

**А.Я. БОМБА**Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна, e-mail: [abomba@ukr.net](mailto:abomba@ukr.net).**М.В. БОЙЧУРА**Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне, Україна, e-mail: [m.v.boichura@nuwm.edu.ua](mailto:m.v.boichura@nuwm.edu.ua).**ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТРУКТУРИ ГРУНТОВИХ МАСИВІВ ЧИСЛОВИМИ МЕТОДАМИ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

**Анотація.** Методику ідентифікації параметрів структури невеликих за розміром об'єктів, в якій взято до уваги наявність на межі області (для кожної із відповідних інжекцій) лише екіпотенціальних ліній (із заданими на них значеннями сили струму або функції течії) та ліній течії (з відомими розподілами потенціалу на них), адаптовано на випадки реконструкції зображень великих ґрунтових масивів. Суттєвою перевагою розробленого алгоритму над відомими є уникнення «традиційної» процедури штучного «урізання» нескінченної області за рахунок звуження локалізації сингулярності в окіл певної точки. Проведено числові експерименти та порівняння їхніх результатів з відомими розв'язками.

**Ключові слова:** електрична томографія, квазіконформні відображення, ідентифікація, обернені задачі, числові методи.

**ВСТУП**

Одним із найпоширеніших інструментів ідентифікації структури ґрунтових масивів є метод електричної томографії [1, 2]. Його застосовують для побудови (реконструкції) зображення розподілу коефіцієнта провідності (КП) для заданих (відомих) замірів напруги та сили струму, отриманих у результаті низки прикладань потенціалів. Відповідна задача є нелінійною і некоректною, її розв'язання зазвичай здійснюється за крайових умов, заданих лише для поверхні досліджуваного середовища, а збір даних такого роду та проведення розрахунків на їхній основі потребує досить великого обсягу зусиль та часу. З огляду на це, дослідники у галузі електричної томографії зазвичай характеризують ґрунтові масиви нескінченними ділянками площини [1–4], зокрема, нижньою півплощиною площини  $\tilde{z}$  (рис. 1, *a*), де вісь  $O\tilde{x}$  — горизонт. Це стало певним компромісом між якістю (порівняно з одновимірним випадком) та швидкістю розрахунків (тривимірні дослідження часто потребують несумірних витрат часу) [1]. Суттєвим недоліком відповідних («традиційних») постановок задач є практична складність задання будь-яких умов (зокрема, крайових) нижче горизонту.

З іншого боку, досліджувати лише скінченні фрагменти у ґрунтових товщах також не завжди доцільно, адже тільки в окремих випадках вдається сформувати вихідні дані у граничних точках відповідних областей. Як варіант часткового розв'язання цієї проблеми, півплощину ділять деякою лінією  $\tilde{\Gamma}$  (на рис. 1, *a* її зображено штрихами) на дві підобласті:  $G_{\tilde{z}}^*$  (скінченну) та  $G_{\tilde{z}}^\infty$  (окіл нескінченності):  $G_{\tilde{z}} = G_{\tilde{z}}^* \cup G_{\tilde{z}}^\infty \cup \tilde{\Gamma}$ .

Здебільшого на практиці криву  $\tilde{\Gamma}$  (її часто називають лінією чутливості [1]), що відокремлює «недоступні» нескінченні території (глиби) від доступних для досліджень, встановлюють з певних апріорних міркувань. Найчастіше це здійснюють надто наближено, прирівнюючи до деякого сталого числа так звану функцію чутливості (наприклад, у роботі [1] вона задається похідною Фреше,

і характеризує залежність розподілу поверхневих потенціалів від можливої зміни значень КП у кожній точці області).

«Незадання» умов, зокрема, на ділянці  $\tilde{\Gamma}$  призводить, взагалі кажучи, до некоректності (у класичному розумінні) постановки відповідної задачі реконструкції зображення, адже єдиність її розв'язку забезпечується за умови використання нескінченної кількості пов'язаних між собою умов типу Діріхле та Неймана (див., напр., [5]). Природно, що деяку «спільну частину» навіть усієї множини цих розв'язків можна вважати наближеним розв'язком відповідної технічної проблеми. Хоча під час оцінювання отримуваних результатів варто брати до уваги і «традиційне» спрощення щодо «точковості» зони контакту електрода та досліджуваного об'єкта (див., напр., [1, 5]), і загальноприйняте використання скінченної кількості крайових умов [1, 3, 6, 7]. Незважаючи на це, низка досліджень (див., напр., [1–4, 6–8]) підтверджує, що всі отримувані розв'язки суттєво відрізняються між собою лише в певних околах (хоч і досить великих) нескінченності, даючи непогані наближення на приповерхневих шарах ґрунту (що є об'єктом дослідження).

На сьогодні є низка програмних комплексів для розв'язування задач електричної томографії [1]. Численні компанії виробляють досить якісне відповідне обладнання, тоді як «стратегії» його застосування (збору даних) продовжують розвиватись [1–4, 7]. Одночасно розробляють нові та модифікують наявні методи моделювання руху зарядів [1, 2, 9] та ідентифікації КП [1, 8, 10, 11] для забезпечення кращого врахування, насамперед, крайових умов відповідної задачі. Зокрема, потребує вдосконалення математичний апарат [1, 4]. Тому, з огляду на сучасний стан розвитку цієї галузі [1], електричній томографії часто важко конкурувати з іншими геологічними методами реконструкції зображення ґрунтових масивів. Проте, зважаючи на порівняно малу ефективність, наприклад, сейсмічної розвідки у випадку наявності валунів, порожнин тощо та радіолокаційних досліджень під час реконструкції зображень глинистих середовищ, на практиці у разі потреби користуються кількома геологічними методами одночасно [1, 6].

До того ж, навіть за умови якісної реконструкції зображення методами електричної томографії отримувані результати зазвичай важко трактувати [1] через взаємну близькість значень КП окремих складових ґрунту. У цьому випадку корисну інформацію можна отримати шляхом одночасного проведення додаткових досліджень. Тут можуть стати у пригоді результати моделювання та ідентифікації параметрів, що враховують концентрацію речовини у процесі фільтрації (зокрема, за умов релаксації) [12–15]. В окремих випадках доцільним є проведення відповідних досліджень на нанопористому рівні [16], з врахуванням теплових потоків [17] тощо.

Метою цієї роботи є поширення запропонованої у [10, 11] методології прикладених квазіпотенціалів на випадки великих ґрунтових масивів з уникненням «традиційної» процедури штучного «урізання» нескінченної області.

