой уравнений конвективной диффузии и массообмена [1–4]

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} = \operatorname{div}(D \operatorname{grad} C) - \vec{v} \operatorname{grad} C, \tag{1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(C, N, C_*, N_*, \gamma_1, \gamma_2), \tag{2}$$

а также уравнениями фильтрации

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \ \vec{v} = \operatorname{grad} \varphi, \tag{3}$$

где $\vec{v}$ — вектор скорости фильтрации, $\varphi = -\kappa h$, κ — коэффициент фильтрации [1, 2], h — напорная функция, $C(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ — концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах, D — коэффициент конвективной диффузии, f — функция кинетики массообмена, C_*, N_* — равновесные концентрации вещества соответственно в жидкой и твердой фазах, γ_1, γ_2 — константы, характеризующие процесс массообмена [5], σ — активная пористость среды [1, 4].

Затруднения, возникающие при решении краевых задач для системы (1)–(3), нередко связаны с геометрией фильтрационной области. Для сложных фильтрационных схем со свободной поверхностью в случае, когда известна характеристическая функция течения, эффективным подходом при решении двумерных краевых задач массопереноса является переход к новым независимым переменным — координатам точек области комплексного потенциала [2, 6].

В результате такого перехода для задач конвективного массопереноса ($D \equiv 0$) из (1) получаем уравнение [2]

$$\sigma \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} = -\upsilon^2 (\varphi, \psi) \frac{\partial C}{\partial \varphi},$$

где $\upsilon^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2$ — известная из решения соответствующей фильтрационной задачи скорость фильтрации.

Соотношения (1)–(3) лежат в основе множества математических моделей классической теории процессов массопереноса в условиях геофильтрации [1–8]. В рамках этой теории, с использованием подхода, основанного на идее перехода в область комплексного потенциала фильтрации [6], к настоящему времени получены решения многих двумерных краевых задач конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса загрязнений в подземных фильтрационных потоках [2, 6–8]. Отметим также, что его применение доказало свою эффективность и при решении задач моделирования дробно-дифференциальной динамики геомиграционных процессов [9–12].

В данной работе выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых двумерных краевых задач конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса (в условиях массообмена) растворимых веществ при геофильтрации для неклассических (базирующихся на понятии локальной M-производной [13] по временно́й переменной) математических моделей. Излагаемый подход к математическому моделированию динамики геомиграционных процессов на основе неклассических моделей с M-производной позволяет описывать конвективно-диффузионные процессы в условиях существенного влияния на их динамику аномальных эффектов и с использованием более общих, чем при традиционном подходе, математических моделей получать решения соответствующих динамических краевых задач массопереноса, включающие, в частности, известные классические решения.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ: ЛОКАЛЬНАЯ *M*-ПРОИЗВОДНАЯ

Локальная M-производная порядка α ($0< \alpha \le 1$) функции $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ является обобщением так называемой альтернативной дробной производной и определяется следующим образом [13, 14]:

$$\begin{gathered} {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} f(t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t\mathrm{E}_\beta(\varepsilon t^{-\alpha})) - f(t)}{\varepsilon}, \\ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} f(0) = \lim_{t \to 0+} {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} f(t) \ \ \forall t > 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $E_\beta(\cdot)$ — однопараметрическая ($\beta > 0$) функция Миттаг-Леффлера [15]. Если локальная M-производная порядка α функции f существует и конечна на $(0, \infty)$, то считают, что $f(t)$ является α-дифференцируемой на этом промежутке [13]. Если $f(t)$ дифференцируема на $(0, \infty)$, то имеет место [13] соотношение ${}^{M}D_t^{\alpha,\beta} f(t) = \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(1+\beta)} f'(t)$, где $\Gamma(z)$ — гамма-функция аргумента z [16].

Следующие соотношения [13] определяют некоторые характерные свойства локальной M-производной $(0<\alpha\le 1,\ \beta>0)$:

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(af+bg)=a\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}f(x)+b\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}g(x)\ \ (a,b=\mathrm{const}), \tag{5}$$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(u(x)v(x))=u(x)\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}v(x)+v(x)\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}u(x), \tag{6}$$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}[f(u(t))]=f'(u(t))\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}u(t), \tag{7}$$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}t^{\gamma}=\frac{\gamma}{\Gamma(1+\beta)}t^{\gamma-\alpha}\ \ (\gamma>0). \tag{8}$$

Ряд других важных соотношений, имеющих место для локальной M-производной, приведен в [13].

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПРОЦЕССА КОНВЕКТИВНОГО МАССОПЕРЕНОСА И МАССООБМЕНА ПРИ ДВУМЕРНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ С M-ПРОИЗВОДНОЙ

Задачи моделирования дробно-дифференциальной динамики конвективного массопереноса растворимых веществ в условиях плоской установившейся фильтрации (при учете различных обобщенных соотношений кинетики массообмена) рассмотрены в [12] на основе математических моделей с модифицированной дробной производной Римана–Лиувилля. В данном разделе некоторые из соответствующих рассмотренным в [12] задач конвективного массопереноса растворимых веществ при разнообразных условиях массообмена с вмещающими породами поставлены и решены в рамках математических моделей с локальной M-производной.

В случае, например, наличия условий межфазного массообмена согласно уравнению кинетики, соответствующему явлению неравновесной обратимой адсорбции и десорбции [4, 5], динамику процесса конвективной диффузии растворимых веществ при плоской установившейся фильтрации подземных вод опишем для модели с локальной M-производной модельной системой уравнений

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(\sigma C+N)=D\Delta C-\vec{v}\cdot\nabla C\quad (0<\alpha<1), \tag{9}$$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}N=\gamma_1(\sigma C-\beta_* N), \tag{10}$$

$$ \operatorname{div}\vec{v}=0,\ \ \vec{v}=\nabla\varphi, \tag{11}$$

где $\vec{v}=\{v_x, v_y\}$ — вектор скорости фильтрации, φ — потенциал скорости, D — коэффициент конвективной диффузии, $C(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ — концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах, ${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}$ — оператор локальной M-производной (4) по переменной t порядка α [13], γ_1 — постоянная скорости массообмена, β_* — коэффициент распределения вещества между фазами в условиях равновесия по линейной изотерме Генри [5], ∇ — оператор Гамильтона, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа [17].

