УДК 519.837

Л.В. БАРАНОВСЬКА
Інститут прикладного системного аналізу КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна,
e-mail: *lesia@baranovsky.org*.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ ІГРИ ЗБЛИЖЕННЯ З ДЕКІЛЬКОМА ЗАПІЗНЮВАННЯМИ

Анотація. Розглянуто диференціально-різницеві ігри зближення з декількома запізнюваннями. Розроблено схеми методу розв'язувальних функцій та першого прямого методу Понтрягіна. Одержано достатні умови завершення гри. Вперше в таких іграх для систем з комутативними матрицями та систем з чистим запізнюванням використовуються зручні для чисельної реалізації нові представлення формули Коші.

Ключові слова: конфліктно-керований процес, диференціальні ігри, диференціально-різницеві ігри, метод розв'язувальних функцій, перший прямий метод Понтрягіна.

ВСТУП

У цій роботі розглянуто проблеми зближення керованих об'єктів, динаміка яких описується системою диференціально-різницевих рівнянь з декількома запізнюваннями. Згідно з Р. Айзексом [1] ігри переслідування поділяються на ігри ступеня та ігри якості. Результатом гри ступеня вважається одне значення з континуума можливих значень, яке може приймати платіж гри. Гра якості має скінченне число можливих результатів, які залежать від можливості одного із гравців досягнути своєї мети. У грі переслідування, наприклад, метою одного гравця може бути захоплення іншого. Для другого випадку методи гарантованого результату визначають умови виграшу гравця, за яких можна не зважати на оптимальність, що з практичної точки зору для конфліктно-керованих процесів більш виправдано. У цій роботі розглядаються саме такі методи, зокрема перший прямий метод Понтрягіна [2, 3] і метод розв'язувальних функцій [4–13]. Ці методи дають змогу ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень і одержувати змістовні результати [14, 15]. Ця стаття присвячена застосуванню зазначених методів у диференціальних іграх зближення із запізнюваннями. Раніше перший прямий метод Понтрягіна застосовувався в лінійних диференціальних іграх переслідування із запізнюванням у роботі [16], метод розв'язувальних функцій в диференціально-різницевій грі з одним запізнюваннями — у роботах [17–26]. Для розв'язання цих задач використовували формулу Коші згідно з [27], що було доволі складно застосовувати до широкого кола прикладів, або використовувалась фундаментальна матриця системи у вигляді запізнювального експоненціала [28] для систем з чистим запізнюванням та систем з переставними матрицями. Отримані наразі результати розв'язків диференціально-різницевих систем з декількома запізнюваннями, на відміну від вивчених процесів з одним запізнюванням, дають можливість суттєво розширити коло задач і вперше розвинути ці методи для таких систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу зближення, задану системою диференціально-різницевих рівнянь

$$\dot{z}(t) = Az(t) + B_1 z(t-\tau_1) + \ldots + B_n z(t-\tau_n) + f(u(t), v(t)), \; t \ge 0, \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$z(t)=\varphi(t),\ \ t\in[-\bar{\tau},0],\bar{\tau}:=\max\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}. \tag{2}$$

Тут $z(t)\in R^N$ — Евклідів n-вимірний простір. Визначимо M_N — лінійний простір всіх $N\times N$ сталих матриць, $\mathbb{N}$ і $\mathbb{N}_0$ — множини всіх додатних і невід'ємних цілих чисел відповідно. Покладемо для порожньої суми рівність $\sum_{i\in\varnothing} g(i)=0$ для довільних функцій g, добуток $\prod_{i=1}^{n} B_i = B_1\ldots B_n$ для матриць $B_1,\ldots,B_n$. Блок керування задається функцією $f(u,v)$, $f: U\times V\to R^N$, неперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V.

Вважаємо, що гра відбувається на проміжку часу $[0,T]$. Керування гравців $u(s)$, $u: R_+\to U$, і $v(s)$, $v: R_+\to V$, є вимірними функціями часу. Термінальна множина є циліндричною і має вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{3}$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^N, а M — непорожній компакт з ортогонального доповнення L до M_0 в R^N.

Перший (u) і другий (v) гравці матимуть протилежні цілі. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1), (2) на термінальну множину (3) за найменший час, а другий гравець (втікач) намагається уникнути зустрічі або максимально відтягнути момент попадання на термінальну множину M^*. Станемо на бік переслідувача і його керування в момент t виберемо на основі інформації про $\varphi(t)$ і $v_t(\cdot)$ — передісторія керування втікача до моменту t $(v_t(\cdot)=\{v(s): s\in[0,t]\})$ у вигляді вимірної функції $u(t)=u(\varphi(t),v_t(\cdot))$, $t\in[0,T]$, $u(t)\in U$. У цьому разі будемо говорити, що його керування задається квазістратегією. У випадку, коли переслідувач приймає рішення в момент t лише на основі інформації про початковий стан $\varphi(t)$ і миттєвого значення керування втікача $u(t)=u(\varphi(t),v(t))$, $t\in[0,T]$, $u(t)\in U$, кажуть про контркерування за Красовським [29] на основі стробоскопічної стратегії О. Хайєка [30].