#### ІДЕЇ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ

Для часткового розв'язання проблеми «недостачі інформації» у цій роботі запропоновано нескінченну частину площини, зокрема півплощину (рис 1, *a*), перевести в однозв'язну скінченну область (зосібна, в коло, рис. 1, *b*), використовуючи дробово-раціональну функцію. Водночас «недоступна» ділянка  $G_z^\infty$  перейде у відповідний «доступний» окіл деякої скінченної точки. Це конформне відображення півплощини на круг здійснюємо за допомогою функції  $z = \frac{\tilde{z} + ik}{\tilde{z} - ik}$

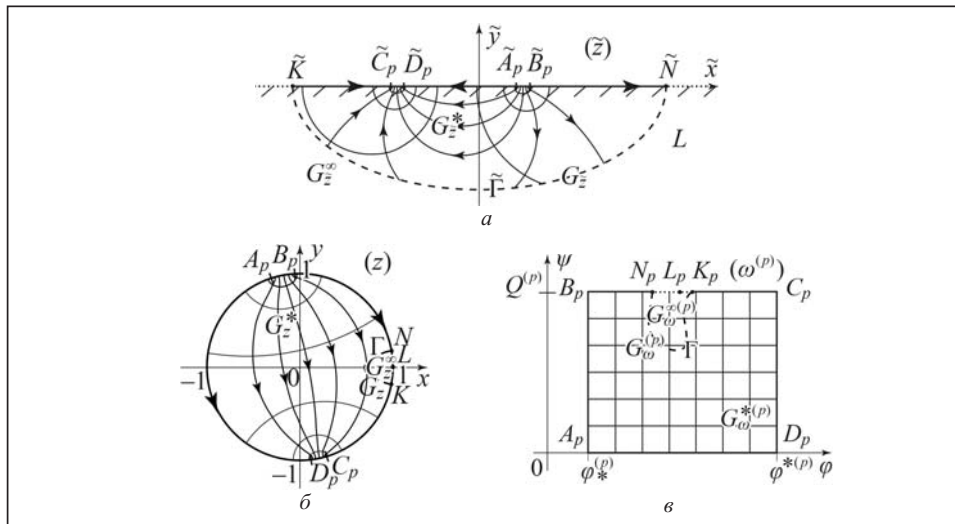


Рис. 1. Схематичне зображення «нескінченної» фізичної області (а), її відповідного скінченного аналога (б) та областей комплексного квазіпотенціалу (в)

$$(x = \tilde{g}_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - \kappa^2}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2}, y = \tilde{g}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{2\kappa\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + (\tilde{y} - \kappa)^2}, z = x + iy, \tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y},$$

$\kappa = \text{const}$ ; при цьому,  $\infty \leftrightarrow 1 + i0$ ). Відповідне обернене відображення має вигляд

$$\tilde{z} = ik \frac{z+1}{z-1}, \left( \tilde{x} = g_1(x, y) = \frac{2\kappa y}{(x-1)^2 + y^2}, \tilde{y} = g_2(x, y) = \kappa \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} \right). \quad (1)$$

Замість «традиційної точковості» ділянок контакту електродів з ґрунтом далі вважатимемо, що в кожному окремому випадку прикладання межа досліджуваної області складається лише з еквіпотенціальних ліній  $\tilde{A}\tilde{B}$ ,  $\tilde{C}\tilde{D}$  (із заданими на них значеннями сили струму або функції течії) та ліній течії  $\tilde{A}\tilde{D}$ ,  $\tilde{B}\tilde{C}$  (з відомими розподілами потенціалу на  $\partial G_{\tilde{z}}^* \setminus \tilde{\Gamma}$ ) [4] (див. рис. 1). Також, замість теоретично нескінченної кількості ситуаційних випадків прикладання квазіпотенціалів, проведемо скінченну  $\tilde{p}$  кількість інжекцій ( $p$  — номер поточної інжекції;  $p = \overline{1, \tilde{p}}$ ). Для заданого  $p$ , аналогічно до [4, 10, 11], межу цієї області, кутові та біжучі точки позначимо відповідно  $\partial G_{\tilde{z}}^{(p)}$  ( $\partial G_z^{(p)}$ ),  $\tilde{A}_p, \tilde{B}_p, \tilde{C}_p, \tilde{D}_p$  ( $A_p, B_p, C_p, D_p$ ),  $\tilde{z}^{(p)} = \tilde{x}^{(p)} + i\tilde{y}^{(p)}$ ,  $z^{(p)} = x^{(p)} + iy^{(p)}$ .

Не зменшуючи загальності міркувань, далі застосуємо так звану полярну схему фіксації ділянок прикладання квазіпотенціалів [5] щодо області, зображеної на рис. 1, б. З практичного погляду тут важливим є те, щоб ці ділянки були задані відносно поверхні ґрунтового масиву (а не круга). Водночас вважатимемо, що розміри всіх електродів є однаковими за шириною  $d_e$  контакту з ґрунтом. Це має особливо велике значення у разі використання мобільних установок (схем для отримання замірів) [1]. У цьому випадку ділянки прикладання квазіпотенціалів формуватимемо в такий спосіб. На колі (див. рис. 1, б) вибираємо точки  $(x_c^{(p)}, y_c^{(p)}) = (\cos \tau_c^{(p)}, \sin \tau_c^{(p)})$  ( $p = \overline{1, \tilde{p}/2}$ ),  $(x_c^{(p)}, y_c^{(p)}) = (x_c^{(\tilde{p}-p+1)}, -y_c^{(\tilde{p}-p+1)})$  ( $p = \overline{\tilde{p}/2+1, \tilde{p}}$ ), де  $\tau_c^{(1)} = \pi / \tilde{p}$ ,  $\tau_c^{(p)} = 0.5\tau_c^{(p-1)}\pi / \tilde{p}$  ( $p = \overline{2, \tilde{p}/2}$ ),  $\tilde{p}$  — парне. Обчислюємо

відповідні абсциси  $\tilde{x}_c^{(p)} = \kappa \sqrt{(1+x_c^{(p)})/(1-x_c^{(p)})}$  ( $p=1, \overline{\tilde{p}/2}$ ),  $\tilde{x}_c^{(p)} = -\tilde{x}_c^{(\tilde{p}-p+1)}$  ( $p = \overline{\tilde{p}/2+1, \tilde{p}}$ ) вздовж граничної лінії  $\tilde{y} = \tilde{y}_c^{(p)} = 0$  ( $p=1, \overline{\tilde{p}}$ ) півплощини  $\text{Im } \tilde{z} < 0$  (див. рис. 1, а) та задаємо координати «крайніх точок»  $\tilde{A}_p = (\tilde{x}_c^{(p)} - 0.5d_e, 0)$ ,  $\tilde{B}_p = (\tilde{x}_c^{(p)} + 0.5d_e, 0)$ ,  $\tilde{C}_{p+0.5\tilde{p}} = (\tilde{x}_c^{(p+0.5\tilde{p})} - 0.5d_e, 0)$ ,  $\tilde{D}_{p+0.5\tilde{p}} = (\tilde{x}_c^{(p+0.5\tilde{p})} + 0.5d_e, 0)$  ( $p=1, \overline{\tilde{p}}$ ) ділянок прикладання квазіпотенціалів. Далі знаходимо відповідні координати

$$A_p = \left( \frac{x_{\tilde{A}_p}^2 - \kappa^2}{x_{\tilde{A}_p}^2 + \kappa^2}, \frac{2x_{\tilde{A}_p} \kappa}{x_{\tilde{A}_p}^2 + \kappa^2} \right), B_p = \left( \frac{x_{\tilde{B}_p}^2 - \kappa^2}{x_{\tilde{B}_p}^2 + \kappa^2}, \frac{2x_{\tilde{B}_p} \kappa}{x_{\tilde{B}_p}^2 + \kappa^2} \right),$$

$$C_p = \left( \frac{x_{\tilde{C}_p}^2 - \kappa^2}{x_{\tilde{C}_p}^2 + \kappa^2}, \frac{2x_{\tilde{C}_p} \kappa}{x_{\tilde{C}_p}^2 + \kappa^2} \right), D_p = \left( \frac{x_{\tilde{D}_p}^2 - \kappa^2}{x_{\tilde{D}_p}^2 + \kappa^2}, \frac{2x_{\tilde{D}_p} \kappa}{x_{\tilde{D}_p}^2 + \kappa^2} \right) \quad (p=1, \overline{\tilde{p}})$$

на колі (див. рис. 1, б).

