УДК 517.988

О.Ф. КАШПУР
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olena.kashpur@gmail.com.*

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ ЕРМІТА–БІРКГОФА МІНІМАЛЬНОЇ НОРМИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Анотація. Розглянуто інтерполяційну задачу Ерміта–Біркгофа для нелінійного оператора в Гільбертовому просторі. Для поставленої задачі доведено теорему про інтерполяційний поліном мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Ґаусовою мірою. Показано, що цей інтерполянт є єдиним.

Ключові слова: інтерполяційний поліном Ерміта–Біркгофа, диференціал Гато, Гільбертів простір, мінімальна норма.

ВСТУП

У багатьох задачах прикладної математики постає питання про наближення нелінійних операторів. Зауважимо, що широкого практичного застосування набули нелінійні системи поліноміального вигляду [1]. Одним із методів апроксимації нелінійних операторів є інтерполяція. У роботі [2] побудовано загальну теорію інтерполяції операторів — знайдено множини інтерполяційних поліномів Лагранжа, Ерміта та Ерміта–Біркгофа, доведено необхідні та достатні умови їхнього існування. У [3] побудовано інтерполяційний поліном Ерміта мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Ґаусовою мірою [4], та показано, що він має властивість асимптотичного збереження поліномів відповідного степеня у випадку, коли задано значення нелінійного оператора та його перших диференціалів Гато у вузлах. У цій статті знайдено інтерполяційний поліном Ерміта–Біркгофа мінімальної норми. Показано, що поставлена екстремальна задача має єдиний розв'язок.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай X, Y — гільбертові простори (X є сепарабельним), B — кореляційний оператор міри μ на X, $\operatorname{Ker} B = \varnothing$, міра μ має перший момент, що дорівнює нулю, а другий є обмеженим. Оператор $F: X \to Y$ (нелінійний у загальному випадку) заданий своїми значеннями $F(Bx_j)$, $j = \overline{1, m}$, та значеннями диференціалів Гато

$$F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = 0, \tilde{k}_j,\ j = \overline{1, m},$$

$$Bx_j,\ Bv_{ji}^{(i)} \in X, \quad i = 0, \tilde{k}_j,\ j = \overline{1, m}.$$

Запис $i = 0, \tilde{k}_j$ означає, що існують пропуски певних диференціалів Гато.

Розглянемо постановку інтерполяційної задачі Ерміта–Біркгофа: для оператора $F(x)$ потрібно побудувати поліном $p(x)$ степеня n, який відповідає інтерполяційним умовам

$$p^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)} = F^{(i)}(Bx_j)Bv_{ji}^{(i)} \dots Bv_{j1}^{(i)},\ i = \tilde{0}, k_j,\ j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Нехай Π_n — множина неперервних на X операторних поліномів степеня n

$$\Pi_n(x) = \{p_n(x) = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + \dots + L_n x^n\},$$

де $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \ldots x}_{k})$, $L_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ — неперервна симетрична k-лінійна операторна форма.

Введемо на множині Π_n скалярний добуток

$$(p_1, p_2) = \sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X (L_k^{(1)}(v_1, v_2, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \ldots, v_k))_Y \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_1),$$
$$p_1, p_2 \in \Pi_n$$

та норму
$$\| p \| = \left(\sum_{k=0}^{n} \int_X \ldots \int_X \| L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k) \|_Y^2 \mu(dv_k) \ldots \mu(dv_1) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

В останніх формулах $L_k^{(1)}, L_k^{(2)}, L_k$ — симетричні неперевні k-лінійні операторні форми поліномів p_1, p_2, p відповідно, $(\cdot,\cdot)_Y$ — скалярний добуток в Y.

Позначимо

$$\vec{F}_H = \left\{ F^{(i)}(Bx_j) Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)}, \, i = 0, \tilde{k}_j \right\}_{j=1}^{m},$$

$$\vec{q}_H = \left\{ q^{(i)}(Bx_j) Bv_{ji}^{(i)} \ldots Bv_{j1}^{(i)}, \, i = 0, \tilde{k}_j \right\}_{j=1}^{m},$$

$$g(u, v)^B = g(Bu, v) = \sum_{p=0}^{n} (Bu, v)^p, \; Bu, v \in X.$$

Нехай $H = \| H^{ls} \| = \| h_{ij}^{ls} \|_{i=0,\tilde{k}_i, \, j=0,\tilde{k}_s}$ — симетрична матриця, де

$$h_{ij}^{ls} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial \alpha_1 \ldots \partial \alpha_i \partial \beta_1 \ldots \partial \beta_j} g^B \left(x_l + \sum_{p=1}^{i} \alpha_p v_{lp}^{(i)}, \right.$$
$$\left. \left. x_s + \sum_{p=1}^{j} \beta_p v_{sp}^{(j)} \right) \right|_{\alpha_1 = \ldots = \alpha_i = \beta_1 = \ldots = \beta_j = 0},$$