Предполагая, что соответствующая фильтрационная краевая задача для (11) решена [1, 2], и переходя аналогично [2, 6–8] в уравнениях (9), (10) к новым переменным φ, ψ — координатам точек геометрически более простой области комплексного потенциала фильтрации, приводим систему уравнений конвективной диффузии и массообмена к виду

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(\sigma C + N) = \upsilon^2(\varphi,\psi)\left(D\Delta C(\varphi,\psi,t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right), \tag{12} $$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N = \gamma_1(\sigma C - \beta_* N). \tag{13} $$

В случае изучения динамики только конвективного массопереноса в условиях массообмена из (12), (13) имеем

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(\sigma C + N) = -\upsilon^2(\varphi,\psi)\frac{\partial C}{\partial \varphi}, \tag{14} $$

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N = \gamma_1(\sigma C - \beta_* N). \tag{15} $$

При исследовании процесса загрязнения подземных вод примем следующие граничные условия:

$$ C(0,\psi,t) = C_1(\psi,t),\ N(0,\psi,t) = N_1(\psi,t), \tag{16} $$

где C_1, N_1 — заданные величины.

От системы уравнений (14), (15) перейдем к одному уравнению относительно концентрации C в жидкой фазе. Подставляя (15) в (14), находим

$$ N = \frac{1}{\beta_*\gamma_1}(\sigma\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \upsilon^2(\varphi,\psi) C'_\varphi + \gamma_1 \sigma C). \tag{17} $$

Вычисляя на основании (17) ${}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N$ и подставляя полученный результат в (15), находим искомое уравнение для $C(\varphi,\psi,t)$ в виде

$$ \sigma\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \tag{18} $$

$$ + \upsilon^2(\varphi,\psi)\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(C'_\varphi) + \gamma_1\sigma(1+\beta_*)\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \beta_*\gamma_1\upsilon^2(\varphi,\psi) C'_\varphi = 0. $$

Выполним в (18) замену переменных согласно соотношению

$$ \xi = \Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{\sigma}{2}\int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}. \tag{19} $$

С учетом (19), свойств локальной M-производной (5)–(8) и соотношений

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C = C'(\xi),\quad {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(C'_\varphi) = -\frac{\sigma}{2\upsilon^2} C''(\xi),\quad {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C = C''(\xi) $$

сводим уравнение (18) к однородному уравнению

$$ C''(\xi) + \gamma_1(\beta_* + 2) C'(\xi) = 0. \tag{20} $$

Общее решение (20) запишем в виде

$$ C(\xi) = \frac{A_1}{\gamma_1(\beta_* + 2)} + A_2 e^{-\gamma_1(\beta_* + 2)\xi}, \tag{21} $$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования.

Из (17) с учетом (21) получаем

$$ N(\xi) = \sigma\left(\frac{A_1}{\beta_*\gamma_1(\beta_* + 2)} - \frac{A_2}{2} e^{-\gamma_1(\beta_* + 2)\xi} \right). \tag{22} $$

Учитывая (19) в соотношениях (21), (22), получаем

$$C(\varphi,\psi,t)=\frac{A_1}{\gamma_1(\beta_*+2)}+A_2\exp\left(-\gamma_1(\beta_*+2)\left(\Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right),\quad(23)$$

$$N(\varphi,\psi,t)=$$

$$=\sigma\left[\frac{A_1}{\beta_*\gamma_1(\beta_*+2)}-\frac{A_2}{2}\exp\left(-\gamma_1(\beta_*+2)\left(\Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)}\right)\right)\right].\quad(24)$$

Постоянные A_1, A_2 определяем из условий (16). После простых преобразований с учетом (23), (24) находим

$$A_1=\frac{2\beta_*\gamma_1}{\sigma}\left[N_1(\psi,t)+\frac{\sigma}{2}C_1(\psi,t)\right],\quad(25)$$

$$A_2=\frac{2}{\beta_*+2}\left(C_1(\psi,t)-\frac{\beta_*}{\sigma}N_1(\psi,t)\right)e^{\gamma_1(\beta_*+2)\Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha}}.\quad(26)$$

Таким образом, решение рассматриваемой задачи определяется соотношениями (23)–(26). Отметим, что в частном случае, при $\alpha,\beta=1$, полученные соотношения определяют решение соответствующей задачи конвективного массопереноса в классической постановке [7].

Аналогично изложенному выше на основе модели с M-производной можно рассмотреть и задачу моделирования динамики конвективного массопереноса при массообмене согласно обобщенному уравнению кинетики ионообменной сорбции. Соответствующее обобщение классического уравнения нелинейной кинетики сорбции запишем в виде

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}N=\gamma(N-N_*)C-\gamma_*(C-C_*)N,\quad(27)$$

где γ,γ_* — коэффициенты скорости прямой и обратной реакций соответственно, N_* — обменная емкость породы при ее насыщении до равновесной концентрации C_*. В частности, при $\alpha,\beta=1$ уравнение (27) переходит в известное [5] классическое уравнение кинетики ионообменной сорбции.

Изучение динамики процесса конвективного массопереноса растворимых веществ в условиях массообмена согласно (27) сводится к решению в области комплексного потенциала фильтрации модельной системы уравнений с M-производной вида

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}(\sigma C+N)=-\upsilon^2(\varphi,\psi)C'_\varphi,\quad(28)$$

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}N=\gamma(N-N_*)C-\gamma_*(C-C_*)N\quad(29)$$

при граничных условиях для задачи загрязнения подземных вод, определяемых согласно (16).

Осуществим переход от системы уравнений (28), (29) к одному уравнению относительно концентрации C. Выполняя подстановку (29) в (28), находим

$$N=\frac{\nu}{1+\mu C}(\gamma N_*C-\sigma\,{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}C-\upsilon^2(\varphi,\psi)C'_\varphi).\quad(30)$$

Отсюда, с учетом свойств (5)–(7) для M-производной, получаем

$$
{}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N =
$$

$$
= \frac{\nu}{1+\mu C}\left(\begin{array}{l} \dfrac{\gamma N_*}{1+\mu C}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \dfrac{\mu\sigma}{1+\mu C}\, ({}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C)^2 - \sigma\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \\ + \dfrac{\mu \upsilon^2(\varphi,\psi)}{1+\mu C} C'_{\varphi}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C - \upsilon^2(\varphi,\psi)\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} (C'_{\varphi}) \end{array} \right), \quad (31)
$$

где $\nu = \dfrac{1}{\gamma_* C_*}$, $\mu = \nu(\gamma - \gamma_*)$.