Обмежимося розглядом випадку, коли, аналогічно до [4, 10, 11], середовище має структуру, близьку до однорідної, окрім невеликих ділянок локальних сплесків однорідностей. Тоді, з урахуванням конформного відображення (1), КП у  $G_z$  шукатимемо у вигляді

$$\sigma(x, y, \chi, \alpha_1, \varepsilon_1, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \dots, \alpha_s, \varepsilon_s, \tilde{x}_s, \tilde{y}_s) =$$

$$= \chi + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{1 + ((g_1(x, y) - \tilde{x}_k)^2 + (g_2(x, y) - \tilde{y}_k)^2) / \varepsilon_k}, \quad (2)$$

де  $\chi, \alpha_k, \varepsilon_k, \tilde{x}_k, \tilde{y}_k$  — параметри, що ідентифікуються у процесі розв'язання задачі.

Ще раз підкреслимо, що під час проведення розрахунків у крузі, на відміну від [1–4, 6–8], відпадає потреба у «традиційному» штучному «урізання» нескінченної області  $G_{\tilde{z}}$  за допомогою, зокрема, так званої функції чутливості. У цьому випадку побудова відповідних ділянок розділу стає лише допоміжним інструментом у заданні підобласті для розрахунків, аналізі достовірності отримуваних розв'язків та обраної схеми інжектування зарядів. Відповідну функцію можна формувати як залежність розподілу числових значень вздовж  $\partial G_{\tilde{z}}^* \setminus \tilde{\Gamma}$  від незначних збурень КП у  $G_{\tilde{z}}$  [1] або ґрунтуючись на розрахункових сумарних густинах струму в точках  $G_{\tilde{z}}$  тощо.

**Постановка задачі** відшукування комплексно спряжених функцій квазіпотенціалу  $\varphi^{(p)} = \varphi^{(p)}(x, y)$  і течії  $\psi^{(p)} = \psi^{(p)}(x, y)$  (для кожної інжекції) та КП  $\sigma$  (2) в областях  $G_z^{(p)}$ , подібно до [5, 10, 11], матиме такий вигляд:

$$\sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial x} = \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial y}, \quad \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial y} = -\frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial x}; \quad (3)$$

$$\varphi^{(p)}|_{A_p B_p} = \varphi_*^{(p)}, \quad \varphi^{(p)}|_{C_p D_p} = \varphi^{*(p)}, \quad \psi^{(p)}|_{A_p D_p} = 0, \quad \psi^{(p)}|_{B_p C_p} = Q^{(p)}; \quad (4)$$

$$\int_{M_1 N_1} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial \vec{n}} dl = Q^{(p)}, \quad M_1 \in B_p C_p, \quad N_1 \in A_p D_p;$$

$$\varphi^{(p)}(M)|_{B_p N} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \varphi^{(p)}(M)|_{K C_p} = \bar{\varphi}^{(p)}(M), \varphi^{(p)}(M)|_{A_p D_p} = \underline{\varphi}^{(p)}(M), \quad (5)$$

$$\psi^{(p)}(M)|_{A_p B_p} = \psi_*^{(p)}(M), \psi^{(p)}(M)|_{C_p D_p} = \psi^{*(p)}(M),$$

де  $M$  та  $dl$  — бiжуча точка та елемент дуги відповідних кривих;  $\bar{n}$  — одиничний вектор нормалі;  $G_\omega^{(p)} = \{\omega^{(p)}: \omega^{(p)} = \varphi^{(p)} + i\psi^{(p)}, \varphi_*^{(p)} \leq \varphi^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}, 0 \leq \psi^{(p)} \leq Q^{(p)}\}$  — області комплексного квазіпотенціалу, що відповідають областям  $G_z^{(p)}$ ;  $Q^{(p)}$  — потоки векторних полів (зарядiв) через контактні поверхні ( $A_p B_p$  та  $C_p D_p$ );  $A_p B_p$  та  $C_p D_p$  — еквіпотенціальні лiнії;  $B_p C_p$  та  $A_p D_p$  — непроникні граничні лiнії течiй;  $\psi_*^{(p)}(M) = \int_{A_p M} \Psi_*^{(p)}(M) dl$ ,  $\psi^{*(p)}(M) = \int_{D_p M} \Psi^{*(p)}(M) dl$ ;  $\bar{\varphi}^{(p)}(M) = \bar{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_C^{(p)} \leq \tau \leq \tau_B^{(p)}$ ),  $\underline{\varphi}^{(p)}(M) = \underline{\varphi}^{(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_A^{(p)} \leq \tau \leq \tau_D^{(p)}$ ),  $\Psi_*^{(p)}(M) = \Psi_*^{(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_B^{(p)} \leq \tau \leq \tau_A^{(p)}$ ),  $\Psi^{*(p)}(M) = \Psi^{*(p)}(\tau, \dots)$  ( $\tau_D^{(p)} \leq \tau \leq \tau_C^{(p)}$ ) — функції, побудовані шляхом інтерполювання експериментально отриманих значень  $\bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\Psi_{j^*^{(p)}}^{*(p)}$  ( $\varphi_*^{(p)} \leq \bar{\varphi}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} \leq \varphi^{*(p)}$ ,  $\Psi_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, \Psi_{j^*^{(p)}}^{*(p)} > 0$ ,  $\bar{i}^{(p)} = 0, \underline{m}^{(p)} + 1$ ,  $\bar{i}^{(p)} = 0, \bar{m}^{(p)} + 1$ ,  $j_*^{(p)} = 0, n_*^{(p)} + 1$ ,  $j^*^{(p)} = 0, n^{*(p)} + 1$ ) для

$$\bar{\tau}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} = \begin{cases} \arccos(\tilde{g}_1(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} > 0, \\ 2\pi - \arccos(\tilde{g}_1(\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)} < 0, \end{cases} \quad (\bar{x}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}, \bar{y}_{\bar{i}^{(p)}}^{(p)}) \in \tilde{B}_p \tilde{N} \cup \tilde{K} \tilde{C}_p;$$

$$\underline{\tau}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} = \begin{cases} \arccos(\tilde{g}_1(\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} > 0, \\ 2\pi - \arccos(\tilde{g}_1(\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)} < 0, \end{cases} \quad (\underline{x}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}, \underline{y}_{\underline{i}^{(p)}}^{(p)}) \in \tilde{A}_p \tilde{D}_p;$$

$$\tau_{*j_*^{(p)}}^{(p)} = \begin{cases} \arccos(\tilde{g}_1(x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } y_{*j_*^{(p)}}^{(p)} > 0, \\ 2\pi - \arccos(\tilde{g}_1(x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, 0)), & \text{якщо } y_{*j_*^{(p)}}^{(p)} < 0, \end{cases} \quad (x_{*j_*^{(p)}}^{(p)}, y_{*j_*^{(p)}}^{(p)}) \in \tilde{A}_p \tilde{B}_p;$$

$$\tau_{j^*^{(p)}}^{*(p)} = \begin{cases} \arccos(\tilde{g}_1(x_{j^*^{(p)}}^{*(p)}, 0)), & \text{якщо } y_{j^*^{(p)}}^{*(p)} > 0, \\ 2\pi - \arccos(\tilde{g}_1(x_{j^*^{(p)}}^{*(p)}, 0)), & \text{якщо } y_{j^*^{(p)}}^{*(p)} < 0, \end{cases} \quad (x_{j^*^{(p)}}^{*(p)}, y_{j^*^{(p)}}^{*(p)}) \in \tilde{C}_p \tilde{D}_p,$$

