УДК 519.8

Т.Т. ЛЕБЕДЕВА, Н.В. СЕМЕНОВА, Т.И. СЕРГИЕНКО

ЯДРО УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ВОЗМУЩЕНИЯХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ

Аннотация. На основе использования понятия ядра устойчивости многокритериальной задачи поиска Парето-оптимальных решений с непрерывными частными критериальными функциями и множеством допустимых решений произвольной структуры установлены условия устойчивости задачи относительно возмущений входных данных векторного критерия. Изучен вопрос об устойчивой принадлежности допустимых решений задачи определенным множествам ее оптимальных решений.

Ключевые слова: многокритериальная задача, векторный критерий, Парето-оптимальные решения, множество Слейтера, множество Смейла, возмущения входных данных, устойчивость, ядро устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время для адекватного моделирования процессов, возникающих в различных сферах применения математических методов и информационных технологий при условиях неопределенности и возмущений входной информации, необходимо углубленное изучение вопросов корректности, устойчивости используемых математических моделей в целях регуляризации некорректно сформулированных задач и построения эффективных методов их решения. В задачах оптимизации, в том числе векторных (многокритериальных), малые погрешности во входных данных могут привести к решениям, сильно отличающимся от истинных. Данная статья посвящена изучению влияния неопределенности во входных данных на устойчивость решений таких задач.

В работе представлены новые результаты исследований, которые являются продолжением описанных, в частности в [1–12], и могут быть использованы для получения условий устойчивости векторных оптимизационных задач. Отметим, что наряду с упомянутым циклом исследований проблемы устойчивости развивается также подход, представленный в [12–14] и связанный с получением количественных оценок, характеризующих меру устойчивости оптимальных решений к возмущениям входных данных задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УТВЕРЖДЕНИЯ

Рассмотрим векторную задачу оптимизации в такой постановке:

$$Q(F, X): \max\{F(x) \mid x \in X\},$$

где X — множество из R^n произвольной структуры, возможно дискретной, R^n — n-мерное действительное пространство, $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$, $\ell \geq 2$, $f_i : R^n \to R^1$ — непрерывная функция, $i \in N_\ell = \{1, \ldots, \ell\}$, $X \neq \varnothing$.

Под векторной задачей $Q(F, X)$ понимается задача отыскания элементов множества ее Парето-оптимальных решений

$$P(F, X) = \{x \in X \mid \pi(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\pi(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x)\}$.

Введем в рассмотрение также множество решений задачи $Q(F, X)$, оптимальных по Слейтеру,

$$Sl(F, X) = \{x \in X \mid \sigma(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\sigma(x, F, X) = \{y \in X \mid F(y) > F(x)\}$, и множество решений, оптимальных по Смейлу,

$$Sm(F, X) = \{x \in X \mid \eta(x, F, X) = \varnothing\},$$

где $\eta(x, F, X) = \{y \in X \mid y \neq x, F(y) \geq F(x)\}$.
Очевидно, что

$$Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset Sl(F, X) \tag{1}$$

и $\forall x \in X \; \sigma(x, F, X) \subset \pi(x, F, X) \subset \eta(x, F, X)$.

Отметим известный результат о замкнутости множества оптимальных по Слейтеру решений задачи оптимизации непрерывной вектор-функции на замкнутом допустимом множестве [15]. Из него вытекает следующее утверждение, касающееся задачи $Q(F, X)$, которое будет далее полезно.

Утверждение 1. Пусть допустимое множество X задачи $Q(F, X)$ является замкнутым. Тогда множество $Sl(F, X)$ тоже замкнуто.

Для задачи $Q(F, X)$ в качестве входных данных, которые могут подвергаться возмущениям, будем рассматривать коэффициенты векторного критерия F. Набор таких входных данных обозначим $u \in U$, где $U \subset R^m$ — пространство входных данных задачи. Наряду с введенными обозначениями $F(x) = (f_1(x), \ldots, f_\ell(x))$ для векторной целевой функции и частных критериев задачи $Q(F, X)$ будем использовать, когда это необходимо, обозначения $F_u(x) = (f_1^u(x), \ldots, f_\ell^u(x))$, уточняющие, какой именно элемент u из пространства U входных данных для векторного критерия соответствует рассматриваемой задаче.