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВІ СИСТЕМИ З ДЕКІЛЬКОМА ЗАПІЗНЮВАННЯМИ

У роботі [31] покроковим методом одержане представлення загального розв'язку системи диференіцально-різницевих рівнянь з одним запізнюванням [32].

Лема 1 [32]. Нехай задано $\tau>0$, $B\in M_N$, $\varphi\in C^1([-\tau,0],R^N)$, $f:[0,\infty)\to \to R^N$. Тоді загальний розв'язок задачі Коші для системи $\dot{z}(t)=Bz(t-\tau)+ +f(t)$, $t\ge 0$, з початковою умовою $z(t)=\varphi(t)$, $t\in[-\tau,0]$, має вигляд

$$z(t)=e_\tau^{Bt}\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0} e_\tau^{B(t-s-\tau)}\dot{\varphi}(s)\,ds+\int_0^t e_\tau^{B(t-s-\tau)} f(s)\,ds,\quad t\ge-\tau.$$

Тут e_τ^{Bt} — запізнювальний експоненціал, який задається формулою

$$e_\tau^{Bt}=\begin{cases}\Theta, & t<-\tau,\\ \mathrm{I}, & -\tau\le t\le 0,\\ \mathrm{I}+Bt+B^2\dfrac{(t-\tau)^2}{2}+\ldots+B^k\dfrac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}, & (k-1)\tau\le t<k\tau,\ k\in\mathbb{N},\end{cases}$$

де Θ, I — нульова та одинична $N\times N$ матриці відповідно.

Таке представлення загального розв'язку було використано в роботах [20, 25, 26] для розв'язання диференціально-різницевих ігор зближення методом розв'язувальних функцій. Цей результат було узагальнено в [33] для випадку постійних запізнень з початковою функцією класу C^1.

Лема 2 [33]. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\tau := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $B_1, \ldots, B_n$ — попарно комутативні з M_N матриці, тобто $B_i B_j = B_j B_i$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $f: [0, \infty) \to R^N$ — задана початкова функція. Тоді розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}(t) = B_1 z(t - \tau_1) + \ldots + B_n z(t - \tau_n) + f(t), \quad t \ge 0, \tag{4}$$

з початковою умовою (2) має вигляд

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -\tau \le t < 0, \\ X_n(t)\varphi(0) + \int_0^t X_n(t-s) \sum_{m=1}^n B_m \phi(s - \tau_m)\, ds + \int_0^t X_n(t-s) f(s)\, ds, & t \ge 0, \end{cases}$$

де $\phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [-\tau, 0), \\ \theta, & t \notin [-\tau, 0), \end{cases}$ θ — N-вимірний нульовий вектор,

$X_n(t) = e_{\tau_1, \ldots, \tau_n}^{B_1, \ldots, B_n (t - \tau_n)}$ і визначається за формулою

$$e_{\tau_1, \ldots, \tau_j}^{B_1, \ldots, B_j t} = \begin{cases} \Theta, \quad t < -\tau_j, \\ X_{j-1}(t + \tau_j), \quad -\tau_j \le t < 0, \\ X_{j-1}(t + \tau_j) + B_j \int\limits_0^t X_{j-1}(t - s_1) ds_1 + \ldots \\ \ldots + B_j^k \int_{(k-1)\tau_j}^t \int_{(k-1)\tau_j}^{s_1} \ldots \int_{(k-1)\tau_j}^{s_{k-1}} X_{j-1}(t - s_1) \times \\ \times \prod_{i=1}^{k-1} X_{j-1}(s_i - s_{i+1}) X_{j-1}(s_k - (k-1)\tau_j) ds_k \ldots ds_1, \\ \qquad (k-1)\tau_j \le t < k\tau_j, \ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

для всіх $j = 2, 3, \ldots, n$, де $X_{j-1}(t) = e_{\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}}^{B_1, \ldots, B_{j-1}(t - \tau_{j-1})}$.

Запізнювальний експоненціал знаходиться за допомогою індукції і тому незручний для практичного застосування. У цій статті будемо використовувати нове представлення розв'язку системи (4) у ракурсі такого означення.