вiдповiдно ( $\tilde{N}$  та  $\tilde{K}$  — граничні точки досліджуваної дiлянки горизонту). На практицi у двовимiрному випадку типова зона поверхнi ґрунтового масиву, з якої отримують замири, обмежується всього лише десятками-сотнями метрiв [1, 3, 6, 7]. Тому задати крайовi умови на дiлянцi  $NK$  практично неможливо. Схожа ситуацiя виникає на лiнiях  $\tilde{\Gamma}$ , де будь-якi данi вдасться отримати лише в дуже обмеженому класi випадкiв. Зведення нескiнченно великих територiй (околiв нескiнченностi) до малих околiв деякої скiнченної точки є вагомим iнструментом розв'язання описаної проблеми. Тут довжини лiнiй  $\tilde{B}_p \tilde{N}$  та  $\tilde{K} \tilde{C}_p$  i форму кривої  $\tilde{\Gamma}$  зазвичай задають залежно вiд величин значень геометричного фактору i функцiї чутливостi [1–3, 7].

**ЗВЕДЕННЯ ПОЧАТКОВОЇ ЗАДАЧІ ДО СЕРІЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ НА КВАЗІКОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ (У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ТА РІЗНИЦЕВІЙ ФОРМАХ)**

Зважаючи на складність здійснення відображень типу  $G_z^{(p)} \rightarrow G_\omega^{(p)}$  (криво-лінійних фізичних областей на канонічні області комплексного квазіпотенціалу), доцільно розглядати відповідні обернені до них [9]. Тоді задачу (2)–(5) запишемо у вигляді [9–11]

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sigma \frac{\partial x^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sigma \frac{\partial y^{(p)}}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \forall (x^{(p)}, y^{(p)}) \in G_z^{(p)}; \end{cases} \quad (6)$$

$$x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) = \cos(\tau_*^{(p)}(\psi)), \quad y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) = \sin(\tau_*^{(p)}(\psi)), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}],$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) = \cos(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)), \quad y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) = \sin(\bar{\tau}^{(p)}(\varphi)),$$

$$\varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi_N^{(p)}] \cup [\varphi_K^{(p)}, \varphi^{*(p)}],$$

$$x^{(p)}(\varphi, 0) = \cos(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \quad y^{(p)}(\varphi, 0) = \sin(\underline{\tau}^{(p)}(\varphi)), \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}], \quad (7)$$

$$x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) = \cos(\tau^{*(p)}(\psi)), \quad y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) = \sin(\tau^{*(p)}(\psi)), \quad \psi \in [0, Q^{(p)}],$$

$$x^{(p)2}(\varphi, Q^{(p)}) + y^{(p)2}(\varphi, Q^{(p)}) = 1, \quad \varphi \in [\varphi_N^{(p)}, \varphi_K^{(p)}];$$

$$x^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) y'_\varphi(\varphi_*^{(p)}, \psi) - y^{(p)}(\varphi_*^{(p)}, \psi) x'_\varphi(\varphi_*^{(p)}, \psi) = 0, \quad \psi \in [0, Q^{(p)}],$$

$$x^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) y'_\varphi(\varphi^{*(p)}, \psi) - y^{(p)}(\varphi^{*(p)}, \psi) x'_\varphi(\varphi^{*(p)}, \psi) = 0, \quad \psi \in [0, Q^{(p)}], \quad (8)$$

$$x^{(p)}(\varphi, 0) y'_\psi(\varphi, 0) - y^{(p)}(\varphi, 0) x'_\psi(\varphi, 0) = 0, \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}],$$

$$x^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) y'_\psi(\varphi, Q^{(p)}) - y^{(p)}(\varphi, Q^{(p)}) x'_\psi(\varphi, Q^{(p)}) = 0, \quad \varphi \in [\varphi_*^{(p)}, \varphi^{*(p)}]$$

за умови відшукування  $x^{(p)} = x^{(p)}(\varphi, \psi)$ ,  $y^{(p)} = y^{(p)}(\varphi, \psi)$  та ідентифікації КП (2).

Тут  $\tau = \underline{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \bar{\tau}^{(p)}(\varphi)$ ,  $\tau = \tau_*^{(p)}(\psi)$ ,  $\tau = \tau^{*(p)}(\psi)$  ( $\varphi_*^{(p)} \leq \varphi \leq \varphi^{*(p)}$ ,

$0 \leq \psi \leq Q^{(p)}$ ) — функції, побудовані шляхом інтерполювання експериментально

отриманих значень  $\underline{\tau}_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\bar{\tau}_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\tau_{*j^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\tau_{j^{*(p)}}^{*(p)}$  для деяких значень потенціалів  $\varphi_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,

$\bar{\varphi}_{i^{(p)}}^{(p)}$  та функцій течії  $\int_{A_p, M(\tau_{*j^{(p)}}^{(p)})} \Psi_*^{(p)}(\tau_{*j^{(p)}}^{(p)}) dl$ ,  $\int_{D_p, M(\tau_{j^{*(p)}}^{*(p)})} \Psi^{*(p)}(\tau_{j^{*(p)}}^{*(p)}) dl$  на

відповідних ділянках  $A_p D_p$ ,  $B_p N \cup C_p K$ ,  $A_p B_p$ ,  $C_p D_p$ ;  $\varphi_N^{(p)}$  та  $\varphi_K^{(p)}$  — квазіпотенціали у точках  $N$  та  $K$  на  $p$ -й інжекції;  $M(\tau) = (\cos(\tau), \sin(\tau))$ .