Подставляя соотношение (31) в уравнение (28), находим искомое уравнение для функции концентрации $C(\varphi, \psi, t)$ в виде

$$
{}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \frac{\upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} (C'_{\varphi}) -
$$

$$
- \frac{\mu}{1+\mu C} ({}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C)^2 - \frac{\mu \upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma(1+\mu C)} C'_{\varphi}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C -
$$

$$
- \left(\frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{\gamma N_*}{\sigma(1+\mu C)} \right) {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C - \frac{(1+\mu C)\upsilon^2(\varphi,\psi)}{\sigma \nu} C'_{\varphi} = 0. \quad (32)
$$

Выполняя в уравнении (32) замену переменных согласно (19), имеем

$$
C''(\xi) - \frac{\mu}{1+\mu C} (C'(\xi))^2 - \left(\frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{a\mu}{1+\mu C} \right) C'(\xi) = 0 \quad (33)
$$

или, вводя обозначение $u(C) = C'(\xi)$, получаем из (33) уравнение

$$
u'(C) = \frac{\mu}{1+\mu C} u(C) + \frac{1+\mu C}{\nu} + \frac{a\mu}{1+\mu C}, \quad (34)
$$

где $a = \dfrac{2\gamma N_*}{\mu\sigma}$.

Общее решение уравнения (34) запишем в виде

$$
u(C) = C'(\xi) = \left(A_1 + \frac{C}{\nu} \right)(1+\mu C) - a, \quad (35)
$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя (35), с учетом (19) имеем

$$
C(\varphi, \psi, t) =
$$

$$
= \frac{\sqrt{\delta(A_1)}}{2} \operatorname{cth}\left[-\frac{\sqrt{\delta(A_1)}}{2} \left(\frac{\mu}{\nu} \left(\Gamma(1+\beta)\frac{t^{\alpha}}{\alpha} - \frac{\sigma}{2} \int \frac{d\varphi}{\upsilon^2(\varphi,\psi)} \right) + A_2 \right) \right] - \frac{b(A_1)}{2}, \quad (36)
$$

где $\delta(A_1) = \dfrac{4a\nu}{\mu} + \left(A_1 \nu - \dfrac{1}{\mu} \right)^2$, $b(A_1) = A_1 \nu + \dfrac{1}{\mu}$, A_2 — произвольная постоянная.

Таким образом, соотношение (30), с учетом соотношений (35), (19), запишем в виде

$$
N(\varphi, \psi, t) = \frac{\nu\sigma}{2} \left(a - A_1 - \frac{C(\varphi, \psi, t)}{\nu} \right). \quad (37)
$$

Отсюда, с учетом граничных условий (16), находим

$$A_1 = a - \frac{1}{\nu}\left(C_1(\psi, t) + \frac{2N_1(\psi, t)}{\sigma} \right), \tag{38}$$

$$A_2 = -\frac{\mu}{\nu}\Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\delta(A_1)}}\,\mathrm{Arcth}\left(\frac{b(A_1) + 2C_1(\psi, t)}{\sqrt{\delta(A_1)}} \right). \tag{39}$$

Решение рассматриваемой задачи определяется соотношениями (36)–(39).

Далее кратко остановимся на задаче моделирования (согласно модели с M-производной) динамики конвективного массопереноса в условиях растворения и выпадения растворимых веществ в осадок.

В случае нелинейной кинетики массообмена, при наличии процессов растворения и выпадения растворимых веществ в осадок, предположим выполнение обобщенного кинетического соотношения в условиях объемного засоления среды

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N = -\gamma_1 (C_* - C) N^{1/2}, \tag{40}$$

где γ_1 — постоянная скорости реакции массообмена, C_* — концентрация предельного насыщения, $C(x, y, t)$, $N(x, y, t)$ — массовые концентрации растворимых веществ соответственно в жидкой и твердой фазах.

Отметим, что обобщенное модельное уравнение кинетики массообмена вида (40) при $\alpha, \beta = 1$ обращается в хорошо известное [4, 5, 7] классическое кинетическое уравнение

$$N'_t = -\gamma_1 (C_* - C) N^{1/2}.$$

С учетом изложенного выше изучение динамики конвективного массопереноса растворимых веществ на основе неклассической (с локальной M-производной) математической модели массопереноса и массообмена в условиях объемного засоления среды сводится к решению в области комплексного потенциала системы уравнений

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta} (\sigma C + N) = -\,\upsilon^2(\varphi, \psi) C'_\varphi, \tag{41}$$

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta} N = -\,\gamma_1 (C_* - C) N^{1/2} \tag{42}$$

при выполнении граничных условий (16).

Для отыскания решения задачи вначале подставим (42) в (41), затем из полученного соотношения определим

$$N^{1/2} = \frac{1}{\gamma_1 (C_* - C)}\left(\sigma\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \upsilon^2(\varphi, \psi) C'_\varphi\right). \tag{43}$$

Применение оператора M-производной ${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}$ к обеим частям полученного соотношения с использованием (42) приводит к нелинейному относительно функции C уравнению вида

$$\sigma\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \upsilon^2(\varphi, \psi)\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} (C'_\varphi) - \frac{\sigma}{C - C_*}\left({}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C\right)^2 -$$

$$- \frac{\upsilon^2(\varphi, \psi)}{C - C_*} C'_\varphi\, {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C + \frac{\gamma_1^2}{2}(C - C_*)^2 = 0. \tag{44}$$

Выполнив в уравнении (44) замену переменных согласно (19), преобразуем его к виду

$$C''(\xi)-\frac{1}{C-C_*}(C'(\xi))^2+\frac{\gamma_1^2}{\sigma}(C-C_*)^2=0$$

или (после понижения порядка уравнения подстановкой $u(C)=C'(\xi)$ [7]) – к виду

$$u(C)\,u'(C)-\frac{u^2(C)}{C-C_*}+\frac{\gamma_1^2}{\sigma}(C-C_*)^2=0\,. \tag{45}$$

Проинтегрировав уравнение (45), получим

$$C'(\xi)=u(C)=(C-C_*)\sqrt{A_1-\frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C}, \tag{46}$$

где A_1 — постоянная интегрирования.