Означення 1. Нехай $n \in \mathbb{N}, 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\tau := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $B_1, \ldots$ $\ldots, B_n \in M_N$, $\varphi \in C([-\tau, 0], R^N)$, $f: [0, \infty) \to R^N$ — задана функція. Функція $x: [-\tau, \infty) \to R^N$ є розв'язком задачі Коші (4), (2) на $[0, \infty)$, якщо $x \in C^1([0, \infty), R^N)$ (в момент часу $t = 0$ похідна в (4) представлена у вигляді правої похідної) і $x(t)$ задовольняє умову (2).

Нехай $D = (D_1, \ldots. D_n) \in M_N^n$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ — довжини $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots$ $\ldots + \alpha_n$ і факторіал $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$ Покладемо

$$\Upsilon^\alpha := (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{\alpha_2}, \ldots, \underbrace{n, \ldots, n}_{\alpha_n}) \in \mathbb{N}^{|\alpha|} \text{ для } |\alpha| > 0.$$

Позначимо Υ_i^{α} i-у координату вектора Υ^{α} і нехай

$$P_{\alpha}^{D} := \sum_{\sigma \in S_{|\alpha|}^{\Upsilon^{\alpha}}} \prod_{i=1}^{|\alpha|} D_{\Upsilon_{\sigma(i)}^{\alpha}}, \quad |\alpha| > 0, \quad P_{(0,\dots,0)}^{D} := \mathrm{I}, \tag{5}$$

де сума визначається за всіма переставленнями множини $\{1, \dots, |\alpha|\}$ такими, що якщо $\sigma, \pi \in S_{|\alpha|}^{\Upsilon^{\alpha}}$ — два різні переставлення, тобто $\sigma \neq \pi$ (як вектори), то

$$(\Upsilon_{\sigma(1)}^{\alpha}, \dots, \Upsilon_{\sigma(|\alpha|)}^{\alpha}) \neq (\Upsilon_{\pi(1)}^{\alpha}, \dots, \Upsilon_{\pi(|\alpha|)}^{\alpha}).$$

Лема 3 [34]. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, $B_1, \dots, B_n \in \in M_N$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$ і $f : [0, \infty) \to R^N$ — задана експоненціально обмежена функція (існують константи c_1, c_2 $\in \mathbb{R}$ такі, що $|f(t)| \leq c_1 e^{c_2 t}$ для всіх $t \geq 0$). Тоді розв'язок задачі Коші (4), (2) має вигляд

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -\bar{\tau} \leq t < 0, \\ X(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} X(t-s) B_j \varphi(s - \tau_j)\, ds + \int_0^t X(t-s) f(s)\, ds, & t \geq 0, \end{cases}$$

де

$$X(t) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_i \leq t}} \frac{(t - \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_i)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} P_{\alpha}^{B} \tag{6}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, P_{α}^{D} задано формулою (5) і $B = (B_1, \dots, B_n)$.

Лема 4 [34]. Нехай $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \dots, \tau_n\}$, матриці $A, B_1, \dots, B_n \in M_N$ такі, що A комутативна з кожною B_i, тобто $AB_i = B_i A$ для всіх $i = 1, \dots, n$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$, і $f : [0, \infty) \to R^N$ — задана функція. Тоді розв'язок задачі Коші (1), (2) має вигляд

$$z(t) = \begin{cases} \varphi(t), & -\bar{\tau} \leq t < 0, \\ Y(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} Y(t-s) B_j \varphi(s - \tau_j)\, ds + \int_0^t Y(t-s) f(s)\, ds, & t \geq 0, \end{cases}$$

де

$$Y(t) = e^{At} \cdot \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_i \leq t}} \frac{(t - \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_i)^{|\alpha|}}{|\alpha|!} P_{\alpha}^{\bar{B}} \tag{7}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, P_{α}^{D} задано формулою (5), $\bar{B} = (\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_n)$ і $\bar{B}_k = B_k e^{-A\tau_k}$ для всіх $k = 1, \dots, n$.

Приклад 1. Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x}(t) = -3.5\, x(t) + 2x(t-1) - x(t-2) + 3x(t-2.5) + 1, \quad t \geq 0,$$

$$x(t) = -t, \quad t \in [-2.5; 0].$$

Розв'язок цієї задачі з використанням леми 4 наведено в [35].

Нехай π — оператор ортогонального проєктування з R^N в L. Покладемо $\varphi(U,v)=\{\varphi(u,v): u\in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення $W(t,v)=$ $=\pi K(t)f(U,v)$, $W(t)=\bigcap_{v\in V} W(t,v)$, де матриця $K(t)$ визначається рівністю (7) для системи (1) або рівністю (6) для системи (4).

Розглянемо умову Понтрягіна: відображення $W(t)\neq\varnothing$ для всіх $t\geq 0$.