Зазвичай, фіксуючи почергово параметри середовища і процесу, задачу (2), (6)–(8) у процесі ітерацій розбивають на дві підзадачі: побудови полів густин струму та ідентифікації КП [5, 11]. Першу підзадачу запишемо у вигляді (2), (6), (8) за умови

$$x^{(p)2}(\varphi, \psi) + y^{(p)2}(\varphi, \psi) = 1, \quad (\varphi, \psi) \in \partial G_\omega^{(p)}. \quad (9)$$

Ідентифікацію параметрів КП здійснюватимемо за умови мінімізації функціоналу [11]

$$\Phi = \sum_{p=1}^{\tilde{p}} \left( \sum_{N_1 \in A_p B_p} (\psi_*^{(p)}(N_1) - \psi^{(p)}(N_1))^2 + \sum_{N_2 \in B_p N \cup C_p K} (\bar{\varphi}^{(p)}(N_2) - \varphi^{(p)}(N_2))^2 + \right.$$

$$+ \sum_{N_3 \in C_p D_p} (\psi^{*(p)}(N_3) - \psi^{(p)}(N_3))^2 + \left. + \sum_{N_4 \in A_p D_p} (\underline{\varphi}^{(p)}(N_4) - \varphi^{(p)}(N_4))^2 \right) + \Omega[\sigma] \rightarrow \min \quad (10)$$

$$\text{з використанням (7), де } \psi^{(p)}(N_1) = \int_{A_p N_1} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial l} ds, \varphi^{(p)}(N_2) = \varphi_*^{(p)} + \int_{B_p N_2} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial s} dl, \\ \psi^{(p)}(N_3) = \int_{D_p N_3} \sigma \frac{\partial \varphi^{(p)}}{\partial l} ds, \varphi^{(p)}(N_4) = \varphi_*^{(p)} + \int_{A_p N_4} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \psi^{(p)}}{\partial s} dl; \Omega = \sum_{k=1}^s (\eta_k \alpha_k^2 + \eta_{s+k} \varepsilon_k^2)$$

— стабілізувальний функціонал із параметрами регуляризації  $\eta_k$  ( $k = \overline{1, 2s}$ );  $\partial l$  та  $\partial s$  — елементи довжин уздовж ліній течії та еквіпотенціальних ліній відповідно.

Різницеві аналоги підзадачі (2), (6), (8), (9) формуємо у рівномірних сіткових областях  $G_\omega^{\gamma(p)} = \{(\varphi_i^{\gamma(p)}, \psi_j^{\gamma(p)}); \psi_j^{\gamma(p)} = j \Delta \psi^{(p)}, j = 0, n^{(p)} + 1, \Delta \varphi^{(p)} = Q^{(p)} / (n^{(p)} + 1); \varphi_i^{\gamma(p)} = \varphi_*^{(p)} + i \Delta \varphi^{(p)}, i = 0, m^{(p)} + 1, \Delta \varphi^{(p)} = (\varphi_*^{(p)} - \varphi_*^{(p)}) / (m^{(p)} + 1); \gamma^{(p)} = \Delta \varphi^{(p)} / \Delta \psi^{(p)}\}$  [10, 11], де  $m^{(p)}$  та  $n^{(p)}$  — кількості вузлів розбиття,  $\gamma^{(p)}$  — квазіконформні інваріанти [9]

$$\gamma^{(p)} = \frac{1}{(m^{(p)} + 1)(n^{(p)} + 1)} \sum_{i,j=0}^{m^{(p)}, n^{(p)}} \frac{1}{\sigma_{i+0.5, j+0.5}^{\gamma(p)}} \frac{a_{i,j}^{(p)} + a_{i,j+1}^{(p)}}{b_{i,j}^{(p)} + b_{i+1,j}^{(p)}}, \quad (11)$$

$$a_{i,j}^{(p)} = \sqrt{(x_{i+1,j}^{\gamma(p)} - x_{i,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i+1,j}^{\gamma(p)} - y_{i,j}^{\gamma(p)})^2},$$

$$b_{i,j}^{(p)} = \sqrt{(x_{i,j+1}^{\gamma(p)} - x_{i,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i,j+1}^{\gamma(p)} - y_{i,j}^{\gamma(p)})^2}.$$

Тут для зручності введено такі позначення:

$$x_{i,j}^{\gamma(p)} = x^{(p)}(\varphi_i^{\gamma(p)}, \psi_j^{\gamma(p)}), \quad y_{i,j}^{\gamma(p)} = y^{(p)}(\varphi_i^{\gamma(p)}, \psi_j^{\gamma(p)}),$$

$$4\sigma_{i+0.5, j+0.5}^{\gamma(p)} = \sigma_{i,j}^{\gamma(p)} + \sigma_{i+1,j}^{\gamma(p)} + \sigma_{i,j+1}^{\gamma(p)} + \sigma_{i+1, j+1}^{\gamma(p)},$$

$$\sigma_{i\pm 1/2, j}^{\gamma(p)} = \sigma((x_{i\pm 1, j}^{\gamma(p)} + x_{i, j}^{\gamma(p)})/2, (y_{i\pm 1, j}^{\gamma(p)} + y_{i, j}^{\gamma(p)})/2),$$

$$\sigma_{i, j\pm 1/2}^{\gamma(p)} = \sigma((x_{i, j\pm 1}^{\gamma(p)} + x_{i, j}^{\gamma(p)})/2, (y_{i, j\pm 1}^{\gamma(p)} + y_{i, j}^{\gamma(p)})/2), \quad \sigma_{i,j}^{\gamma(p)} = \sigma(x_{i,j}^{\gamma(p)}, y_{i,j}^{\gamma(p)}).$$

У цьому випадку, застосувавши однорідні консервативні різницеві схеми [9] до узагальнень рівнянь Лапласа (6), отримаємо

$$x_{i,j}^{\gamma(p)} = \frac{x_{i-1,j}^{\gamma(p)} / \sigma_{i-1/2, j}^{\gamma(p)} + x_{i+1,j}^{\gamma(p)} / \sigma_{i+1/2, j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} (x_{i, j-1}^{\gamma(p)} \sigma_{i, j-1/2}^{\gamma(p)} + x_{i, j+1}^{\gamma(p)} \sigma_{i, j+1/2}^{\gamma(p)})}{1 / \sigma_{i-1/2, j}^{\gamma(p)} + 1 / \sigma_{i+1/2, j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} (\sigma_{i, j-1/2}^{\gamma(p)} + \sigma_{i, j+1/2}^{\gamma(p)})}, \quad (12)$$

$$y_{i,j}^{\gamma(p)} = \frac{y_{i-1,j}^{\gamma(p)} / \sigma_{i-1/2, j}^{\gamma(p)} + y_{i+1,j}^{\gamma(p)} / \sigma_{i+1/2, j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} (y_{i, j-1}^{\gamma(p)} \sigma_{i, j-1/2}^{\gamma(p)} + y_{i, j+1}^{\gamma(p)} \sigma_{i, j+1/2}^{\gamma(p)})}{1 / \sigma_{i-1/2, j}^{\gamma(p)} + 1 / \sigma_{i+1/2, j}^{\gamma(p)} + \gamma^{(p)2} (\sigma_{i, j-1/2}^{\gamma(p)} + \sigma_{i, j+1/2}^{\gamma(p)})}.$$