Интегрируя (46) с учетом (19), находим

$$C(\varphi,\psi,t)=\frac{\sigma}{2\gamma_1^2}\left[A_1-(A_1-\frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C_*)\times\right. \tag{47}$$

$$\left.\times\,\mathrm{th}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{A_1-\frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C_*}\left(\Gamma(1+\beta)\frac{t^\alpha}{\alpha}-\frac{\sigma}{2}\int\frac{d\varphi}{v^2(\varphi,\psi)}+A_2\right)\right)\right].$$

Принимая во внимание (46), (19), из соотношения (43) получаем выражение для концентрации N вещества в твердой фазе в виде

$$N(\varphi,\psi,t)=\frac{\sigma^2}{4\gamma_1^2}\left(A_1-\frac{2\gamma_1^2}{\sigma}C(\varphi,\psi,t)\right). \tag{48}$$

Постоянные интегрирования A_1, A_2 находятся из граничных условий (16) и имеют вид

$$\left[\begin{array}{l} A_1=\dfrac{2\gamma_1^2}{\sigma}\left(C_1+\dfrac{2}{\sigma}N_1\right),\\ A_2=-\Gamma(1+\beta)\dfrac{t^\alpha}{\alpha}-\dfrac{\sigma}{\gamma_1}\sqrt{\dfrac{2}{\sigma(C_1-C_*)+2N_1}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{\dfrac{2N_1}{\sigma(C_1-C_*)+2N_1}}\end{array}\right.. \tag{49}$$

Соотношения (47)–(49) определяют решение рассматриваемой неклассической задачи конвективного массопереноса. Отсюда как частный случай, при $\alpha, \beta=1$, имеем решение соответствующей задачи в рамках классической математической модели [7].

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ РАСТВОРИМЫХ ВЕЩЕСТВ ПРИ ДВУМЕРНОЙ ГЕОФИЛЬТРАЦИИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ С M-ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим для математической модели с M-производной задачу моделирования динамики процесса конвективной диффузии растворимых веществ в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод из водоема к бесконечному дренажному каналу, заглубленному на глубину H. Данная фильтрационная схема хорошо изучена. Например, в работе [2] приведено замкнутое решение соответствующей плоской краевой задачи фильтрации, полученное методом конформных отображений области фильтрации G_z на область G_ω в плоскости комплексного потенциала $\omega=\varphi+i\psi$. В результате решения фильтрационной задачи в [2] найдена характеристическая функция $z = f(\omega)$ и определено поле скоростей течения.

Задачу математического описания динамики процесса конвективной диффузии при установившейся профильной фильтрации грунтовых вод соответственно рассматриваемой фильтрационной схеме можно сформулировать как задачу отыскания в области $G_z \times (0, \infty)$ решения уравнения

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C(x, y, t) = d\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) - \upsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} - \upsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} \tag{50} $$

при следующих краевых условиях:

$$ C\Big|_{y=0} = C_1, \ \frac{\partial C}{\partial n}\Big|_{\gamma_1, \gamma_2} = 0, \ \frac{\partial C}{\partial y}\Big|_{y=H} = 0, \tag{51} $$

$$ C(x, y, 0) = C_0(x, y), \tag{52} $$

где $C_1 = \text{const}$ — заданная концентрация растворимых веществ на входе фильтрационного потока, $C_0(x, y)$ — заданная функция начального распределения концентрации, n — внешняя нормаль к соответствующей кривой, d — коэффициент конвективной диффузии [2–5], υ_x, υ_y — проекции вектора скорости фильтрации на оси Ox и Oy соответственно.

Поскольку область фильтрации G_z неканоническая, эффективный способ решения краевых задач рассматриваемого типа основан [6] на переходе к новым переменным (φ, ψ) — точкам геометрически более простой области комплексного потенциала течения, являющейся [2] для данной задачи прямоугольником G_ω со сторонами $\varphi_0, Q(\varphi_0 = \kappa H, \kappa$ — коэффициент фильтрации грунта, Q — полный фильтрационный расход). Тогда краевую задачу (50)–(52) математически можно сформулировать для области комплексного потенциала течения G_ω в виде

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C(\varphi, \psi, t) = \upsilon^2(\varphi, \psi)\left(d\Delta C(\varphi, \psi, t) - \frac{\partial C}{\partial \varphi}\right), \tag{53} $$

$$ C\Big|_{\varphi=0} = C_1, \ \frac{\partial C}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0, \psi=Q} = 0, \ \frac{\partial C}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \tag{54} $$

$$ C(\varphi, \psi, 0) = C_0(\varphi, \psi). \tag{55} $$

Введя в рассмотрение переменные и параметры

$$ \varphi' = \frac{\varphi}{Q}, \ \psi' = \frac{\psi}{Q}, \ t' = \left(\frac{\upsilon_0^2}{Q}\right)^{1/\alpha} t, \ C' = \frac{C}{C_1}, \ \varphi'_0 = \frac{\varphi_0}{Q}, \ d' = \frac{d}{Q}, \ \upsilon' = \frac{\upsilon}{\upsilon_0} \tag{56} $$

(υ_0 — характерный скоростной параметр), перепишем краевую задачу (53)–(55) в следующем виде (знак «штрих» для упрощения написания формул далее опускается):

$$ {}^{M}D_t^{\alpha,\beta} C(\varphi, \psi, t) = \upsilon^2(\varphi, \psi)\left(d\left(\frac{\partial^2 C}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \psi^2}\right) - \frac{\partial C}{\partial \varphi}\right), \tag{57} $$

$$C\big|_{\varphi=0}=1,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\,\psi=1}=0,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0\,, \tag{58}$$

$$C(\varphi,\psi,0)=C_0(\varphi,\psi)\,. \tag{59}$$

При этом в новых переменных (56) область комплексного потенциала течения определяется как $G_\omega=\{(\varphi,\psi):0<\varphi<\varphi_0,\,0<\psi<1\}$. Таким образом, моделирование динамики миграционного процесса в рамках рассматриваемого подхода сводится к решению краевой задачи (57)–(59) и последующему переходу из области G_ω в физическую область G_z согласно приведенному в работе [2] решению соответствующей фильтрационной задачи.