H^+ — псевдообернена матриця Мура–Пенроуза до матриці H [5], Z — матриця, рядками якої є ортонормовані власні вектори матриці H з нульовим власним числом, $A_0 = E - H^+ H$ — ідемпотентна матриця, E — одинична матриця.

У роботі [2] одержано такий результат:

Теорема 1. Для існування розв’язку інтерполяційної задачі (1) у Гільбертовому просторі необхідним та достатнім є виконання умови

$$Z\vec{F}_H = \vec{0}. \tag{2}$$

При цьому формула

$$p(x) = q(x) + \langle \vec{F}_H - \vec{q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle, \; q(x) \in \Pi_n, \tag{3}$$

описує всю множину операторних поліномів Ерміта–Біркгофа n-го степеня, що відповідають інтерполяційним умовам (1). Вектор $\vec{g}_H(x)$ визначається як і $\vec{F}_H$ та $\vec{q}_H$.

У роботі [2] показано, що умова (2) еквівалентна рівності

$$A_0 \vec{F}_H = \vec{0}. \tag{4}$$

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ

Подамо $p(x)$, що визначається формулою (3), у вигляді

$$p(x) = p_0(x) + q_0(x),$$

де

$$p_0(x) = \langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle, \tag{5}$$

$$q_0(x) = q(x) - \langle \vec{q}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle. \tag{6}$$

Сформулюємо та доведемо таку теорему:

Теорема 2. Нехай виконується умова (2). Тоді поліном $p_0(x)$, що визначається формулою (5), є розв'язком екстремальної задачі

$$\| p_0 \| = \inf_{q \in \Pi_n} \| p \| = (<< H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H >>)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

і цей розв'язок єдиний. При цьому p належить множині інтерполяційних поліномів Ерміта–Біркгофа (3), $<< \vec{a}, \vec{b} >> = \sum_{i=1}^{m} (a_i, b_i)_Y$, $a_i, b_i \in Y$, $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Доведення. Не зменшуючи загальності міркувань, розглянемо випадок, коли задано значення оператора $F(Bx_i)$, $i = \overline{1, m}$, та значення його других диференціалів Гато $F(Bx_i) Bv_{i2}^{(2)} Bv_{i1}^{(2)}$, $i = \overline{1, m}$.

Покажемо, що

$$\vec{q}_0 = \left\{ q(Bx_i), \frac{\partial^2}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} q(Bx_i + \gamma_1 Bv_{i1}^{(2)} + \gamma_2 Bv_{i2}^{(2)}) \Big|_{\gamma_1 = \gamma_2 = 0} \right\}_{i=1}^{m} = \vec{0}.$$

Позначимо $\vec{e}_{2k-1}$ вектор, що складається з нулів, а компонента з індексом $2k-1$ дорівнює одиниці.

Маємо

$$q_0(Bx_k) = q(Bx_k) - \langle \vec{q}_H, H^+ \vec{g}_H(Bx_k) \rangle =$$

$$= q(Bx_k) - \langle \vec{q}_H, H^+ H \vec{e}_{2k-1} \rangle = q(Bx_k) - \langle \vec{q}_H, (E - A_0) \vec{e}_{2k-1} \rangle =$$

$$= q(Bx_k) - \langle (E - A_0) \vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1} \rangle = q(Bx_k) - q(Bx_k) + \langle A_0 \vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1} \rangle = 0,$$

