СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

УДК 519.21

П.С. КНОПОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *knopov1@yahoo.com*.

Є.Й. КАСІЦЬКА
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *e.kasitskaya@gmail.com*.

ПРО ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ЕМПІРИЧНИХ ОЦІНОК В ЗАДАЧІ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ З ДИСКРЕТНИМ ПАРАМЕТРОМ[1]

Анотація. Розглянуто задачу стохастичної оптимізації, де випадковим чинником є однорідне у вузькому розумінні випадкове поле з дискретним параметром, що задовольняє умову сильного перемішування. Первісна функція критерію замінюється на емпіричну, побудовану за спостереженнями поля. Згідно з результатами з функціонального аналізу та теорії великих відхилень досліджено великі відхилення емпіричних оцінок.

Ключові слова: задача стохастичної оптимізації, однорідне у вузькому розумінні випадкове поле з дискретним параметром, умова сильного перемішування, принцип великих відхилень.

ВСТУП

За необхідності прийняття рішень в умовах невизначеності виникає задача стохастичної оптимізації. Зазвичай мінімізується математичне сподівання деякого показника якості керування, що залежить від випадкового параметра.

У цій роботі використовуються непрямі методи розв'язання задач стохастичного програмування, тобто початкова проблема апроксимується наближеною детермінованою. Найчастіше використовуваним непрямим методом стохастичної оптимізації є метод емпіричних середніх [1–3], де показники якості керування апроксимуються емпіричними оцінками. Виникає проблема оцінювання точності апроксимації та доказу збіжності оцінок, якщо кількість спостережень зростає. У роботі досліджуються спостереження однорідного у вузькому розумінні випадкового поля з дискретним параметром. Використовуються ергодичні теореми для випадкових полів, теореми з функціонального аналізу та теорії великих відхилень.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Припустимо, що $\{\xi(t_1, t_2),\ (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ — однорідне у вузькому розумінні випадкове поле з дискретним параметром, задане на повному ймовірнісному просторі (Ω, G, P), зі значеннями у деякому метричному просторі (Y, ρ).

[1] Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

Розглянемо задачу

$$F(x)=Ef(x,\xi(0,0))\to\min,\ x\in X, \tag{1}$$

де X — непуста компактна підмножина $\mathbb{R}$, $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ — неперервна функція. Апроксимуємо її проблемою

$$F_{T_1T_2}(x)=\frac{1}{T_1T_2}\sum_{t_1=1}^{T_1}\sum_{t_2=1}^{T_2}f(x,\xi(t_1,t_2))\to\min,\ x\in X, \tag{2}$$

де $T_1>0, T_2>0.$

Із властивостей неперервних функцій випливає, що існує хоча б один розв'язок $x(T_1,T_2)$ проблеми (2), який є вимірною функцією ω.

Припустимо, що

$$E\max\{|f(x,\xi(0,0))|,\ x\in X\}<\infty.$$

Тоді функція $F(\cdot)$ неперервна та знайдеться хоча б один розв'язок x_0 проблеми (1). Припустимо, що він єдиний.

Нехай поле $\xi(t_1,t_2)$ задовольняє умову сильного перемішування [4], а саме існує така функція $a(d),\ d\ge 0$; $a(d)\searrow 0,\ d\to\infty$, що для будь-яких $H_1,H_2\subset\mathbb{R}^2$

$$\sup\{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|;\ A\in\sigma(H_1),B\in\sigma(H_2)\}\le a(d(H_1H_2)),$$

де

$$\sigma(H)=\sigma\{\xi(t_1,t_2),(t_1,t_2)\in H\},\ d(H_1,H_2)=$$
$$=\inf\{\|(t_1,t_2)-(s_1,s_2)\|;(t_1,t_2)\in H_1,(s_1,s_2)\in H_2\}.$$

Припустимо також, що $a(d)=O(d^{-2-\varepsilon}),\ d\to\infty$, для деякого $\varepsilon>0$ та для деякого $\delta>8/\varepsilon$

$$E\{|f(x,\xi(0,0))|^{4+\delta}\}<\infty,\ x\in X.$$

Якщо виконано наведені вище умови [4], то з ймовірністю одиниця

$$x(T_1,T_2)\to x_0,\ F_{T_1T_2}(x(T_1,T_2))\to F(x_0);\ T_1,T_2\to\infty.$$

Зауважимо, що в [4] розглядається випадкове поле з неперервним параметром, але для дискретного параметра такі властивості тим більше мають місце.