В случае осреднения скорости фильтрации по области комплексного потенциала течения таким образом, что $\upsilon^2(\varphi,\psi)=\upsilon_M^2=\text{const}$, имеем вместо (57) уравнение с постоянными коэффициентами

$$^{M}D_t^{\alpha,\beta}C(\varphi,\psi,t)=\upsilon_M^2\left(d\Delta C-\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right). \tag{60}$$

Тогда для рассматриваемой краевой задачи несложно получить замкнутое решение. Действительно, исключая из (60) конвективную составляющую подстановкой

$$C(\varphi,\psi,t)=1-\exp\left(\frac{\varphi}{2d}\right)w(\varphi,\psi,t)\,,$$

получаем для определения w краевую задачу

$$^{M}D_t^{\alpha,\beta}w(\varphi,\psi,t)=\upsilon_M^2\left(d\Delta w-\frac{w}{4d}\right), \tag{61}$$

$$w\big|_{\varphi=0}=0,\ w_\psi\big|_{\psi=0,\,\psi=1}=0,\ \left.\left(w_\varphi+\frac{1}{2d}w\right)\right|_{\varphi=\varphi_0}=0\,, \tag{62}$$

$$w(\varphi,\psi,0)=f(\varphi,\psi)\,, \tag{63}$$

где

$$f(\varphi,\psi)=(1-C_0(\varphi,\psi))\exp\left(-\frac{\varphi}{2d}\right). \tag{64}$$

Применяя к задаче (61)–(63) конечное интегральное синус-преобразование Фурье по переменной φ вида [18]

$$\overline{w}_m(\psi,t)=\int_0^{\varphi_0}w(\varphi,\psi,t)\sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0}\varphi\right)d\varphi,$$

где $\mu_m>0$ — корни уравнения $\mu_m\operatorname{ctg}\mu_m=-\dfrac{\varphi_0}{2d}$ $(m=1,2,\ldots)$, имеем

$$^{M}D_t^{\alpha,\beta}\overline{w}_m(\psi,t)=\upsilon_M^2\,d\,\frac{\partial^2\overline{w}_m(\psi,t)}{\partial\psi^2}-\nu_m\overline{w}_m(\psi,t)\,, \tag{65}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{w}_m(\psi,t)}{\partial\psi}\right|_{\psi=0,\,\psi=1}=0\,, \tag{66}$$

$$\overline{w}_m(\psi,0)=F_m(\psi)\ \ (m=1,2,\ldots)\,, \tag{67}$$

где

$$\nu_m = \upsilon_M^2 \left(\frac{1}{4d} + d \left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \right)^2 \right), \; F_m(\psi) = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi, \psi) \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi \right) d\varphi \; (m = 1, 2, \ldots).$$

Последующее применение к задаче (65)–(67) конечного косинус-преобразования Фурье вида

$$\tilde{\tilde{w}}_{mn}(t) = \int_0^{\varphi_0} \bar{w}_m(\psi, t) \cos(n\pi\psi)\, d\psi \;\; (m = 1, 2, \ldots,\; n = 0, 1, 2, \ldots)$$

приводит рассматриваемую задачу к задаче Коши

$$^{M}D_t^{\alpha, \beta} \tilde{\tilde{w}}_{mn}(t) + \rho_{mn} \tilde{\tilde{w}}_{mn}(t) = 0, \tag{68}$$

$$\tilde{\tilde{w}}_{mn}(0) = \delta_{mn} \;\; (m = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{69}$$

где

$$\rho_{mn} = \nu_m + d(n\pi\upsilon_M)^2, \;\; \delta_{mn} = \int_0^{\varphi_0} \int_0^1 f(\varphi, \psi) \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi \right) \cos(n\pi\psi)\, d\varphi d\psi$$

$$(m = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и $f(\varphi, \psi)$ определяется соотношением (64).

Решение задачи (68), (69) запишем в виде

$$\tilde{\tilde{w}}_{mn}(t) = \delta_{mn} e^{-\rho_{mn} \Gamma(1+\beta) t^{\alpha/\alpha}} \;\; (m = 1, 2, \ldots,\; n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{70}$$

Заключительный этап в процессе построения решения — возвращение в область оригиналов преобразований Фурье. С учетом формул обращения [18] получаем искомое замкнутое решение исходной краевой задачи в виде

$$C(\varphi, \psi, t) =$$

$$= 1 - \frac{4}{\varphi_0} \exp\left(\frac{\varphi}{2d} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu_m^2 + \dfrac{\varphi_0^2}{4d^2}}{\mu_m^2 + \dfrac{\varphi_0^2}{4d^2} + \dfrac{\varphi_0}{2d}} \left[\frac{1}{2} \tilde{\tilde{w}}_{m0}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tilde{w}}_{mn}(t) \cos(n\pi\psi) \right] \sin\left(\frac{\mu_m}{\varphi_0} \varphi \right),$$

где $\tilde{\tilde{w}}_{mn}(t)\; (m = 1, 2, \ldots, n = 0, 1, 2, \ldots)$ определяется согласно (70).

ОБРАТНАЯ РЕТРОСПЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ РАСТВОРИМЫХ ВЕЩЕСТВ ДЛЯ МОДЕЛИ С ЛОКАЛЬНОЙ M-ПРОИЗВОДНОЙ

Рассмотрим в области комплексного потенциала G_ω задачу восстановления начального поля концентраций растворимых веществ (в условиях конвективной диффузии согласно математической модели с M-производной) по заданному конечному значению этого поля $C(\varphi, \psi, T)$:

$$^{M}D_t^{\alpha, \beta} C(\varphi, \psi, t) = \upsilon_M^2 \left(d\Delta C - \frac{\partial C}{\partial \varphi} \right), \tag{71}$$

$$C|_{\varphi=0}=1,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0}=0,\ \left.\frac{\partial C}{\partial\psi}\right|_{\psi=0}=0,\ C|_{\psi=1}=1\,, \tag{72}$$

$$C(\varphi,\psi,T)=C_0(\varphi,\psi)\,, \tag{73}$$

где $C_0(\varphi,\psi)$ — заданная концентрация, $C_0(\varphi,\psi)\in L^2(G_\omega)$, $T>0$.

Отметим, что данная задача соответствует геомиграции солей или выщелачиванию гипсов в условиях фильтрационной схемы из работы [2] (двумерная установившаяся геофильтрация из бесконечного водоема к дренажному каналу при наличии залегающих на глубине водоупора солей или гипсов).