Оскільки багатозначне відображення $W(t,v)$ неперервне на множині $[0,\infty)\times V$, то $W(t)$ напівнеперервне зверху, а отже, і Борелеве, тому існує хоча б один Борелевий селектор $\gamma(t)$, $\gamma(t)\in W(t)$, $t\geq 0$ [36]. Позначимо через $\varGamma$ сукупність Борелевих селекторів багатозначного відображення $W(t)$, зафіксуємо деякий єлемент $\gamma(\cdot)\in\varGamma$ і покладемо

$$\xi(t,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))=\pi K(t)\varphi(0)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau_j}\pi K(t-s)B_j\varphi(s-\tau_j)\,ds+\int_0^t\gamma(s)\,ds. \quad (8)$$

Уведемо розв'язувальну функцію

$$\alpha(t,s,\varphi(\cdot),v,\gamma(\cdot))=\sup\{\alpha\geq 0: [W(t-s,v)-$$
$$-\gamma(t-s)]\cap\alpha[M-\xi(t,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot)]\neq\varnothing\}. \quad (9)$$

Позначимо

$$T(\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))=\inf\{t\geq 0:\int_0^t\inf_{v\in V}\alpha(t,s,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))ds\geq 1\},\quad \gamma(\cdot)\in\varGamma. \quad (10)$$

Оскільки $W(t)$ напівнеперервне багатозначне відображення і функція $\xi(t,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))$ неперервна, тоді функція $\alpha(t,s,\varphi(\cdot),v,\gamma(\cdot))$ напівнеперервна зверху по v, а тому є Борелевою функцією за (s,v), $s\in[0,t]$, $v\in V$. З роботи [37] випливає, що функція $\inf_{v\in V}\alpha(t,s,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))$ інтегровна по $s\in[0,t]$. Якщо нерівність у фігурних дужках (9) не виконується для всіх $t\geq 0$, то будемо покладати $T(\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))=\infty$. Якщо $\xi(t,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))\in M$, $t>0$, то $\inf_{v\in V}\alpha(t,s,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))=\infty$ і в цьому випадку значення інтеграла в (9) покладемо рівним нескінченності, тобто нерівність в (10) виконується автоматично.

Теорема 1. Нехай в системі (4), (2) $n\in\mathbb{N}$, $0<\tau_1<\ldots<\tau_n\in\mathbb{R}$, $B_1,\ldots,B_n\in M_N$, $\bar\tau:=\max\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$, $\varphi\in C([-\bar\tau,0],R^N)$ і $f:[0,\infty)\to R^N$ — експоненціально обмежена функція, а також виконується умова Понтрягіна, множина M опукла, для початкового стану $f(\cdot)$ і деякого селектора $\gamma(\cdot)\in\varGamma$ $T=T(\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))<\infty$, $K(t)$ визначається рівністю (6). Тоді траєкторія процесу (4), (2) може досягти термінальної множини (3) з початкового стану $f(\cdot)$ в момент T за допомогою керування у вигляді квазістратегії.

Доведення. Нехай $v(s)$, $v(s)\in V$, $s\in[0,T]$, — довільна вимірна функція і $\xi(T,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))\notin M$. За допомогою контрольної функції $h(t)=1-\int_0^t\alpha(T,s,\varphi(\cdot),v,$ $\gamma(\cdot))\,ds$, $t\geq 0$, знаходитимемо момент перемикання $t_*=t_*(v(\cdot))$, $0<t_*\leq T$, з «активного» проміжку часу $[0,t_*)$ на «пасивний» $[t_*,T]$ за умовою $h(t_*)=0$. Опишемо спосіб вибору керування переслідувачем на кажному з цих проміжків часу. Розглянемо багатозначне відображення

$$U_1(s,v)=\{u\in U: \pi K(T-s)f(u,v)-\gamma(T-s)\in$$
$$\in\alpha(T,s,\varphi(\cdot),v,\gamma(\cdot))[M-\xi(T,\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))]\}. \quad (11)$$

Відображення $U_1(s,v)$ є Борелевим, тоді його селектор $u_1(s,v)=$ $=\operatorname{lex}\min U_1(s,v)$ є Борелевою функцією за сукупністю змінних. Керування переслідувачем на проміжку $[0, t_*)$ покладемо рівним $u(s) = u_1(s, v(s))$. Воно є вимірною функцією як суперпозиція зовнішньої Борелевої та вимірної функції.

Покладемо $\alpha(T, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot)) = 0$ для $s \in [t_*, T]$. Тоді відображення $U_2(s, v) = \{u \in U : \pi K(T-s) f(u(s), v(s)) - \gamma(T-s) = 0\}$, $s \in [t_*, T]$, $v \in V$, також є Борелевою функцією за сукупністю змінних і її селектор $u_2(s, v) = \operatorname{lex\,min} U_2(s, v)$ є Борелевою функцією.