оскільки для будь-якого $p \in \Pi_n$ [2]

$$A_0 \vec{p}_H = \vec{0}. \tag{8}$$

Позначимо $\vec{e}_{2k}$ вектор, що складається з нулів, а компонента з індексом $2k$ дорівнює одиниці. Розглянемо значення другого диференціала Гато у вузлі Bx_k за напрямками $Bv_{k2}^{(2)}$, $Bv_{k1}^{(2)}$:

$$q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} = q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} -$$

$$-\left\langle \vec{q}_H, H^+ \frac{\partial^2}{\partial\gamma_1\partial\gamma_2} \vec{g}_H(Bx_k + \gamma_1 Bv_{k1}^{(2)} + \gamma_2 Bv_{k2}^{(2)})\Big|_{\gamma_1=\gamma_2=0} \right\rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \langle \vec{q}_H, H^+ H \vec{e}_{2k} \rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \langle \vec{q}_H, (E - A_0)\vec{e}_{2k} \rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - \langle (E - A_0)\vec{q}_H, \vec{e}_{2k} \rangle =$$

$$= q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} - q''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)} + \langle A_0\vec{q}_H, \vec{e}_{2k-1} \rangle = 0$$

на підставі рівності (8). Отже, $\vec{q}_0 = \vec{0}$.

Розглянемо норму інтерполяційного полінома (3)

$$\| p \|^2 = \| p_0 + q_0 \|^2 = \| p_0 \|^2 + 2(p_0, q_0) + \| q_0 \|^2. \tag{9}$$

Нехай $L_k(x, x, \ldots, x)$ — k-й операторний степінь полінома $q_0(x)$, $\vec{z} = H^+ \vec{F}_H$, $\vec{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{2m})$. Далі будемо використовувати результат з [2]: для p-лінійного оператора $L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p) : X^p \to Y$ справджується рівність

$$\int_X \ldots \int_X \prod_{j=1}^{p} (x_j, v_j)(y, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p))_Y \, \mu(dv_p) \ldots \mu(dv_1) =$$

$$= (y, L_p(Bx_1, Bx_2, \ldots, Bx_p))_Y \quad \forall y \in Y. \tag{10}$$

Покажемо, що $(p_0, q_0) = 0$. Маємо

$$(p_0, q_0) = (\langle \vec{F}_H, H^+ \vec{g}_H(x) \rangle, q_0(x)) =$$

$$= \left(\left\langle \vec{F}_H, H^+ \left\{ g(x_j, x), \ \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} g(x_j + \alpha_1 v_{j1}^{(2)} + \alpha_2 v_{j2}^{(2)}, x)\big|_{\alpha_1=\alpha_2=0} \right\}_{j=1}^{m} \right\rangle, \ q_0 \right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k-1} \sum_{p=0}^{n} (x_k, x)^p, \ q_0(x) \right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k} \sum_{p=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} g(x_k + \alpha_1 v_{k1}^{(2)} + \alpha_2 v_{k2}^{(2)}, x)^p \Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}, \ q_0(x) \right). \tag{11}$$

Розглянемо перший доданок в останній рівності. На підставі (10) отримаємо

$$\left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k-1} \sum_{p=0}^{n} (x_k, x)^p, \ q_0(x) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \sum_{p=0}^{n} \int_X \ldots \int_X \prod_{j=1}^{p} (x_k, v_j)(z_{2k-1}, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_k))_Y \, \mu(dv_p) \ldots \mu(dv_1) =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=0}^{n}(z_{2k-1}, L_p(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bx_k))_Y =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(z_{2k-1}, q_0(Bx_k))_Y = 0\,, \qquad (12)$$

оскільки $q_0(Bx_k)=0,\ k=\overline{1,m}$. Розглянемо другий доданок в (11):

$$\left(\sum_{k=1}^{m} z_{2k}\sum_{p=0}^{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} g(x_k+\alpha_1 v_{k1}^{(2)}+\alpha_2 v_{k2}^{(2)}, x)^p\Big|_{\alpha_1=\alpha_2=0}, q_0(x)\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n} p(p-1)(z_{2k}(x_k, x)^{p-2}(v_{k1}^{(2)}, x)(v_{k2}^{(2)}, x), L_p x^p)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}\frac{p(p-1)}{p!}\int_X\ldots\int_X\left(z_{2k}\frac{\partial^p}{\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_p}(x_k, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i v_i)^{p-2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(v_{k1}^{(2)}, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i v_i\right)\left(v_{k1}^{(1)}, \sum_{i=1}^{p}\alpha_i v_i\right)\Bigg|_{\alpha_1=\ldots=\alpha_p=0}, L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p)\right)_Y\times$$

$$\times\mu(dv_p)\mu(dv_{p-1})\ldots\mu(dv_1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{(p-2)!}\int_X\ldots\int_X\Big(z_{2k}(p-2)![(v_{k1}^{(2)}, v_1)(v_{k2}^{(2)}, v_2)(x_k, v_3)\ldots(x_k, v_p)+$$