Розглянемо ймовірність великих відхилень $x(T_1,T_2)$ від x_0 та відхилень $F_{T_1T_2}(x(T_1,T_2))$ від $F(x_0)$.

За будь-якого фіксованого y можна розглядати $f(\cdot,y)$ як елемент простору неперервних функцій $C(X)$. Припустимо, що існує така опукла компактна множина $K\subset C(X)$, що при всіх $y\in Y$ матимемо $f(\cdot,y)-F(\cdot)\in K$. Розглянемо $F_{T_1T_2}-F$ як випадкові елементи на просторі (Ω,G,P) із значеннями в K.

НЕОБХІДНІ РЕЗУЛЬТАТИ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ

Будемо використовувати деякі твердження з функціонального аналізу.

Означення 1 [5]. Нехай $(V,\|\cdot\|)$ — лінійний нормований простір; $B(x,r)$ — замкнена куля в цьому просторі з радіусом r та центром x; $f\colon V\to[-\infty,+\infty]$ — деяка функція; x_f — точка мінімуму цієї функції на V. Покращувальною функцією для f у точці x_f називатимемо монотонно неспадну функцію $\psi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty],\ \psi(0)=0,$ для якої існує таке $r>0$, що для будь-якого $x\in B(x_f,r)$ виконується нерівність $f(x)\ge f(x_f)+\psi(\|x-x_f\|)$.

Нехай $V_0\subset V$. Позначимо $\delta_{V_0}(x)=0,\ x\in V_0;\ \delta_{V_0}(x)=+\infty,\ x\notin V_0$.

Теорема 1 [5]. Нехай $(V,\|\cdot\|)$ — лінійний нормований простір, $V_0\subset V$ замкнуто; $f_0,g_0\colon V\to\mathbb{R}$ — неперервні функції. Припустимо, що

$$\varepsilon=\sup\{|f_0(x)-g_0(x)|,\ x\in V_0\}.$$

Уведемо функції

$$f, g: V \to (-\infty, +\infty];\; f = f_0 + \delta_{V_0},\; g = g_0 + \delta_{V_0}.$$

Тоді

$$|\inf\{f(x), x \in V\} - \inf\{g(x), x \in V\}| \le \varepsilon.$$

Нехай x_f — точка мінімуму f на V; ψ — покращувальна функція для f у точці x_f з коефіцієнтом r. Якщо ε достатньо мале, тобто

$$\psi(\|x - x_f\|) \le 2\varepsilon \Rightarrow \|x - x_f\| \le r,$$

то матимемо

$$\psi(\|x_f - x_g\|) \le 2\varepsilon \quad \forall x_g \in \arg\min\{g(x), x \in B(x_f, r)\}.$$

Для опуклої та строго зростаючої на $[0, r]$ функції ψ отримуємо

$$\psi^{-1}(2\varepsilon) \le r \Rightarrow \|x_f - x_g\| \le \psi^{-1}(2\varepsilon) \quad \forall x_g \in \arg\min\{g(x), x \in B(x_f, r)\}.$$

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ З ТЕОРІЇ ВЕЛИКИХ ВІДХИЛЕНЬ

Будемо застосовувати твердження з теорії великих відхилень.