Керування переслідувачем на проміжку часу $[t_*, T]$ покладемо рівним

$$u(s) = u_2(s, v(s)). \tag{12}$$

Воно також є вимірною функцією часу. Нехай $\xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \in M$. Тоді керування переслідувачем на проміжку $[0, T]$ виберемо у вигляді (12).

Отже, визначено закон керування переслідувачем для довільної ситуації. Покажемо, що при цьому траєкторія процесу (4), (2) в момент T потрапляє на термінальну множину (3) за довільних керувань втікача. За лемою 3 для системи (4) маємо

$$\pi z(T) = \pi X(T)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} \pi X(T-s) B_j \varphi(s - \tau_j)\, ds +$$

$$+ \int_0^T \pi X(T-s) f(s)\, ds. \tag{13}$$

Проаналізуємо спочатку випадок, коли $\xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \notin M$. Для цього додамо і віднімемо в правій частині рівності (13) величину $\int\limits_0^T \gamma(T-s)\, ds$:

$$\pi z(T) = [\pi X(T)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} \pi X(T-s) B_j \varphi(s - \tau_j)\, ds + \int\limits_0^T \gamma(T-s) ds] +$$

$$+ \int_0^T [\pi X(T-s) f(u(s), v(s)) - \gamma(T-s)]\, ds.$$

З урахуванням (8), (9), (11) одержимо

$$\pi z(T) \in \xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) + \alpha(T, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot))[M - \xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot))].$$

Згідно із законом вибору керування матимемо

$$\pi z(T) \in \xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot))\,(1 - \int_0^{t_*} \alpha(T, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot)) ds) + \int_0^{t_*} \alpha(T, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot)) M ds,$$

звідки, враховуючи рівність $\int_0^{t_*} \alpha(T, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot))\, ds = 1$ і умову опуклості множини M, одержуємо включення $\pi z(T) \in M$, що рівносильно $z(T) \in M^*$.

Розглянемо випадок, коли $\xi(T, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \in M$. Тоді керування переслідувачем виберемо у вигляді (12) і з (13) одержимо включення $\pi z(T) \in M$, що і треба було довести.

Аналогічно можна довести таку теорему.

Теорема 2. Нехай в системі (1) з початковою умовою (2) $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, матриці $A, B_1, \ldots, B_n \in M_N$ такі, що A комутативна з кожною B_i, тобто $AB_i = B_i A$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$ і $f : [0, \infty) \to R^N$, а також виконується умова Понтрягіна, множина M опукла, для початкового стану $f(\cdot)$ і деякого селектора $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ $T = T(\varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) < \infty$, де $K(t)$ визначається рівністю (7). Тоді траєкторія процесу (1), (2) може досягти термінальної множини (3) з початкового стану $f(\cdot)$ в момент T за допомогою керування у вигляді квазістратегії.

Із правила побудови керування переслідувачем у схемі методу розв'язувальних функцій випливає, що в момент t, $t \in [0, T]$, переслідувач використовує інформацію про передісторію $v_t(\cdot)$ керування втікача, причому вона необхідна тільки для визначення момента переключення t_* з «активного» проміжку часу на «пасивний». На самих же проміжках переслідувач використовує контркерування за Красовським, тому виникає питання, за яких умов можна обмежитися контркеруваннями, тобто не використовувати інформацію про передісторію керування втікача. Достатні умови завершення гри в контркеруваннях для метода розв'язувальних функцій одержано в [38].

Питання про практичне знаходження розв'язувальних функцій для лінійних процесів можна звести до теореми.

Теорема 3. Нехай в системі (4) з початковою умовою (2) $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $B_1, \ldots, B_n \in M_N$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$ і $f : [0, \infty) \to$ $\to R^N$ — експоненціально обмежена функція, причому $f(t) = u(t) - v(t)$, а також виконується умова Понтрягіна, існують неперервна додатна функція $r(t)$, $r : R^+ \to R^+$, і число $l \geq 0$ такі, що $\pi X(t) U = r(t) S$, $M = lS$, де S – одинична куля L з центром в нулі, $X(t)$ визначена рівністю (6). Тоді розв'язувальна функція $\alpha(t, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot))$, $0 \leq s \leq t$, $z \in R^N$, $v \in V$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, для $\xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \notin lS$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння відносно α:

$$\left\| \pi X(t-s) v + \gamma(t-s) - \alpha \xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\| = r(t-s) + \alpha l. \qquad (14)$$

Доведення. З умови теореми і виразу (9) випливає, що розв'язувальна функція для фіксованих значень аргументів є таким максимальним числом α, що

$$\{r(t-s) S - \pi X(t-s) v - \gamma(t-s)\} \cap \alpha \{lS - \xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot))\} \neq \varnothing;$$

це рівносильно включенню

$$\pi X(t-s) v + \gamma(t-s) - \alpha \xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \in [r(t-s) + \alpha l] S.$$

Внаслідок лінійності за α лівої частини останнього включення для максимального α вектор $\pi X(t-s) v + \gamma(t-s) - \alpha \xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot))$ розташовуватиметься на межі кулі $[r(t-s) + \alpha l] S$, що і виражено рівністю (14).