Для любого натурального числа q действительное векторное пространство R^q будем рассматривать как нормированное. Норму в R^q зададим формулой

$$\|z\| = \sum_{i \in N_q} |z_i|,$$

где $z = (z_1, \ldots, z_q) \in R^q$, $N_q = \{1, \ldots, q\}$. Под нормой некоторой матрицы $B = [b_{ij}]_{m \times k} \in R^{m \times k}$ будем понимать норму вектора $(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{mk})$. Отметим, что в конечномерном пространстве R^q любые две нормы: $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|^{(2)}$, эквивалентны [16], т.е. найдутся такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что $\forall z \in R^q$ выполняются неравенства $\alpha \|z\|^{(1)} \leq \|z\|^{(2)} \leq \beta \|z\|^{(1)}$. Учитывая эту эквивалентность, заключаем, что изложенные далее результаты справедливы и для других норм, введенных в конечномерном пространстве.

Для набора входных данных $u \in U$ и любого числа $\delta > 0$ определим множество возмущенных входных данных

$$O_\delta(u) = \{u(\delta) \in U \mid \|u(\delta) - u\| < \delta\}.$$

Введем в рассмотрение задачу с возмущенными входными данными для векторного критерия

$$Q(F_{u(\delta)}, X) : \max\{F_{u(\delta)}(x) \mid x \in X\},$$

где $u(\delta) \in O_\delta(u)$, $F_{u(\delta)}(x) = (f_1^{u(\delta)}(x), \ldots, f_\ell^{u(\delta)}(x))$.

Для дальнейшего определения понятия устойчивости задачи $Q(F, X)$ относительно возмущений входных данных ее векторного критерия распространим на этот класс задач понятие устойчивой принадлежности решений отдельным подмножествам допустимого множества, введенное в [4] для полностью целочисленной задачи поиска Парето-оптимальных решений с квадратичными частными критериями, и понятие ядра устойчивости, введенное Л.Н. Козерацкой [17] для задачи с линейными частными критериями.

Рассмотрим такую совокупность подмножеств допустимого множества X:

$$\mathfrak{M} = \{Sl(F, X), P(F, X), Sm(F, X), Sl(F, X) \setminus Sm(F, X), P(F, X) \setminus Sm(F, X)\}.$$

Пусть $M(F, X)$ — любой элемент из $\mathfrak{M}$. Выбрав произвольно число $\delta > 0$ и набор возмущенных входных данных $u(\delta) \in O_\delta(u)$, обозначим $M(F_{u(\delta)}, X)$ подмножество допустимых решений возмущенной задачи $Q(F_{u(\delta)}, X)$, соответствующее подмножеству $M(F, X)$ допустимого множества X исходной задачи $Q(F, X)$. Например, если $M(F, X) = Sl(F, X) \setminus P(F, X)$, то $M(F_{u(\delta)}, X) = Sl(F_{u(\delta)}, X) \setminus P(F_{u(\delta)}, X)$.

Рассмотрим два варианта определения понятия устойчивой принадлежности допустимого решения задачи $Q(F, X)$ некоторому множеству $M(F, X) \in \mathfrak{M}$.

Определение 1. Допустимое решение $x \in M(F, X) \in \mathfrak{M}$ устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ выполняется условие

$$O_\varepsilon(x) \bigcap M(F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing, \tag{2}$$

где $O_\varepsilon(x) = \{x' \in R^n \mid \|x - x'\| < \varepsilon\}$, или, что равносильно (2), выполняется условие

$$x \in O_\varepsilon(M(F_{u(\delta)}, X)),$$

где $O_\varepsilon(M(F_{u(\delta)}, X)) = \left\{ y \in R^n \,\middle|\, \inf_{z \in M(F_{u(\delta)}, X} \|z - y\| < \varepsilon \right\}$. В противном случае полагаем, что точка x неустойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$.

Определение 2. Допустимое решение $x \in M(F, X) \in \mathfrak{M}$ устойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$, если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall u(\delta) \in O_\delta(u)$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется неравенство (2). В противном случае полагаем, что точка x неустойчиво принадлежит множеству $M(F, X)$.

Отметим, что любая точка $x \in M(F, X) \in \mathfrak{M}$, устойчиво принадлежащая множеству $M(F, X)$ согласно определению 2, устойчиво принадлежит этому множеству и согласно определению 1.