Теорема 2 [6, с. 53]. Нехай $\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, — сукупність ймовірнісних мір на H — замкненій опуклій підмножині сепарабельного Банахового простору J. Припустимо, що для будь-якого $\lambda \in J^*$ — спряженому до J простору існує

$$\Lambda(\lambda) \equiv \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Lambda_{\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}\right) \in [-\infty, +\infty],$$

де $\Lambda_\mu(\lambda) = \ln \int_J \exp\{\langle \lambda, x \rangle\} \mu(dx)$, $\langle \lambda, x \rangle$ — співвідношення дуальності. Позначимо

$$\Lambda^*(q) = \sup\{\langle \lambda, q \rangle - \Lambda(\lambda),\ \lambda \in J^*\},\ q \in H.$$

Тоді Λ^* — невід'ємна, опукла, напівнеперервна знизу та для будь-якої компактної множини $A \subset H$

$$\limsup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ln(\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)(A)) \le -\inf\{\Lambda^*(q), q \in A\}.$$

Зауважимо, що теорему 2 сформульовано у [6] для випадку, коли сукупність ймовірнісних мір залежить від одного параметра, але доведення в [6] справджується і для двох параметрів.

Означення 2 [6]. Нехай Σ — сепарабельний Банахів простір, $\{\zeta(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2\}$ — однорідне у вузькому розумінні випадкове поле на просторі (Ω, G, P) зі значеннями в Σ. Для $\tau > 0$ випадкові величини $\eta_1, \ldots, \eta_p$, $p \ge 2$, називають τ-вимірно відділеними, якщо η_j є $\sigma\{\zeta(t_1, t_2), (t_1, t_2) \in H_j\}$-вимірною для всіх $j \in \{1, \ldots, p\}$, де $d(H_i, H_j) \ge \tau$, $i \ne j$; H_j, $j = 1, \ldots, p$, — Борелеві множини в $\mathbb{R}^2$; $d(\cdot, \cdot)$ — відстань між множинами.

Означення 3 [6]. Випадкове поле з означення 2 задовольняє першу гіпотезу гіперперемішування, якщо існують $\tau_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ та незростальна функція $\alpha: \{\tau > \tau_0\} \to [1, +\infty)$ такі, що

$$\lim_{\tau \to \infty} \alpha(\tau) = 1;\ \|\eta_1 \ldots \eta_p\|_{L^1} \le \prod_{j=1}^{p} \|\eta_j\|_{L^{\alpha(\tau)}}$$

для всіх $p \ge 2, \tau > \tau_0$; $\eta_1, \ldots, \eta_p$ τ-вимірно відділених, де

$$\|\eta\|_{L^r} = (E\{|\eta|^r\})^{1/r}.$$

Припустимо, що $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$. Як відомо [7], $(C(X))^* = M(X)$ — сукупність обмежених знакових мір на X, а також

$$\langle g, Q \rangle = \int_X g(x) Q(dx);\ g \in C(X), Q \in M(X).$$

Має місце таке твердження.

Теорема 3. Нехай $\zeta(t_1, t_2)$, $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$, — однорідне у вузькому розумінні випадкове поле з дискретним параметром, що задовольняє першу гіпотезу гіперперемішування на просторі (Ω, G, P), зі значеннями у компактній опуклій множині $K \subset C(X)$. Тоді для всіх $Q \in M(X)$ існує скінченна границя

$$\Lambda(Q) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln \left(E \exp \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \int_X \zeta(t_1, t_2)(x) Q(dx) \right)$$

та для будь-якого замкненого $A \subset K$

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P \left\{ \frac{1}{T_1 T_2} \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \zeta(t_1, t_2) \in A \right\} \le -\inf \{\Lambda^*(g), g \in A\},$$

де $\Lambda^*(g) = \sup \left\{ \int_X g(x) Q(dx) - \Lambda(Q),\ Q \in M(X) \right\}$ — невід'ємна опукла напівнеперервна знизу функція.

Доведення. Зафіксуємо $Q \in M(X)$. Нехай τ_0 — константа з умови гіперперемішування. Припустимо, що $\tau > \tau_0; S_i > \tau, S_i < T_i, i = 1, 2$. Матимемо $T_i = N_{T_i} S_i + r_{T_i}$, $N_{T_i} \in \mathbb{N}$, $r_{T_i} < S_i$, $i = 1, 2$.