Аналогично можна довести теорему.

Теорема 4. Нехай в системі (1) з початковою умовою (2) $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots$ $\ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, матриці $A, B_1, \ldots, B_n \in M_N$ такі, що A комутативна з кожною B_i, тобто $AB_i = B_i A$ для всіх $i = 1, \ldots, n$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$ і $f : [0, \infty) \to R^N$, а також виконується умова Понтрягіна, існує неперервна додатна функція $r(t)$, $r : R^+ \to R^+$, і число $l \geq 0$ такі, що $\pi X(t) U = r(t) S$, $M = lS$, де S — одинична куля простору L з центром в нулі, $X(t)$ визначена рівністю (7). Тоді розв'язувальна функція $\alpha(t, s, \varphi(\cdot), v, \gamma(\cdot))$, $0 \leq s \leq t$, $z \in R^N$, $v \in V$, $\gamma(\cdot) \in \Gamma$, для $\xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \notin lS$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння відносно α:

$$\left\| \pi X(t-s) v + \gamma(t-s) - \alpha \xi(t, \varphi(\cdot), \gamma(\cdot)) \right\| = r(t-s) + \alpha l.$$

Розглянемо задачу зближення, де процес описано системою диференціально-різницевих рівнянь з декількома запізнюваннями (1) або з чистими запізнюваннями вигляду (4) з початковою умовою (2) і термінальною множиною (3). Уведемо функцію Понтрягіна $P(z)$, $P: R^N \to R$,

$$P(z) = \min\{t \geq 0 : \pi K(t)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} K(t-s)B_j \varphi(s-\tau_j)\, ds \in M -$$

$$-\int_0^t W(s)\, ds\}, \tag{15}$$

де $K(t)$ для системи (1) задається рівністю (7), а для системи (4) — рівністю (6). Якщо включення у фігурних дужках не виконується для жодного $t \geq 0$, то покладемо $P(z) = \infty$.

Теорема 5. Нехай для конфліктно керованого процесу (4) з початковою умовою (2) $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, $B_1, \ldots, B_n \in M_N$, $\varphi \in C([-\bar{\tau}, 0], R^N)$ і $f : [0, \infty) \to R^N$ — експоненціально обмежена функція, а також виконується умова Понтрягіна, M опукла і для деякого початкового стану $\varphi(0)$ $P_0 := P(\varphi(0)) < \infty$. Тоді траєкторія процесу (4), (2) досягне термінальної множини (3) з початкового стану $\varphi(0)$ в момент P_0.

Доведення. З умови теореми випливає включення

$$\pi X(P_0)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} K(P_0 - s)B_j \varphi(s-\tau_j)\, ds \in M - \int_0^{P_0} W(P_0 - s)\, ds.$$

Тоді існують точка $m \in M$ і селектор $\gamma(\cdot) \in \Gamma$ такі, що

$$\pi X(P_0)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} K(P_0 - s)B_j \varphi(s-\tau_j)\, ds =$$

$$= m - \int_0^{P_0} \gamma(P_0 - s)\, ds. \tag{16}$$

Розглянемо багатозначне відображення

$$U(s, v) = \{u \in U : \pi K(P_0 - s) f(u(s), v(s)) - \gamma(P_0 - s) = 0\}, \tag{17}$$

$s \in [0, P_0]$, $v \in V$. Воно є Борелевим за (s, v). Селектор

$$u(s, v) = \operatorname{lex\,min} U(s, v) \tag{18}$$

є Борелевою за (s, v) функцією. Керування переслідувачем покладемо рівним

$$u(s) = u(s, v(s)),\ s \in [0, P_0], \tag{19}$$

де $v(s)$, $v(s) \in V$, $s \in [0, P_0]$, — довільне керування втікача, яке допускається, і яке є Борелевою функцією часу. Враховуючи рівність (16), з (17)–(19) одержуємо

$$\pi z(P_0) = \pi X(P_0)\varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_j} \pi X(P_0 - s)B_j \varphi(s-\tau_j)\, ds +$$

$$+\int_0^{P_0} \pi X(P_0 - s) f(s)\, ds = m \in M.$$

Звідки випливає $z(P_0) \in M^*$, що і треба було довести.