Исключая конвективную составляющую в правой части (71) подстановкой

$$w(\varphi,\psi,t)=(1-C(\varphi,\psi,t))\exp\left(-\frac{\varphi}{2d}\right),$$

получаем из (71)–(73) однородную краевую задачу

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}w(\varphi,\psi,t)=\upsilon_M^2\left(d\Delta w-\frac{w}{4d}\right), \tag{74}$$

$$w|_{\varphi=0}=0,\ \left.\left(w_\varphi+\frac{1}{2d}w\right)\right|_{\varphi=\varphi_0}=0,\ w_\psi|_{\psi=0}=w|_{\psi=1}=0\,, \tag{75}$$

$$w(\varphi,\psi,T)=g(\varphi,\psi)\,, \tag{76}$$

где $g(\varphi,\psi)=(1-C_0(\varphi,\psi))\exp\left(-\dfrac{\varphi}{2d}\right)$.

Применяя к задаче (74)–(76) конечное интегральное преобразование Фурье по геометрическим переменным вида

$$\tilde{\tilde{w}}_{nm}(t)=\int_0^{\varphi_0}\int_0^1 w(\varphi,\psi,t)\sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi\right)\cos(\nu_m\psi)\,d\varphi d\psi\ \ (n,m\in\mathbb{N})\,, \tag{77}$$

получаем в области изображений преобразования Фурье задачу

$${}^{M}D_t^{\alpha,\beta}\tilde{\tilde{w}}_{nm}(t)+\kappa_{nm}\tilde{\tilde{w}}_{nm}(t)=0\,, \tag{78}$$

$$\tilde{\tilde{w}}_{nm}(T)=g_{nm}\ \ (n,m\in\mathbb{N})\,, \tag{79}$$

где

$$\kappa_{nm}=\upsilon_M^2\left(\frac{1}{4d}+d\left(\nu_m^2+\frac{\mu_n^2}{\varphi_0}\right)\right),\ g_{nm}=\int_0^{\varphi_0}\int_0^1 g(\varphi,\psi)\sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi\right)\cos(\nu_m\psi)\,d\varphi d\psi,$$

$\nu_m=\dfrac{\pi(2m-1)}{2}$ $(m\in\mathbb{N})$, $\mu_n>0$ — корни уравнения $\mu_n\operatorname{ctg}\mu_n=-\dfrac{\varphi_0}{2d}$ $(n\in\mathbb{N})$ [18].

Решение задачи (78), (79) запишем в виде

$$\tilde{\tilde{w}}_{nm}(t)=g_{nm}e^{\tilde{\kappa}_{nm}(T^\alpha-t^\alpha)}\ \ (\tilde{\kappa}_{nm}=\Gamma(1+\beta)\kappa_{nm}/\alpha\,;\ n,\ m\in\mathbb{N})\,. \tag{80}$$

Возвращаясь в область оригиналов преобразования Фурье (77), с учетом формул обращения [18] и соотношений (80) находим решение задачи (74)–(76) в виде

$$w(\varphi,\psi,t)=\frac{4}{\varphi_0}\sum_{n,m=1}^{\infty}g_{nm}e^{\tilde{\kappa}_{nm}(T^\alpha-t^\alpha)}\theta_n\sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi\right)\cos(\nu_m\psi)\,, \tag{81}$$

где

$$\theta_n = \frac{\mu_n^2 + \dfrac{\varphi_0^2}{4d^2}}{\mu_n^2 + \dfrac{\varphi_0^2}{4d^2} + \dfrac{\varphi_0}{2d}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отметим, что, поскольку при $0 < t < T$ имеет место соотношение $\lim\limits_{n,m\to\infty} e^{\widetilde{\kappa}_{nm}(T^\alpha - t^\alpha)} = +\infty$, задача (74)–(76) некорректна в смысле Адамара [19].

Построим регуляризованное решение обратной ретроспективной задачи конвективной диффузии для модели с M-производной, основываясь на методах регуляризации А.Н. Тихонова [19, 20]. Применив модифицированную версию метода квазиграничных значений [21–23], рассмотрим регуляризованную задачу вида

$$^M D_t^{\alpha,\beta} w^\varepsilon(\varphi,\psi,t) = \upsilon_M^2 \left(d\Delta w^\varepsilon - \frac{w^\varepsilon}{4d} \right), \tag{82}$$

$$w^\varepsilon|_{\varphi=0} = \left(w_\varphi^\varepsilon + \frac{1}{2d} w_\varphi^\varepsilon \right)\Big|_{\varphi=\varphi_0} = 0, \; w_\psi^\varepsilon|_{\psi=0} = w^\varepsilon|_{\psi=1} = 0, \tag{83}$$

$$w^\varepsilon(\varphi,\psi,T) - \varepsilon L(w^\varepsilon(\varphi,\psi,0)) = g(\varphi,\psi), \tag{84}$$

где $L(u) = \upsilon_M^2 \left(d\Delta u - \dfrac{u}{4d} \right)$, $\varepsilon > 0$ — параметр регуляризации.

Решение задачи (82)–(84) получаем аналогично изложенному выше. Применяя к данной задаче конечное интегральное преобразование Фурье вида (77), получаем в области изображений задачу

$$^M D_t^{\alpha,\beta} \widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(t) + \kappa_{nm} \widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(t) = 0, \tag{85}$$

$$\widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(T) + \varepsilon\kappa_{nm} \widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(0) = g_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{N}), \tag{86}$$

где

$$\widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(t) = \int_0^{\varphi_0}\int_0^1 w^\varepsilon(\varphi,\psi,t) \sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi \right) \cos(\nu_m \psi)\, d\varphi d\psi \quad (n, m \in \mathbb{N}).$$

Решая задачу (85), (86), находим

$$\widetilde{\widetilde{w}}_{nm}^\varepsilon(t) = \frac{g_{nm} e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} t^\alpha}}{\varepsilon\kappa_{nm} + e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} T^\alpha}} \quad (n, m \in \mathbb{N}). \tag{87}$$

С учетом (87) решение рассматриваемой регуляризованной задачи запишем в виде

$$w^\varepsilon(\varphi,\psi,t) = \frac{4}{\varphi_0} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{g_{nm} e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} t^\alpha}}{\varepsilon\kappa_{nm} + e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} T^\alpha}} \theta_n \sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi \right) \cos(\nu_m \psi). \tag{88}$$

Остановимся на вопросе о непрерывной зависимости решения (88) регуляризованной задачи от g в $L^2(G_\omega)$. Пусть V^ε — решение регуляризованной задачи, отвечающее иному конечному значению h, т.е.