Позначимо

$$f_{T_1 T_2} = \ln \left(E \exp \left\{ \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \int_X \zeta(t_1, t_2)(x) Q(dx) \right\} \right),$$

$$c = \max \{\| g \|, g \in K\}, \| g \| = \max \{| g(x) |, x \in X\}, g \in C(X). \quad (3)$$

Уведемо позначення [7]

$$\upsilon(Q, X) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{k} | Q(H_i) |, H_i \cap H_j = \varnothing,\ i \ne j, H_i \in B(X), k \in N \right\} < \infty, Q \in M(X).$$

Матимемо

$$[0, T_1] \times [0, T_2] = \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1] \times [j_2 S_2, (j_2+1) S_2]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1] \times [N_{T_2} S_2, T_2]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[N_{T_1} S_1, T_1] \times [j_2 S_2, (j_2+1) S_2]\} \cup [N_{T_1} S_1, T_1] \times [N_{T_2} S_2, T_2] =$$

$$= \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1 - \tau] \times [j_2 S_2, (j_2+1) S_2 - \tau]\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1} \bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1} \{[j_1 S_1, (j_1+1) S_1 - \tau] \times [(j_2+1) S_2 - \tau, (j_2+1) S_2]\} \cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau]\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2]\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\{[j_1S_1,(j_1+1)S_1-\tau]\times[N_{T_2}S_2,T_2]\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\{[(j_1+1)S_1-\tau,(j_1+1)S_1]\times[N_{T_2}S_2,T_2]\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\{[N_{T_1}S_1,T_1]\times[j_2S_2,(j_2+1)S_2-\tau]\}\cup$$

$$\cup\bigcup_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\{[N_{T_1}S_1,T_1]\times[(j_2+1)S_2-\tau,(j_2+1)S_2]\}\cup[N_{T_1}S_1,T_1]\times[N_{T_2}S_2,T_2].$$

Отже,

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\int_X\left[\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)+\right.\right.\right.$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$+\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)+\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$+\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\zeta(t_1,t_2)(x)+$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\zeta(t_1,t_2)(x)\right]Q(dx)\right\}\right). \tag{4}$$

Мають місце такі оцінки:

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\int_X\zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le c\tau^2v(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\int_X\zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le cr_{T_2}\tau v(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\ \sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\ \sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le cr_{T_1}\tau\upsilon(Q,X)N_{T_2};$$

$$\sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\ \sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le cr_{T_1}r_{T_2}\upsilon(Q,X);$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\ \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\ \sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\ \sum_{t_2=(j_2+1)S_2-\tau+1}^{(j_2+1)S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le c\tau(S_1-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\ \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\ \sum_{t_1=(j_1+1)S_1-\tau+1}^{(j_1+1)S_1}\ \sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le c\tau(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2};$$

$$\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\ \sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\ \sum_{t_2=N_{T_2}S_2+1}^{T_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le c(S_1-\tau)r_{T_2}\upsilon(Q,X)N_{T_1};$$

$$\sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\ \sum_{t_1=N_{T_1}S_1+1}^{T_1}\ \sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\le cr_{T_1}(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_2}.$$

Позначимо

$$A_1=\sum_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\ \sum_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\ \sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\ \sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx).$$

Аналогічно вводимо позначення для інших доданків під знаком експоненти у формулі (4). Отримуємо

$$f_{T_1T_2}=\ln\left(E\exp\left\{\sum_{i=1}^{9}A_i\right\}\right)=\ln\left(E\prod_{i=1}^{9}\exp A_i\right)\le$$