Аналогично можна довести таку теорему.

Теорема 6. Нехай для конфліктно керованого процесу (1) з початковою умовою (2) $n \in \mathbb{N}$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n \in \mathbb{R}$, $\bar{\tau} := \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$, матриці $A, B_1, \ldots, B_n \in$

$\in M_N$ такі, що A комутативна з кожною B_i, тобто $AB_i = B_i A$ для всіх $i=1,\ldots,n$, $\varphi \in C([-\bar{\tau},0], R^N)$ і $f:[0,\infty)\to R^N$, а також виконується умова Понтрягіна, M опукла і для деякого початкового стану $\varphi(0)$ $P_0 := P(\varphi(0)) < \infty$. Тоді траєкторія процесу (1), (2) може досягти термінальної множини (3) з початкового стану $\varphi(0)$ в момент P_0.

Наслідок 1. Нехай для конфліктно керованого процесу (4) з початковою умовою (2) $n\in\mathbb{N}$, $0<\tau_1<\ldots<\tau_n\in\mathbb{R}$, $\bar{\tau}:=\max\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$, $B_1,\ldots,B_n\in M_N$, $\varphi\in C([-\bar{\tau},0], R^N)$ і $f:[0,\infty)\to R^N$ — експоненціально обмежена функція, а також виконується умова Понтрягіна. Тоді для довільного початкового стану $\varphi(\cdot)$ існує селектор $\gamma(\cdot)\in \Gamma$ такий, що $T(\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))\le P(\varphi(\cdot))$.

Наслідок 2. Нехай для конфліктно керованого процесу (1) з початковою умовою (2) $n\in\mathbb{N}$, $0<\tau_1<\ldots<\tau_n\in\mathbb{R}$, $\bar{\tau}:=\max\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$, матриці $A, B_1,\ldots,B_n\in$ $\in M_N$ такі, що A комутативна з кожною B_i, тобто $AB_i = B_i A$ для всіх $i=1,\ldots,n$, $\varphi\in C([-\bar{\tau},0], R^N)$ і $f:[0,\infty)\to R^N$, а також виконується умова Понтрягіна. Тоді для довільного початкового стану $\varphi(\cdot)$ існує селектор $\gamma(\cdot)\in\Gamma$ такий, що $T(\varphi(\cdot),\gamma(\cdot))\le P(\varphi(\cdot))$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто диференціально-різницеві ігри зближення з декількома запізнюваннями. Побудовано схеми методів розв'язувальних функцій та першого прямого методу Понтрягіна для таких ігор. Для побудови керування переслідувачем було використано формули Коші для диференціально-різницевих систем з декількома запізнюваннями і попарно переставними матрицями, які нещодавно одержано у роботі [34]. Надалі планується розвинути схеми методів розв'язувальних функцій та першого прямого методу Понтрягіна для диференціально-різницевих ігор зближення зі змінними запізнюваннями та для випадку групової задачі зближення з декількома переслідувачами і одним втікачем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Isaacs R. Differential games. New York: John Wiley, 1965. 480 p.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
3. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва.: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
4. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
5. Chikrii A.A. Control of moving objects in condition of conflict. *Control Systems: Theory and Applications,* 2018. P. 17–42.
6. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proc. Steklov Institute of Mathematics.* 2016. Vol. 293. P. 254–269. https://doi.org/10.1134/S0081543816050229.
7. Chikrij A.A., Dzyubenko K.G. Bilinear Markovian processes of search for moving objects. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika).* 1997. Iss. 1. P. 92–106.
8. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann–Liouvtlle fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 6. P. 836–864. https://doi.org/10.1023/A:1014529914874.

9. Baranovskaya L.V., Chikrij A.A., Chikrij Al.A. Inverse Minkowski functional in a nonstationary problem of group pursuit. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya.* 1997. Vol. 1. P. 109–114.

10. Chikriy A.A., Baranovskaya L.V., Chikriy A.A. An approach game problem under the failure of controlling devices. *J. of Automation and Information Sciences.* 2000. Vol. 32, N 5. P. 1–8. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v32.i5.10.

11. Baranovskaya L.V., Chikrii A.A., Chikrii Al.A. Inverse Minkowski functional in a nonstationary problem of group pursuit. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1997. Vol. 36, N 1. P. 101–106.

12. Chikrij A.A., Baranovskaya L.V., Chikrij Al.A. The game problem of approach under the condition of failure of controlling devices. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*. 1997. N 4. P. 5–13.