Замечание 1. Очевидно, что точка x, устойчиво принадлежащая некоторому множеству $M(F, X) \in \mathfrak{M}$ в смысле определения 1 или 2, сохраняет эту особенность и по отношению к любому множеству $M'(F, X) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющему включениям $M(F, X) \subset M'(F, X) \subset X$. Если некоторая точка z неустойчиво принадлежит множеству $M(F, X) \in \mathfrak{M}$, то она неустойчиво принадлежит и любому множеству $M''(F, X) \in \mathfrak{M}$ при условии, что $z \in M''(F, X) \subset M(F, X)$.

Определение 3. Ядром устойчивости задачи $Q(F, X)$ назовем множество всех устойчиво принадлежащих множеству Парето решений.

В случае применения определения 1 для понятия устойчивой принадлежности ядро устойчивости примет вид

$$\mathrm{Ker}(P(F, X)) = \{x \in P(F, X) \mid \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall u(\delta) \in O_\delta(u)(x \in O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)}, X))\},$$

а при использовании определения 2 примет вид

$$\operatorname{Ker}(P(F,X))=\{x\in P(F,X)\,\big|\,\exists\delta>0\,\forall u(\delta)\in O_\delta(u),\forall\varepsilon>0\ (x\in O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)},X))\}.$$

Определение 4. Задачу $Q(F,X)$ назовем устойчивой, если все ее оптимальные решения устойчиво принадлежат множеству Парето, т.е.

$$\operatorname{Ker}(P(F,X))=P(F,X). \tag{3}$$

Отметим, что в случае использования определений 1 и 4 устойчивость задачи $Q(F,X)$ означает, что точечно-множественное отображение $P:U\to 2^X$, $u\to P(u)=P(F_uX)$ является полунепрерывным снизу по Хаусдорфу в точке $u\in U$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $P((F_u,X))\subset O_\varepsilon(P(F_{u(\delta)},X))$ для любого $u(\delta)\in O_\delta(u)$.

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

В [11] получены следующие достаточные условия устойчивости задачи $Q(F,X)$ в случае использования определений 1 и 4.

Теорема 1. Пусть множество X ограничено и замкнуто. Достаточным условием устойчивости задачи $Q(F,X)$ является выполнение равенства

$$\operatorname{cl}(P(F,X))=\operatorname{cl}(Sm(F,X)). \tag{4}$$

Далее сформулируем необходимые условия устойчивости задачи $Q(F,X)$ при таких дополнительных условиях, наложенных на ее целевую вектор-функцию $F(x)=(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_\ell(x))$:

$$f_i(x)=g_i(x)+\langle c_i,x\rangle,\ i\in N_\ell, \tag{5}$$

где $f_i:R^n\to R^1$, $g_i:R^n\to R^1$, $c_i=(c_{i1},\ldots,c_{in})\in R^n$. В частности, могут рассматриваться квадратичные и линейные функции, составляющие векторный критерий. Входные данные $u\in U$ для указанного векторного критерия представим в виде пары $u=(u^g,C)$, где u^g — набор всех входных данных, необходимых для представления непрерывных функций $g_i(x)$, $i\in N_\ell$, $C=[c_{ij}]\in$ $\in R^{\ell\times n}$.

Теорема 2 [11]**.** Пусть множество X замкнуто. Необходимым условием устойчивости (в смысле определений 1, 4) задачи $Q(F,X)$ с частными критериями, представленными формулами (5), является выполнение равенства (4).

Лемма 1. Пусть множество X замкнуто. Любое допустимое решение $y\in Sl(F,X)\setminus Sm(F,X)$ задачи $Q(F,X)$ с частными критериями $f_i(x)$, $i\in N_\ell$, представленными формулами (5), неустойчиво (в смысле определения 2) принадлежит множеству $Sl(F,X)$, причем $\forall\delta>0\ \exists u(\delta)\in O_\delta(u): y\in X\setminus Sl(F_{u(\delta)},X)$.