$$\le\ln(\exp\{c\tau(S_1-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\exp\{c\tau(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\times$$
$$\times\exp\{c\tau^2\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}\}\exp\{c(S_1-\tau)r_{T_2}\upsilon(Q,X)N_{T_1}\}\times$$
$$\times\exp\{c\tau r_{T_2}\upsilon(Q,X)N_{T_1}\}\exp\{cr_{T_1}(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_2}\}\exp\{c\tau r_{T_1}\upsilon(Q,X)N_{T_2}\}\times$$
$$\times\exp\{cr_{T_1}r_{T_2}\upsilon(Q,X)\}E\exp A_1)=$$
$$=c\tau(S_1-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+c\tau^2\upsilon(Q,X)N_{T_1}N_{T_2}+$$
$$+c(S_1-\tau)r_{T_2}\upsilon(Q,X)N_{T_1}+c\tau r_{T_2}\upsilon(Q,X)N_{T_1}+cr_{T_1}(S_2-\tau)\upsilon(Q,X)N_{T_2}+$$
$$+cr_{T_1}\tau\upsilon(Q,X)N_{T_2}+cr_{T_1}r_{T_2}\upsilon(Q,X)+\ln(E\exp A_1).$$

Матимемо

$$\exp A_1=\prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\ \prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\exp\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\ \sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx).$$

Враховуючи першу гіпотезу гіперперемішування, матимемо

$$E\exp A_1 \le$$

$$\le \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left(E\left\{\left[\exp\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\right]^{\alpha(\tau)}\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}} =$$

$$= \prod_{j_1=0}^{N_{T_1}-1}\prod_{j_2=0}^{N_{T_2}-1}\left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\sum_{t_1=j_1S_1+1}^{(j_1+1)S_1-\tau}\sum_{t_2=j_2S_2+1}^{(j_2+1)S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha(\tau)}} =$$

$$= \left(E\left\{\exp\left[\alpha(\tau)\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\right]\right\}\right)^{\frac{N_{T_1}N_{T_2}}{\alpha(\tau)}}.$$

Далі матимемо

$$\alpha(\tau)\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) = (\alpha(\tau)-1)\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) +$$

$$+\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) \le (\alpha(\tau)-1)\,c\,(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X) +$$

$$+\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx).$$

Має місце оцінка

$$\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) =$$

$$= \sum_{t_1=1}^{S_1}\sum_{t_2=1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) - \sum_{t_1=S_1-\tau+1}^{S_1}\sum_{t_2=1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) -$$

$$-\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=S_2-\tau+1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) \le \sum_{t_1=1}^{S_1}\sum_{t_2=1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) +$$

$$+c\tau S_2 v(Q,X) + c(S_1-\tau)\tau v(Q,X).$$

Отримуємо нерівність

$$\alpha(\tau)\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) \le \sum_{t_1=1}^{S_1}\sum_{t_2=1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx) +$$

$$+c\tau S_2 v(Q,X) + c(S_1-\tau)\tau v(Q,X) + (\alpha(\tau)-1)c(S_1-\tau)(S_2-\tau)v(Q,X).$$

Тоді

$$\exp\left[\alpha(\tau)\sum_{t_1=1}^{S_1-\tau}\sum_{t_2=1}^{S_2-\tau}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\right] \le \exp\left[\sum_{t_1=1}^{S_1}\sum_{t_2=1}^{S_2}\int_X \zeta(t_1,t_2)(x)Q(dx)\right]\times$$

$$\times \exp[c\tau S_2 \upsilon(Q, X)] \exp[c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X)] \times$$
$$\times \exp[(\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X)] .$$

Матимемо

$$\ln(E \exp A_1) \le \ln \left\{ \left(E \left\{ \exp \left[\alpha(\tau) \sum_{t_1=1}^{S_1-\tau} \sum_{t_2=1}^{S_2-\tau} \int_X \zeta(t_1, t_2)(x) Q(dx) \right] \right\} \right)^{\frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)}} \right\} =$$

$$= \frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)} \ln \left(E \left\{ \exp \left[\alpha(\tau) \sum_{t_1=1}^{S_1-\tau} \sum_{t_2=1}^{S_2-\tau} \int_X \zeta(t_1, t_2)(x) Q(dx) \right] \right\} \right) \le$$