Крайові умови (9) набувають вигляду

$$\begin{aligned} (x_{i,0}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i,0}^{\gamma(p)})^2 = 1, \quad (x_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)})^2 + (y_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)})^2 = 1, \quad i=0, \overline{m^{(p)}+1}, \\ (x_{0,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{0,j}^{\gamma(p)})^2 = 1, \quad (x_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)})^2 + (y_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)})^2 = 1, \quad j=0, \overline{n^{(p)}+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Умови ортогональності (8) будуємо із застосуванням лівих та правих різнице-  
вих схем [9] у такий спосіб:

$$\begin{aligned} x_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} y_{i,n^{(p)}}^{\gamma(p)} = y_{i,n^{(p)}+1}^{\gamma(p)} x_{i,n^{(p)}}^{\gamma(p)}, \quad x_{i,0}^{\gamma(p)} y_{i,1}^{\gamma(p)} = y_{i,0}^{\gamma(p)} x_{i,1}^{\gamma(p)}, \quad i=1, \overline{m^{(p)}}, \\ x_{0,j}^{\gamma(p)} y_{1,j}^{\gamma(p)} = y_{0,j}^{\gamma(p)} x_{1,j}^{\gamma(p)}, \quad x_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} y_{m^{(p)},j}^{\gamma(p)} = y_{m^{(p)}+1,j}^{\gamma(p)} x_{m^{(p)},j}^{\gamma(p)}, \quad j=1, \overline{n^{(p)}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Наближене представлення мінімізувального функціонала (10) отримуємо (як і в [11]) із застосуванням формули лівих прямокутників до відповідних інтегралів для  $\varphi = \overline{\varphi}_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\varphi = \underline{\varphi}_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\psi = \psi_{*j^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\psi = \psi_{j^{*(p)}}^{*(p)}$  у (7).

#### АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТА ЧИСЛОВІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Відповідний розв'язок отримуємо в результаті почергового ітераційного застосування процедур побудови  $\tilde{p}$  електродинамічних сіток за допомогою виразів (2), (11)–(14) та уточнення розподілу КП, мінімізуючи функціонал, сформований в [11], наприклад, із використанням методу рою частинок [13, 14]. Умовою завершення ітераційного процесу може бути  $|\Phi^{\gamma(l+1)} - \Phi^{\gamma(l)}| < \delta$  [4], де  $\delta$  — параметр точності,  $l=0,1,\dots$  — номер відповідного наближення. Для побудови функції чутливості розв'язуємо  $\tilde{p}$  задач (12)–(14) аналогічно до [1] для  $\sigma(x, y) = 1$ ; обчислюємо густини струму за допомогою різнице-вих аналогів  $j^{(p)} = \sqrt{(\tilde{x}'_{\psi}{}^{(p)})^2 + (\tilde{y}'_{\psi}{}^{(p)})^2} / (\tilde{x}'_{\varphi}{}^{(p)} \tilde{y}'_{\psi}{}^{(p)} - \tilde{x}'_{\psi}{}^{(p)} \tilde{y}'_{\varphi}{}^{(p)})$  в усіх елементарних чотирикутниках всередині  $G_z^{(p)}$ ; кожному пікселю екрана  $(x_e, y_e)$  ставимо у відповідність значення  $\sum_{p=1}^{\tilde{p}} j^{(p)}(x_e, y_e)$  (за потреби виконуємо згладження).

Числові експерименти проведено за даними, отриманими за допомогою спеціально розробленої програми імітації фізичного експерименту. Для відомих  $\kappa = 70$ ,  $d_e = 10$ ,  $m^{(p)} = 100$ ,  $\varphi_*^{(p)} = -1$ ,  $\varphi^{*(p)} = 1$ , а також для  $s=1$ ,  $\chi = 1.3$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = 120$ ,  $\tilde{x}_1 = 0$ ,  $\tilde{y}_1 = -30$ , у першому випадку (рис. 2, а), і для  $s=3$ ,  $\chi = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $\varepsilon_1 = 20$ ,  $\tilde{x}_1 = -90$ ,  $\tilde{y}_1 = -25$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 100$ ,  $\tilde{x}_2 = -20$ ,  $\tilde{y}_2 = -35$ ,  $\alpha_3 = -0.55$ ,  $\varepsilon_3 = 50$ ,  $\tilde{x}_3 = 60$ ,  $\tilde{y}_3 = -20$ , у другому (рис. 3, а), розраховано низку числових даних розподілу квазіпотенціалу  $\overline{\varphi}_{i^{(p)}}^{(p)}$ ,  $\underline{\varphi}_{i^{(p)}}^{(p)}$ , локальних густин струму  $\Psi_{*j}^{(p)}$ ,  $\Psi_j^{*(p)}$  та повних витрат  $Q^{(p)}$  на  $\partial G_z$  на  $\tilde{p}=10$  інжекціях. Використовуючи ці крайові умови, за відомої структури КП (2), для заданих параметрів  $\kappa$ ,  $d_e$ ,  $m^{(p)}$ ,  $\eta_k = 10^{-3}$ ,  $\eta_{s+k} = 10^{-6}$ ,  $\tau_N = 0.116535$ ,  $\tau_K = -\tau_N$ ,  $\delta = 10^{-6}$ , початкових наближень  $\chi^{(0)} = 1$ ,  $\alpha_k^{(0)} = 0$ ,  $\varepsilon_k^{(0)} = 1$ ,  $\tilde{x}_k^{(0)} = 0$ ,  $\tilde{y}_k^{(0)} = 0$  та умов-обмежень  $0.5 \leq \chi \leq 2$ ,  $-2 \leq \alpha_k \leq 2$ ,  $10^{-5} \leq \varepsilon_k \leq 10^5$ ,  $-350 \leq \tilde{x}_k \leq 350$ ,  $-240 \leq \tilde{y}_k \leq 0$  ( $k = \overline{1, s}$ ,  $p = \overline{1, \tilde{p}}$ ), розв'язано задачу (2), (12)–(14) за умови мінімізації функціоналу [11].

У випадку одного сплеску ( $s=1$ ) отримані непогодженості між еталонними (рис. 2, а) та розрахованими (рис. 2, в) параметрами ( $\tilde{\chi} = 1.308283$ ,  $\tilde{\alpha}_1 = 1.545403$ ,