Доказательство. Рассмотрим любое решение $y\in Sl(F,X)\setminus Sm(F,X)$ задачи $Q(F_u,X)$, для которого, очевидно, множество $\eta(y,F,X)=\{z\in X\setminus\{x\}\,\big|$ $\big|\,F(z)\geq F(y)\}$ непусто. Выберем произвольно точку $z\in\eta(y,F,X)$. Для любого числа $\delta>0$ определим такой набор возмущенных входных данных $u(\delta)=(u^g,C(\delta))\in O_\delta(u)$, в котором первая компонента осталась неизменной в сравнении с набором входных данных $u=(u^g,C)$, а элементы матрицы $C(\delta)$ определим с помощью формул

$$c_{ij}(\delta)=c_{ij}+\alpha\operatorname{sgn}(z_j-y_j),\ i\in N_\ell, j\in N_n,\ 0<\alpha<\frac{\delta}{n\ell}.$$

Справедлива такая оценка разности значений в точках y и z возмущенного указанным способом i–го ($i \in N_\ell$) частного критерия:

$$f_i^{u(\delta)}(z) - f_i^{u(\delta)}(y) = f_i^u(z) - f_i^u(y) + \alpha \sum_{j \in N_n} (z_j - y_j) \operatorname{sgn}(z_j - y_j) \geq \alpha \| z - y \| > 0 .$$

Исходя из этой оценки, приходим к выводу, что $z \in \sigma(y, F_{u(\delta)}, X) \neq \varnothing$, $y \notin Sl(F_{u(\delta)}, X)$. Принимая во внимание, что $Sl(F_{u(\delta)}, X)$ является замкнутым множеством (в соответствии с утверждением 1), и рассматривая y как точку открытого множества $R^n \setminus Sl(F_{u(\delta)}, X)$, заключаем, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $O_\varepsilon(y) \in R^n \setminus Sl(F_{u(\delta)}, X)$. Итак, $O_\varepsilon(y) \bigcap Sl(F_{u(\delta)}, X) = \varnothing$ и согласно определению 2 точка y неустойчиво принадлежит множеству $Sl(F, X)$, а с учетом замечания 1 — и его подмножеству $Sl(F, X) \setminus Sm(F, X)$.

Лемма 1 доказана.

На основании леммы 1, а также с учетом замечания 1 делаем следующие выводы.

Следствие. Пусть множество X замкнуто. Для задачи $Q(F, X)$ с частными критериями вида (5) любая точка $y \in P(F, X) \setminus Sm(F, X)$ множества оптимальных по Парето, но неоптимальных по Смейлу решений неустойчиво (в смысле определения 2) принадлежит множеству $P(F, X)$ и справедливо включение

$$\operatorname{Ker}(P(F, X)) \subset Sm(F, X). \tag{6}$$

Используя формулы (1), (3) и (6), приходим к такому заключению, справедливому в случае применения определения 2 для понятия устойчивой принадлежности.

Теорема 3. Пусть множество X замкнуто. Необходимым условием устойчивости (согласно определениям 2, 4) задачи $Q(F, X)$ с частными критериями $f_i(x)$, $i \in N_\ell$, представленными формулами (5), является выполнение равенства

$$P(F, X) = Sm(F, X) .$$

Следующее утверждение вытекает из теорем 1–3.