$$\le \frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)} \ln \Bigg(\exp[c\tau S_2 \upsilon(Q, X)] \exp[c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X)] \times$$

$$\times \exp[(\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X)] \times$$

$$\times E \exp \left[\sum_{t_1=1}^{S_1} \sum_{t_2=1}^{S_2} \int_X \zeta(t_1, t_2)(x) Q(dx) \right] \Bigg) =$$

$$= \frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)} (c\tau S_2 \upsilon(Q, X) + c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X) +$$

$$+ (\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X) + f_{S_1 S_2}) .$$

Отримуємо

$$f_{T_1 T_2} \le$$

$$\le c\tau(S_1 - \tau) \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2} + c\tau(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2} + c\tau^2 \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2} +$$

$$+ c(S_1 - \tau) r_{T_2} \upsilon(Q, X) N_{T_1} + c\tau r_{T_2} \upsilon(Q, X) N_{T_1} + c r_{T_1} (S_2 - \tau) \upsilon(Q, X) N_{T_2} +$$

$$+ c r_{T_1} \tau \upsilon(Q, X) N_{T_2} + c r_{T_1} r_{T_2} \upsilon(Q, X) + \frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau)} (c\tau S_2 \upsilon(Q, X) +$$

$$+ c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X) + (\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X) + f_{S_1 S_2}) .$$

Тоді

$$\frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} \le \frac{c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2}}{N_{T_1} S_1 N_{T_2} S_2} + \frac{c(S_2 - \tau)\tau \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2}}{N_{T_1} S_1 N_{T_2} S_2} +$$

$$+ \frac{c\tau^2 \upsilon(Q, X) N_{T_1} N_{T_2}}{N_{T_1} S_1 N_{T_2} S_2} + \frac{c(S_1 - \tau) r_{T_2} \upsilon(Q, X) N_{T_1}}{N_{T_1} S_1 T_2} + \frac{c\tau r_{T_2} \upsilon(Q, X) N_{T_1}}{N_{T_1} S_1 T_2} +$$

$$+ \frac{c(S_2 - \tau) r_{T_1} \upsilon(Q, X) N_{T_2}}{N_{T_2} S_2 T_1} + \frac{c\tau r_{T_1} \upsilon(Q, X) N_{T_2}}{N_{T_2} S_2 T_1} + \frac{c r_{T_1} r_{T_2} \upsilon(Q, X)}{T_2 T_1} +$$

$$+ \frac{N_{T_1} N_{T_2}}{\alpha(\tau) N_{T_1} S_1 N_{T_2} S_2} (c\tau S_2 \upsilon(Q, X) +$$

$$+ c(S_1 - \tau)\tau \upsilon(Q, X) + (\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) \upsilon(Q, X) + f_{S_1 S_2}) =$$

$$= \frac{c(S_1 - \tau)\tau v(Q, X)}{S_1 S_2} + \frac{c(S_2 - \tau)\tau v(Q, X)}{S_1 S_2} + \frac{c\tau^2 v(Q, X)}{S_1 S_2} +$$

$$+ \frac{c(S_1 - \tau) r_{T_2} v(Q, X)}{S_1 T_2} + \frac{c\tau r_{T_2} v(Q, X)}{S_1 T_2} + \frac{c(S_2 - \tau) r_{T_1} v(Q, X)}{S_2 T_1} +$$

$$+ \frac{c\tau r_{T_1} v(Q, X)}{S_2 T_1} + \frac{c r_{T_1} r_{T_2} v(Q, X)}{T_2 T_1} + \frac{1}{\alpha(\tau) S_1 S_2} (c\tau S_2 v(Q, X) +$$

$$+ c(S_1 - \tau)\tau v(Q, X) + (\alpha(\tau) - 1) c (S_1 - \tau)(S_2 - \tau) v(Q, X) + f_{S_1 S_2}).$$