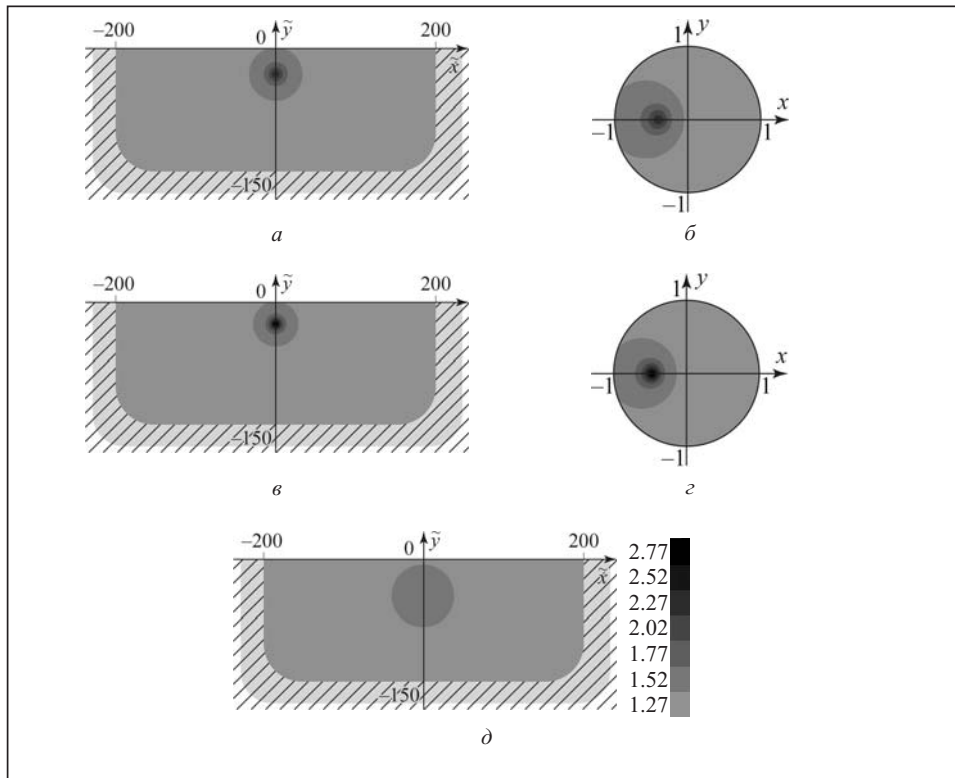


Рис. 2. Зображення: еталонні для  $\chi=1.3$ ,  $\alpha_1=1$ ,  $\varepsilon_1=120$ ,  $\tilde{x}_1=0$ ,  $\tilde{y}_1=-30$  (а, б); відповідні розраховані за описаним у цій роботі підходом (в, з); за алгоритмом [4] (д)

$\tilde{\varepsilon}_1=48.871727$ ,  $\tilde{x}_1=-0.115287$ ,  $\tilde{y}_1=-25.365872$ ;  $|\chi-\tilde{\chi}|=0.008283$ ,  $|\alpha_1-\tilde{\alpha}_1|=0.545403$ ,  $|\varepsilon_1-\tilde{\varepsilon}_1|=71.128273$ ,  $|\tilde{x}_1-\tilde{x}'_1|=0.115287$ ,  $|\tilde{y}_1-\tilde{y}'_1|=4.634128$ ;  $\Phi=0.008207$ ) є суттєво меншими, ніж у випадку рис. 2, д (алгоритму [4]) ( $\tilde{\chi}'=1.271533$ ,  $\tilde{\alpha}'_1=0.332166$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_1=919.6152$ ,  $\tilde{x}'_1=-1.254098$ ,  $\tilde{y}'_1=-43.75537$ ;  $|\chi-\tilde{\chi}'|=0.028467$ ,  $|\alpha_1-\tilde{\alpha}'_1|=0.667834$ ,  $|\varepsilon_1-\tilde{\varepsilon}'_1|=799.6152$ ,  $|\tilde{x}_1-\tilde{x}'_1|=1.254098$ ,  $|\tilde{y}_1-\tilde{y}'_1|=13.75537$ ). Для  $s=3$  (еталон: рис. 3, а) спостерігається суттєво гірша якість реконструкції зображення (рис. 3, в), хоча й зіставна з [4] (рис. 3, д), а саме:  $|\chi-\tilde{\chi}'|=0.054665$ ,  $|\alpha_1-\tilde{\alpha}'_1|=1.087252$ ,  $|\varepsilon_1-\tilde{\varepsilon}'_1|=4.586488$ ,  $|\tilde{x}_1-\tilde{x}'_1|=14.524532$ ,  $|\tilde{y}_1-\tilde{y}'_1|=18.599172$ ,  $|\alpha_2-\tilde{\alpha}'_2|=1.073969$ ,  $|\varepsilon_2-\tilde{\varepsilon}'_2|=39.660814$ ,  $|\tilde{x}_2-\tilde{x}'_2|=35.236055$ ,  $|\tilde{y}_2-\tilde{y}'_2|=20.275267$ ,  $|\alpha_3-\tilde{\alpha}'_3|=0.2096$ ,  $|\varepsilon_3-\tilde{\varepsilon}'_3|=9.432011$ ,  $|\tilde{x}_3-\tilde{x}'_3|=26.126353$ ,  $|\tilde{y}_3-\tilde{y}'_3|=2.278425$  ( $\tilde{\chi}=1.054665$ ,  $\tilde{\alpha}_1=1.787252$ ,  $\tilde{\varepsilon}_1=24.586488$ ,  $\tilde{x}_1=-104.524532$ ,  $\tilde{y}_1=-6.400828$ ,  $\tilde{\alpha}_2=2.073969$ ,  $\tilde{\varepsilon}_2=60.339186$ ,  $\tilde{x}_2=-55.236055$ ,  $\tilde{y}_2=-14.724733$ ,  $\tilde{\alpha}_3=-0.3404$ ,  $\tilde{\varepsilon}_3=59.432011$ ,  $\tilde{x}_3=33.873647$ ,  $\tilde{y}_3=-17.721575$ ;  $\Phi=0.88057$ ) та  $|\chi-\tilde{\chi}'|=0.014636$ ,  $|\alpha_1-\tilde{\alpha}'_1|=0.057313$ ,  $|\varepsilon_1-\tilde{\varepsilon}'_1|=223.1526$ ,  $|\tilde{x}_1-\tilde{x}'_1|=27.05086$ ,  $|\tilde{y}_1-\tilde{y}'_1|=23.82635$ ,  $|\alpha_2-\tilde{\alpha}'_2|=0.683999$ ,  $|\varepsilon_2-\tilde{\varepsilon}'_2|=52.4604$ ,  $|\tilde{x}_2-\tilde{x}'_2|=11.301125$ ,  $|\tilde{y}_2-\tilde{y}'_2|=1.51159$ ,  $|\alpha_3-\tilde{\alpha}'_3|=0.290255$ ,  $|\varepsilon_3-\tilde{\varepsilon}'_3|=22.6801$ ,  $|\tilde{x}_3-\tilde{x}'_3|=0.20922$ ,  $|\tilde{y}_3-\tilde{y}'_3|=9.60558$  ( $\tilde{\chi}'=0.985364$ ,  $\tilde{\alpha}'_1=0.642687$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_1=243.1526$ ,  $\tilde{x}'_1=-62.94914$ ,  $\tilde{y}'_1=-48.82635$ ,  $\tilde{\alpha}'_2=0.316001$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_2=152.4604$ ,  $\tilde{x}'_2=-8.698875$ ,  $\tilde{y}'_2=-33.48841$ ,  $\tilde{\alpha}'_3=-0.259745$ ,  $\tilde{\varepsilon}'_3=27.3199$ ,  $\tilde{x}'_3=59.79078$ ,  $\tilde{y}'_3=-10.39442$ ) відповідно. Причиною цього є, насамперед, ускладнення структури КП (порівняно з  $s=1$ ) за недостатньої кількості інжекцій (лінійно незалежних крайових умов). Водночас збільшення їхньої кількості, за умови застосування полярної схеми фіксації ділянок прикладання квазіпотенціалів, є недоцільним. Це призвело б до використання числових