$$V^\varepsilon(\varphi,\psi,t) = \frac{4}{\varphi_0} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{h_{nm} e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} t^\alpha}}{\varepsilon\kappa_{nm} + e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} T^\alpha}} \theta_n \sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi \right) \cos(\nu_m \psi) \quad (0 \le t \le T), \tag{89}$$

где
$$h_{nm}=\int_0^{\varphi_0}\int_0^1 h(\varphi,\psi)\sin\left(\frac{\mu_n}{\varphi_0}\varphi\right)\cos(\nu_m\psi)\,d\varphi d\psi\ \ (n,m\in\mathbb{N}).$$

С учетом (88), (89) и неравенства [22–24]

$$\frac{1}{\varepsilon\lambda+e^{-\lambda T}}\le\frac{T}{\varepsilon\left(1+\ln\left(\frac{T}{\varepsilon}\right)\right)},\ \varepsilon\in(0,eT),\tag{90}$$

получаем

$$\|w^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t)-V^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t)\|^2=\frac{4}{\varphi_0}\sum_{n,m=1}^{\infty}\left|\frac{e^{-\widetilde{\kappa}_{nm}t^{\alpha}}}{\varepsilon\kappa_{nm}+e^{-\widetilde{\kappa}_{nm}T^{\alpha}}}\theta_n(g_{nm}-h_{nm})\right|^2\le$$

$$\le\left[\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon\left(1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)\right)}\right]^{2\left(1-\frac{t^{\alpha}}{T^{\alpha}}\right)}\frac{4}{\varphi_0}\sum_{n,m=1}^{\infty}\theta_n|g_{nm}-h_{nm}|^2=$$

$$=\left[\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon\left(1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)\right)}\right]^{2\left(1-\frac{t^{\alpha}}{T^{\alpha}}\right)}\|g-h\|^2,$$

где $\|\cdot\|:=\|\cdot\|_{L^2(G_{\omega})}$. Отсюда имеем оценку

$$\|w^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t)-V^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t)\|\le\left[\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon\left(1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)\right)}\right]^{1-t^{\alpha}/T^{\alpha}}\|g-h\|,\tag{91}$$

$$\varepsilon\in\left(0,\,eT^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\beta)}{\alpha}\right).$$

Следовательно, регуляризованная задача (82)–(84) является корректно поставленной в смысле Адамара [19].

Пусть $g\in L^2(G_{\omega})$, $\varepsilon\in\left(0,\,eT^{\alpha}\frac{\Gamma(1+\beta)}{\alpha}\right)$ и исходная задача (74)–(76) имеет единственное решение $w\in C^{2,1}(G_{\omega}\times(0,T);L^2(G_{\omega}))$, причем $\left\|d\Delta w-\frac{w}{4d}\right\|<\infty.$ Тогда с учетом (81), (88) и неравенства (90) имеем

$$\| w(\cdot,\cdot,t) - w^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) \|^2 = \frac{4}{\varphi_0} \sum_{n,m=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon\kappa_{nm} + e^{-\widetilde{\kappa}_{nm} T^{\alpha}}} e^{\widetilde{\kappa}_{nm}(T^{\alpha} - t^{\alpha})} \kappa_{nm} g_{nm} \right)^2 \theta_n \le$$

$$\le \left[\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha \left(1 + \ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon} \right) \right)} \right]^2 \frac{4}{\varphi_0} \sum_{n,m=1}^{\infty} (e^{\widetilde{\kappa}_{nm}(T^{\alpha} - t^{\alpha})} \kappa_{nm} g_{nm})^2 \theta_n =$$

$$= \left[\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha \left(1 + \ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon} \right) \right)} \left\| \upsilon_M^2 \left(d\Delta w - \frac{w}{4d} \right) \right\| \right]^2 .$$

Отсюда получаем следующую оценку:

$$\| w(\cdot,\cdot,t) - w^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) \| \le \frac{C_*}{1 + \ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon} \right)}, \ \varepsilon \in \left(0,\, eT^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\alpha} \right), \tag{92}$$

где

$$C_* = T^{\alpha} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\alpha} \sup \left\| \upsilon_M^2 \left(d\Delta w(\varphi,\psi,t) - \frac{w(\varphi,\psi,t)}{4d} \right) \right\|, \tag{93}$$

$$(\varphi,\psi,t) \in G_{\omega} \times [0, T].$$

Пусть $g_{\varepsilon} \in L^2(G_{\omega})$ соответствует неточным исходным данным так, что $\| g - g_{\varepsilon} \| \le \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$. Пусть также $\overline{\overline{w}}^{\varepsilon}$ — решение регуляризованной задачи (82)–(84), соответствующее g_{ε}, а $\overline{\overline{V}}^{\varepsilon}$ — решение этой задачи, соответствующее точным данным $g \in L^2(G_{\omega})$. Для получения оценки сходимости регуляризованного решения при неточных исходных данных воспользуемся [22–24] неравенством треугольника [25], которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\| \overline{\overline{w}}^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) - w(\cdot,\cdot,t) \| \le \| \overline{\overline{w}}^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) - \overline{\overline{V}}^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) \| + \| \overline{\overline{V}}^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) - w(\cdot,\cdot,t) \| .$$

Отсюда с учетом оценок (91), (92) для слагаемых в правой части данного неравенства имеем

$$\| \overline{\overline{w}}^{\varepsilon}(\cdot,\cdot,t) - w(\cdot,\cdot,t) \| \le \left[\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon \left(1 + \ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon} \right) \right)} \right]^{1 - t^{\alpha}/T^{\alpha}} \varepsilon + \frac{C_*}{1 + \ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta) T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon} \right)} =$$

$$
= \frac{C_*}{1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)} + \frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\left(1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)\right)}\left[\frac{\alpha\varepsilon\left(1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)\right)}{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}\right]^{t^{\alpha}/T^{\alpha}} \le
$$

$$
\le \frac{C_* + \Gamma(1+\beta)\alpha^{-1}T^{\alpha}}{1+\ln\left(\frac{\Gamma(1+\beta)T^{\alpha}}{\alpha\varepsilon}\right)} \qquad (94)
$$

для всех $t \in (0, T)$, причем константа C_* определяется согласно (93).