Наближуючи T_1, T_2 до нескінченності, отримуємо

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} \le \frac{c(S_1 - \tau)\tau v(Q, X)}{S_1 S_2} + \frac{c(S_2 - \tau)\tau v(Q, X)}{S_1 S_2} + \frac{c\tau^2 v(Q, X)}{S_1 S_2} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha(\tau) S_1 S_2} (c\tau S_2 v(Q, X) +$$

$$+ c(S_1 - \tau)\tau v(Q, X) + (\alpha(\tau) - 1) c(S_1 - \tau)(S_2 - \tau) v(Q, X) + f_{S_1 S_2}).$$

За умови $S_1, S_2 \to \infty$ матимемо

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} \le \frac{c(\alpha(\tau) - 1) v(Q, X)}{\alpha(\tau)} + \frac{1}{\alpha(\tau)} \liminf_{S_1, S_2 \to \infty} \frac{f_{S_1 S_2}}{S_1 S_2}.$$

Наближуючи τ до нескінченності, матимемо

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} \le \liminf_{S_1, S_2 \to \infty} \frac{f_{S_1 S_2}}{S_1 S_2}.$$

Тоді існує

$$\Lambda(Q) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} \in [-\infty, +\infty].$$

Функція під знаком границі обмежена, тому границя є скінченною.

Застосуємо теорему 2. Маємо

$$H = K,\ J = C(X),\ J^* = M(X), \langle Q, g \rangle = \int_X g(x) Q(dx),\ \varepsilon_1 = \frac{1}{T_1},\ \varepsilon_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Зазначимо, що $\mu\left(\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2}\right)$ є ймовірнісною мірою на $C(X)$, що задається розподілом

$$\frac{1}{T_1 T_2} \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \zeta(t_1, t_2).$$

Тоді

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Lambda_{\mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \left(\frac{Q}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \right) =$$

$$= \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln \left(\int_K \exp \left\{ \int_X g(x) T_1 T_2 Q(dx) \right\} \mu \left(\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T_2} \right) (dg) \right) =$$

$$= \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln \left(E \exp \left\{ \int_X \left(\frac{1}{T_1 T_2} \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \zeta(t_1, t_2) \right)(x) T_1 T_2 Q(dx) \right\} \right) =$$

$$= \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{f_{T_1 T_2}}{T_1 T_2} = \Lambda(Q).$$

Теорему доведено.

Повернімось до задач (1), (2).

Теорема 4. Нехай $\xi(t_1, t_2)$ задовольняє першу гіпотезу гіперперемішування. Тоді за будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P\{\| F_{T_1 T_2} - F \| \geq \varepsilon\} \leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\},$$

де $I(z) = \Lambda^*(z) = \sup\left\{ \int_X z(x) Q(dx) - \Lambda(Q), Q \in M(X) \right\}$ — невід'ємна напівнеперервна знизу опукла функція,

$$\Lambda(Q) = \lim_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln\left(E \exp\left\{ \sum_{t_1=1}^{T_1} \sum_{t_2=1}^{T_2} \int_X [f(x, \xi(t_1, t_2)) - F(x)] Q(dx) \right\} \right),$$

$$A_\varepsilon = \{z \in K \colon \| z \| \geq \varepsilon\}.$$

Доведення. Як відомо, A_ε — замкнена підмножина K. Поле

$$\zeta(t_1, t_2) = f(\cdot, \xi(t_1, t_2)) - F(\cdot),$$

що приймає значення в K, є неперервною функцією від $\xi(t_1, t_2)$, тому задовольняє умови теореми 3. Отже, ця теорема випливає з теореми 3.

Теорема 5. Нехай виконано умови теореми 4. Тоді

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P\{|\min\{F(x), x \in X\} - \min\{F_{T_1 T_2}(x), x \in X\}| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\}, \tag{5}$$

де $I(\cdot)$ та A_ε визначені у теоремі 4.