$$+(x_k, v_1)(v_{k1}^{(2)}, v_2)(v_{k2}^{(2)}, v_3)(x_k, v_4)\ldots(x_k, v_p)+\ldots+$$

$$+(x_k, v_1)\ldots(x_k, v_{p-2})(v_{k1}^{(2)}, v_{p-1})(v_{k2}^{(2)}, v_p)], L_p(v_1, v_2, \ldots, v_p)\Big)_Y\times$$

$$\times\mu(dv_p)\mu(dv_{p-1})\ldots\mu(dv_1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}(z_{2k}, [L_p(Bv_{k1}^{(2)}, Bv_{k2}^{(2)}, Bx_k, \ldots, Bx_k)+$$

$$+L_p(Bx_k, Bv_{k1}^{(2)}, Bv_{k2}^{(2)}, Bx_k, \ldots, Bx_k)+\ldots+$$

$$+L_p(Bx_k, \ldots, Bx_k, Bv_{k2}^{(2)}, Bv_{k1}^{(2)})])_Y=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\sum_{p=2}^{n}(z_{2k}, L_p''(Bx_k, Bx_k, \ldots, Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)})_Y=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(z_{2k}, q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)})_Y = 0\,, \qquad (13)$$

оскільки $q_0''(Bx_k)Bv_{k2}^{(2)}Bv_{k1}^{(2)}=0,\ k=\overline{1,m}$. На підставі рівностей (11)–(13) одержимо

$$(p_0, q_0)=0\,. \qquad (14)$$

З урахуванням рівностей (9), (14) маємо

$$\|p\|^2=\|p_0+q_0\|^2=\|p_0\|^2+\|q_0\|^2\geq\|p_0\|^2, \qquad (15)$$

а у випадку, коли $q_0 = 0$,

$$\| p\|^2 = \| p_0 + q_0 \|^2 = \| p_0 \|^2 + \| q_0 \|^2 = \| p_0 \|^2 .$$

Отже, $\inf \| p\|$ досягається для $p = p_0$.

Зробимо заміну q_0 на p_0, у формулах (11)–(13), тоді

$$\| p_0 \|^2 = (p_0, p_0) = \langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle.$$

Покажемо, що розв'язок екстремальної задачі (7) є єдиним. Припустимо, що існує поліном $l_0(x)$ із множини інтерполяційних поліномів Ерміта–Біркгофа, який є розв'язком задачі (7), $l_0(x) \neq p_0(x)$, такий, що

$$\| l_0(x) \|^2 = \langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle.$$

На підставі (11)–(13) для $q_0(x) = l_0(x)$, маємо

$$\| l_0 - p_0 \|^2 = \| l_0 \|^2 - 2(l_0, p_0) + \| p_0 \|^2 =$$

$$= \langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle - 2\langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle + \langle\langle H^+ \vec{F}_H, \vec{F}_H \rangle\rangle = 0 ,$$

тобто отримано суперечність. Отже, розв'язок екстремальної задачі є єдиним. Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

Знайдено розв'язок екстремальної задачі (7) та показано, що інтерполяційний поліном Ерміта–Біркгофа (5) мінімальної норми, породженої скалярним добутком із Ґаусовою мірою, є єдиним.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Porter W.A. An overview of polinomic system theory. *Proc. IEEE, Special Issue on System Theory*. 1976. Vol. 64, N 1. P. 18–26.
2. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В., Янович Л.А. Интерполирование операторов. Киев: Наукова думка, 2000. 468 с.
3. Хлобистов В.В., Кашпур О.Ф. Операторний інтерполянт типу Ерміта в гільбертовому просторі, що є асимптотично точним на поліномах. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*. 2005. № 2. С. 316–324.
4. Егоров А.Д., Соболевский П.И., Янович Л.А. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск: Наука и техника, 1985. 310 с.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Физматлит, 2010. 558 с.

O.F. Kashpur

HERMIT–BIRKHOFF INTERPOLATION POLYNOMIAL OF MINIMUM NORM IN HILBERT SPACE

Abstract. The Hermite–Birkhoff interpolation problem for a nonlinear operator in the Hilbert space is considered. For this problem, the theorem on the interpolation polynomial of minimum norm generated by a scalar product with a Gaussian measure is proved. It is shown that such interpolant is unique.

Keywords: Hermit–Birkhoff interpolation polynomial, Gato differential, Hilbert space, minimum norm.

Надійшла до редакції 14.05.2021