Теорема 4. Пусть множество X ограничено и замкнуто. Задача $Q(F, X)$ с частными критериями вида (5), устойчивая в смысле определений 2 и 4, является устойчивой и в смысле определений 1 и 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает практика, эффективный процесс постановки и решения оптимизационных задач предполагает наличие этапа исследования их устойчивости относительно изменения входных данных с последующей, если это возможно и необходимо, регуляризацией задачи, которая позволит перейти от неустойчивой формулировки задачи к задаче, заведомо устойчивой к возмущениям входных данных. В настоящей статье представлены новые результаты, касающиеся вопросов устойчивости многокритериальной задачи поиска Парето-оптимальных решений с непрерывными критериальными функциями и множеством допустимых решений произвольной структуры. На основе использования понятия ядра устойчивости задачи и изучения вопроса об устойчивой принадлежности ее допустимых решений определенным подмножествам оптимальных решений получены условия устойчивости рассмотренной задачи при возможных возмущениях входных данных векторного критерия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Задача частично целочисленной векторной оптимизации: вопросы устойчивости. *Кибернетика.* 1991. № 1. С. 58–61.
2. Козерацкая Л.Н. Задачи векторной оптимизации: устойчивость в пространстве решений и в пространстве альтернатив. *Кибернетика и системный анализ.* 1994. № 6. С. 122–133.
3. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач. Киев: Наук. думка, 1995. 170 с.
4. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множеств оптимальных и неоптимальных решений. *Кибернетика и системный анализ.* 2005. № 4. С. 90–100.
5. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Устойчивость по векторному критерию и ограничениям векторной целочисленной задачи квадратичного программирования. *Кибернетика и системный анализ.* 2006. № 5. С. 63–72.
6. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 3. С. 142–148.
7. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Качественные характеристики устойчивости векторных задач дискретной оптимизации с различными принципами оптимальности. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 2. С. 75–82.
8. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Свойства возмущенных конусов, упорядочивающих множество допустимых решений векторной оптимизационной задачи. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 5. С. 71–77.
9. Сергиенко И.В., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В. О существовании решений в задачах векторной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ.* 2000. № 6. С. 39–46.
10. Sergienko T.I. Conditions of Pareto optimization problems solvability. Stable and unstable solvability. Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (Eds.). *Optimization Methods and Applications. Springer Optimization and Its Applications, Springer, Cham.* 2017. Vol. 130. P. 457–464.
11. Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Многокритериальная задача оптимизации: устойчивость к возмущениям входных данных векторного критерия. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 6. С. 107–114.
12. Емеличев В.А., Котов В.М., Кузьмин К.Г., Лебедева Т.Т., Семенова Н.В., Сергиенко Т.И. Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией. *Проблемы управления и информатики.* 2014. № 1. С. 53–67.
13. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. Аспекты устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования. *Дискретный анализ и исследование операций.* 2019. Т. 26, № 1. С. 5–19.
14. Emelichev V., Nikulin Yu. On the quasistability radius for a multicriteria integer linear programming problem of finding extremum solutions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 2. P. 949–957.
15. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. Москва: Наука, 1982. 256 с.
16. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз. Ч.1. Київ: Вища школа. 1992. 495 с.
17. Козерацкая Л.Н. Множество строго эффективных точек задачи частично целочисленной векторной оптимизации как характеристика ее устойчивости. *Кибернетика и системный анализ.* 1997. № 6. С. 181–184.

Надійшла до редакції 22.01.2021

Т.Т. Лебєдєва, Н.В. Семенова, Т.І. Сергієнко

ЯДРО СТІЙКОСТІ БАГАТОКРИТЕРІЙНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ЗА УМОВИ ЗБУРЕННЯ ВХІДНИХ ДАНИХ ВЕКТОРНОГО КРИТЕРІЮ

Анотація. Базуючись на понятті ядра стійкості багатокритерійної задачі пошуку Парето-оптимальних розв'язків з неперервними частковими критерійними функціями і множиною допустимих розв'язків довільної структури, встановлено умови стійкості відносно збурень вхідних даних векторного критерію. Вивчено питання стійкої належності допустимих розв'язків задачі визначеним множинам її оптимальних розв'язків.

Ключові слова: багатокритерійна задача оптимізації, векторний критерій, Парето-оптимальні розв'язки, множина Слейтера, множина Смейла, збурення вхідних даних, стійкість, ядро стійкості.

T.T. Lebedeva, N.V. Semenova, T.I. Sergienko

STABILITY KERNEL OF MULTICRITERIA OPTIMIZATION PROBLEM UNDER PERTURBATIONS OF INPUT DATA OF VECTOR CRITERION

Abstract. Based on the concept of the stability kernel for multicriteria optimization problem of finding Pareto optimal solutions with continuous partial criterion functions and feasible set of arbitrary structure, the conditions of problem stability with respect to initial data perturbations in vector criterion are established. Stable belonging of the feasible solutions to certain sets of optimal solutions of the problem is analyzed.

Keywords: multicriteria optimization problem, vector criterion, Pareto-optimal solutions, Slater set, Smale set, perturbations of initial data, stability, kernel of stability.

Лебєдєва Тетяна Тарасівна,
кандидат екон. наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: lebedevatt@gmail.com.

Семенова Наталія Володимирівна,
доктор фіз.-мат. наук, провідний науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: nvsemenova@meta.ua.

Сергієнко Тетяна Іванівна,
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: taniaser62@gmail.com.