Припустимо, що існує покращувальна функція ψ для F у точці x_0 з деякою сталою r. Нехай $x(T_1, T_2)$ — точка мінімуму (2) на множині $B(x_0, r)$. Якщо ε достатньо мале, щоб виконувалась умова

$$\psi(|x - x_0|) \leq 2\varepsilon \Rightarrow |x - x_0| \leq r,$$

то матимемо

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P\{\psi(|x(T_1, T_2) - x_0|) \geq 2\varepsilon\} \leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\}. \tag{6}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1 для всіх ω

$$|\min\{F(x), x \in X\} - \min\{F_{T_1 T_2}(x), x \in X\}| \leq \| F_{T_1 T_2} - F \|.$$

Тоді з теореми 4 випливає (5).

За теоремою 1 для всіх ω

$$\psi(|x_0 - x(T_1, T_2)|) \leq 2 \| F_{T_1 T_2} - F \|$$

та з теореми 4 випливає (6).

Зауваження. Якщо крім умов теореми 5 ψ опукла та строго зростає на $[0, r]$, то

$$\limsup_{T_1, T_2 \to \infty} \frac{1}{T_1 T_2} \ln P\{|x(T_1, T_2) - x_0| \geq \psi^{-1}(2\varepsilon)\} \leq -\inf\{I(z), z \in A_\varepsilon\}. \tag{7}$$

Доведення. За теоремою 1 для всіх ω

$$|x_0 - x(T_1, T_2)| \le \psi^{-1}(2\| F_{T_1T_2} - F \|) .$$

Тоді

$$P\{|x(T_1, T_2) - x_0| \ge \psi^{-1}(2\varepsilon)\} \le P\{\psi^{-1}(2\| F_{T_1T_2} - F \|) \ge \psi^{-1}(2\varepsilon)\} =$$
$$= P\{\| F_{T_1T_2} - F \| \ge \varepsilon\}$$

та справедливість (7) випливає з теореми 4.

ВИСНОВКИ

Отримані результати можна використовувати для розв'язання різних задач стохастичної оптимізації в теорії розпізнавання, регресійному аналізі, де виникає необхідність знаходження оптимальних рішень за спостереженнями однорідного випадкового поля з дискретним параметром.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ermoliev Yu.M., Knopov P.S. Method of empirical means in stochastic programming problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2006. Vol. 42, N 6. P. 773–785.
2. Knopov P.S. Asymptotic properties of some classes of *m*-estimates. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. Vol. 33, N 4. P. 468–481.
3. Knopov P.S., Kasitskaya E.I. On large deviations of empirical estimates in a stochastic programming problem with time-dependent observations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2010. Vol. 46, N 5. P. 724–728.
4. Касицкая Е.И. Аппроксимация решения задачи стохастического программирования с помехой, являющейся однородным случайным полем. *Мат. методы принятия решений в условиях неопределенности.* Сб. научн. трудов. Киев. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины. 1990. С. 23–27.
5. Kaniovski Yu.M., King A.J., Wets R.J-B. Probabilistic bounds (via large deviations) for the solutions of stochastic programming problems. *Ann. Oper. Res.* 1995. Vol. 56. P. 189–208.
6. Deuschel J.-D., Stroock D.W. Large deviations. Boston: Academic Press, Inc., 1989. 310 p.
7. Dunford N., Schwartz J. Linear operators. P. I: General theory. New York: Interscience, 1957. 896 p.

P.S. Knopov, E.J. Kasitskaya

ON LARGE DEVIATIONS OF EMPIRICAL ESTIMATES IN A STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEM FOR A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD WITH A DISCRETE PARAMETER

Abstract. The authors consider a stochastic optimization problem where a random factor is a homogeneous, in a strict sense, random field with a discrete parameter satisfying a strong mixing condition. The first criterion function is approximated by empirical one constructed on observations of the field. Large deviations of the empirical estimates are analyzed using the results from functional analysis and large deviations theory.

Keywords: stochastic optimization problem, a homogeneous in a strict sense random field with a discrete parameter, strong mixing condition, large deviations principle.

Надійшла до редакції 05.04.2021