Таким образом, искомая оценка сходимости регуляризованного решения обратной ретроспективной задачи конвективной диффузии для модели с локальной M-производной при неточных исходных данных может быть представлена в виде (94).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе выполнены постановки и получены замкнутые решения некоторых двумерных краевых задач конвективного и конвективно-диффузионного массопереноса и массообмена растворимых веществ при геофильтрации в рамках неклассических (базирующихся на понятии локальной M-производной [13] по временнóй переменной) математических моделей.

В частности, рассмотрены задачи моделирования динамики процесса конвективного массопереноса в условиях массообмена в соответствии с обобщенным уравнением неравновесной обратимой адсорбции и десорбции, динамики конвективного массопереноса в случае нелинейной кинетики массообмена при наличии процессов растворения и выпадения растворимых веществ в осадок и динамики процесса конвективной диффузии растворимых веществ в условиях плоско-вертикальной установившейся фильтрации грунтовых вод из водоема к заглубленному дренажному каналу.

Для математической модели с локальной M-производной также выполнена постановка обратной ретроспективной задачи конвективной диффузии, соответствующей схеме двумерной установившейся геофильтрации из бесконечного водоема к дренажу при наличии водоупора, получено регуляризованное решение задачи и установлены некоторые оценки сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Москва: Наука, 1977. 664 с.
2. Лаврик В.И., Фильчакова В.П., Яшин А.А. Конформные отображения физико-топологических моделей. Киев: Наук. думка, 1990. 376 с.
3. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Timoshenko A.A., Lyashko N.I., Bondar E.S. Optimal control of intensity of water point sources in unsaturated porous medium. *Journal of Automation and Information Science*. 2019. Vol. 51, N 7. P. 24–33.
4. Ляшко И.И., Демченко Л.И., Мистецкий Г.Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. Киев: Наук. думка, 1991. 264 с.
5. Веригин Н.Н., Васильев С.В., Саркисян В.С., Шержуков Б.С. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. Москва: Недра, 1977. 272 с.

6. Нумеров С.Н., Патрашев А.Н. Диффузия растворимых веществ в основаниях гидротехнических сооружений. *Тр. Ленингр. политехн. ин-та*. 1947. № 4. С. 165–169.
7. Лаврик В.И., Никифорович Н.А. Исследование конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена. Киев, 1982. 46 с. (Препр./ АН УССР, Ин-т математики; № 82.20).
8. Лаврик В.И., Олейник А.Я. О некоторых математических моделях подземной гидродинамики. *Физико-технические приложения краевых задач*. Киев: Наук. думка, 1978. С. 76–98.
9. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of dynamics of the process of filtration convection diffusion under the condition of time nonlocality. *Journal of Automation and Information Science*. 2012. Vol. 44, N 2. P. 13–22.
10. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modeling of the fractional differential dynamics of the relaxation process of convective diffusion under conditions of planned filtration. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 6. P. 886–895.
11. Bulavatsky V.M., Bogaenko V.A. Mathematical modeling of dynamics of the nonequilibrium in time convective diffusion process in domain with free boundaries. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, N 3. P. 427–440.
12. Булавацкий В.М. Задачи дробно-дифференциальной динамики конвективного массопереноса и массообмена при двумерной геофильтрации. *Проблемы управления и информатики*. 2020. № 4. С. 86–98.
13. Vanterler da C. Sousa J., Capelas de Oliveira E. On the local M-derivative. arXiv: 1704.08186v3 [math. CA] 16 Aug 2017.
14. Vanterler da C. Sousa J., Capelas de Oliveira E. A new truncated M-fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties. arXiv: 1704.08187v4 [math. CA] 4 Aug 2017.
15. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.
16. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1965. 831 p.
17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1967. 436 с.
18. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Co., 1973. 539 p.
19. Kirsch A. An introduction to the mathematical theory of inverse problem. New York: Springer-Verlag, 1996. 307 p.
20. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва: Наука, 1979. 288 с.
21. Denche M., Bessila K. A modified quasi-boundary value method for ill-posed problems. *J. Math. Anal. Appl*. 2005. Vol. 301. P. 419–426.
22. Wei T., Wang J.-G. A modified quasi-boundary value method for the backward time-fractional diffusion problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2014. Vol. 48, N 2. P. 603–621.
23. Tuan N.H., Trong D.D. A new regularized method for two dimensional nonhomogeneous backward heat problem. *Applied Mathematics and Computation*. 2009. Vol. 215. P. 873–880.
24. Tuan N.H., Quan P.H. Convergence rate estimation for a ill-posed heat problem. *ROMAI Journal*. 2010. Vol. 6, N 1. P. 167–178.
25. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. Москва: Наука, 1979. 384 с.

Надійшла до редакції 23.10.2020

В.М. Булавацький

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ З ЛОКАЛЬНОЮ *M*-ПОХІДНОЮ ТА КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ГЕОМІГРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ

Анотація. У рамках математичних моделей, що базуються на понятті локальної *M*-похідної за часовою змінною, виконано постановки та одержано замкнені розв'язки деяких двовимірних крайових задач конвективного і конвективно-дифузійного масопереносу та масообміну розчинних речовин у процесі геофільтрації. Зокрема, поставлено обернену ретроспективну задачу конвективної дифузії згідно зі схемою двовимірної геофільтрації з нескінченної водойми до дренажу, одержано її регуляризований розв'язок, наведено деякі оцінки збіжності.

Ключові слова: математичне моделювання, геоміграція, геофільтрація, масоперенос, масообмін, некласичні моделі, локальна *M*-похідна, задачі конвективного та конвективно-дифузійного масопереносу, замкнена форма розв'язків.

V.M. Bulavatsky

MATHEMATICAL MODELS WITH LOCAL *M*-DERIVATIVE AND BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF GEOMIGRATION DYNAMICS

Abstract. In the framework of mathematical models based on the concept of a local *M*-derivative with respect to a time variable, statements are made and closed-form solutions of some two-dimensional boundary value problems of convective and convective-diffusive mass transfer and mass exchange of soluble substances during geofiltration are obtained. In particular, the inverse retrospective problem of convective diffusion is posed according to the scheme of two-dimensional geofiltration from an infinite reservoir to drainage, its regularized solution is obtained, and some estimates of convergence are given.

Keywords: mathematical modeling, geomigration, geofiltration, mass transfer, mass exchange, non-classical models, local *M*-derivative, problems of convective and convective-diffusive mass transfer, closed form solutions.

Булавацький Володимир Михайлович,
доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: v_bulav@ukr.net.