13. Baranovskaya L.V., Chikrii Al.A. Game problems for a class of hereditary systems. *J. of Automation and Information Sciences.* 1997. Vol. 29, N 2. P. 87–97. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v29.i2-3.120.

14. Chikrii A.A., Rappoport I.S. Systems analysis method of resolving functions in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2012. Vol. 48, N 4. P. 512–531. https://doi.org/10.1007/s10559-012-9430-y.

15. Chikrii A.A., Rappoport I.S., Chikrii K.A. Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 5. P. 719–730. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0097-8.

16. Никольский М.С. Линейные дифференциальные игры преследования при наличии запаздываний. *Доклады Академии наук СССР.* 1971. Т. 197, № 5. С. 1018–1021.

17. Чикрий А.А., Чикрий Г.Ц. Групповое преследование в дифференциально-разностных играх. *Дифференциальные уравнения.* 1984. Т. XX, № 5. С. 802–810.

18. Барановская Л.В., Барановская Г.Г. О дифференциально-разностной игре группового преследования. *Доклады Национальной академии наук Украины.* 1997. № 3. С. 12–15.

19. Кириченко Н.Ф., Барановская Л.В., Чикрий Ал.А. Об одном классе линейных дифференциально-разностных игр сближения. *Доклады Национальной академии наук Украины*. 1997. № 6. С. 24–26.

20. Baranovska L.V. Group pursuit differential games with pure time-lag. *Understanding Complex Systems.* 2021. P. 475–488. https://doi.org/10.1007/978-3-030-50302-4_23.

21. Baranovska L.V. Method of resolving functions for the differential-difference pursuit game for different-inertia objects. *Studies in Systems, Decision and Control*. 2016. Vol. 69. P. 159–176. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40673-2_7.

22. Baranovska G.G., Baranovska L.V. Group pursuit in quasilinear differential-difference games. *J. of Automation and Information Sciences.* 1997. Vol. 29, N 1. P. 55–62. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v29.i1.70.

23. Baranovskaya L.V. A method of resolving functions for one class of pursuit problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies.* 2015. Vol. 2, N 4. P. 4–8. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.39355.

24. Baranovska L.V. Quasi-linear differential-difference game of approach. *Understanding Complex Systems.* 2019. P. 505–524. https://doi.org/10.1007/978-3-319-96755-4_26.

25. Baranovska L.V. Pursuit differential-difference games with pure time-lag. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* — B. 2019. Vol. 24, N 3. P. 1021–1031. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2019004.

26. Baranovska L.V. On quasilinear differential-difference games of approach. *J. of Automation and Information Sciences.* 2017. Vol. 49, N 8. P. 53–67. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i8.40.

27. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. Москва: Мир, 1967. 548 с.

28. Хусаинов Д.Я., Диблик Й., Ружичкова М. Линейные динамические системы с последействием. *Представление решений, устойчивость, управление, стабилизация.* Киев: ГП Информ.-аналит. агентство, 2015. 252 с.

29. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.

30. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.

31. Hale J. Theory of functional differential equations. *Applied Mathematical Sciences.* 1977. Vol. 3. New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 1977. 365 p.

32. Khusainov D.Ya., Shuklin G.V. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving. *Stud. Univ. Zilina Math.* Ser. 2003. Vol. 17. P. 101–108.

33. Medved′ M., Pospîŝil M. Sufficient conditions for the asymptotic stability of nonlinear multidelay differential equations with linear parts defined by pairwise permutable matrices. *Nonlinear Anal.* 2012. Vol. 75, Iss. 7. P. 3348–3363.

34. Pospîŝil M. Representation of solutions of systems of linear differential equations with multiple delays and nonpermutable variable coefficients. *Mathematical Modeling and Analysis.* 2020. Vol. 25, Iss. 2. P. 303–322.

35. Pospîŝil M., Jaroŝ F. On the representation of solutions of delayed differential equations via Laplace transform. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations.* 2016. N 117. P. 1–13.

36. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

37. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. Москва: Наука, 2008. 560 с.

38. Чикрий А.А. Гарантированный результат в игровых задачах управления движением. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2010. Т. 16, № 5. С. 223–232.

L.V. Baranovska

DIFFERENTIAL-DIFFERENCE GAMES OF APPROACH WITH MULTIPLE DELAYS

Abstract. Differential-difference games of approach with multiple delays are considered. The schemes of the method of resolving functions and of the first direct Pontryagin’s method are developed. Sufficient conditions for the game completion are obtained. For the first time in these games, new Cauchy formulas convenient for numerical implementation are used for systems with permutation matrices and systems with pure delay.

Keywords: conflict-controlled process, differential games, differential-difference games, resolving function method, Pontryagin’s first direct method.

Надійшла до редакції 22.02.2021