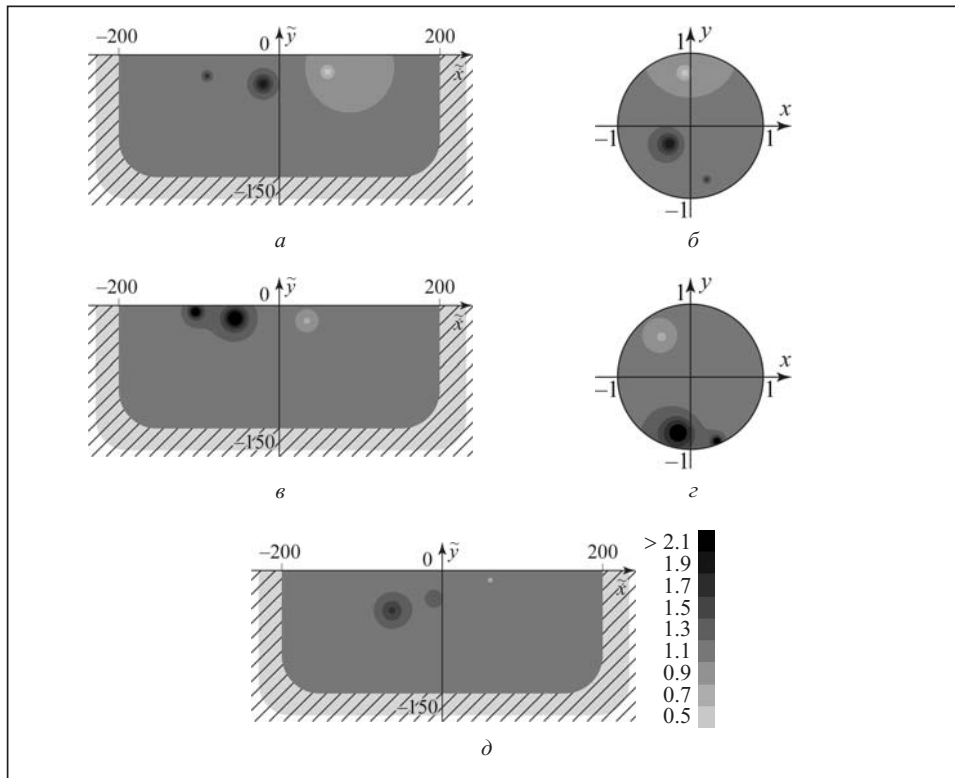


Рис. 3. Зображення: еталонні для  $\chi = 1$ ,  $\alpha_1 = 0.7$ ,  $\varepsilon_1 = 20$ ,  $\tilde{x}_1 = -90$ ,  $\tilde{y}_1 = -25$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\varepsilon_2 = 100$ ,  $\tilde{x}_2 = -20$ ,  $\tilde{y}_2 = -35$ ,  $\alpha_3 = -0.55$ ,  $\varepsilon_3 = 50$ ,  $\tilde{x}_3 = 60$ ,  $\tilde{y}_3 = -20$  (а, б); відповідні розрахункові за описаним у цій роботі підходом (в, з); за алгоритмом [4] (д)

даних сіток з малими за розмірами відрізками виду  $A_p B_p$  і  $C_p D_p$  (див. підхід до їхнього задання на початку цієї статті). Як наслідок, середні похибки квазіконформності  $\varepsilon_*^{(p)}$  побудованих розрахункових сіток набували б надто великих значень [9]. Наприклад, у випадку одного сплеску величина  $\varepsilon_*^{(1)}$  є у 1.5965 разів більшою, ніж  $\varepsilon_*^{(6)}$  ( $\varepsilon_*^{(1)} = 0.232478$  та  $\varepsilon_*^{(6)} = 0.145617$ ). Розв'язати цю проблему в майбутньому можна за умови введення процедури ортогоналізації у точках  $A_p$ ,  $B_p$ ,  $C_p$ ,  $D_p$  та використання більш точних типів даних під час виконання дій з дробовими числами.

Зауважимо, що в досліджуваному випадку в околах навіть малих за розміром ділянок прикладання квазіпотенціалів є великі густини струмів. Це у процесі розрахунків зумовлює наявність порівняно невеликої кількості вузлів у решті області. Тому ідентифікація параметрів зіставних з [11] розмірів неоднорідностей потребує використання густіших сіток. Сповільнення процесу розрахунків, що спостерігатиметься при цьому, є особливо критичним у разі проведення досліджень в умовах «географічної недоступності». Розв'язати цю проблему можна шляхом розпаралелення процесу обчислень типу [14] з використанням віддалених серверів, як це, наприклад, запропоновано у роботі [18].

Отримані у роботі розв'язки як на півплощині (див. рис. 2, в, рис. 3, в), так і в крузі (див. рис. 2, з, рис. 3, з), «у розумних межах» (згідно з [1]) відповідають еталонним (див. рис. 2, а, рис. 3, а, рис. 2, б, рис. 3, б), навіть враховуючи, що використано суттєво меншу кількість інжекцій.

## ВИСНОВКИ

Методику ідентифікації параметрів структури невеликих за розміром об'єктів із застосуванням числових методів квазіконформних відображень за даними томографії прикладених квазіпотенціалів адаптовано на випадок реконструкції зображення великих ґрунтових масивів. Суттєвою особливістю розробленого алгоритму є можливість уникнення «точковості» ділянок прикладання квазіпотенціалів. Важливою перевагою запропонованого підходу є уникнення потреби у штучному «урізанні» великих масивів (теоретично нескінченних) на основі апріорної інформації про форми еквіпотенціалей на віддалених (глибинних) ділянках. Наявна сингулярність звужується в окіл деякої граничної точки відповідного півплощини круга. Проведено порівняльний аналіз отриманих розв'язків з уже відомими; відповідні розподіли коефіцієнта провідності є зіставними. Виявлено, що суттєво покращити якість розраховуваних зображень можна шляхом підвищення точності квазіконформних відображень в околах визначальних точок задання інжекцій.

Перспективним напрямком досліджень є поширення алгоритму на випадки простору, більшої кількості ділянок прикладання квазіпотенціалів, анізотропії; зменшення величин похибок квазіконформності шляхом уведення процедури ортогоналізації в околах визначальних точок задання інжекцій і уникнення малих за розміром ділянок прикладання квазіпотенціалів; врахування наявності тонких включень (насамперед, на ділянках контакту електродів з ґрунтом) [19].

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Loke M.H. Tutorial: 2-D and 3-D electrical imaging surveys. 2021. 136 p. URL: <https://www.geotomosoft.com/coursenotes.zip>.
2. Kanli A.I. Applied geophysics with case studies on environmental, exploration and engineering geophysics. London: IntechOpen, 2019. 150 p. <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.78490>.
3. Dahlin T., Zhou B. Multiple-gradient array measurements for multichannel 2D resistivity imaging. *Near Surface Geophysics*. 2006. Vol. 4, Iss. 2. P. 113–123. <https://doi.org/10.3997/1873-0604.2005037>.
4. Bomba A., Boichura M., Sydoruk B. Generalization of numerical quasiconformal mapping methods for geological problems. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5, N 4 (107). P. 45–54. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215045>.
5. Holder D. Electrical impedance tomography. Methods, history and applications. Bristol: Institute of Physics, 2005. 456 p.
6. Модин И.Н. Геофизические изыскания под наклонно-направленное бурение для прокладки трубопроводов под дорогами. *Инженерные изыскания*. 2015. № 5–6. С. 32–36. URL: [http://www.geomark.ru/journals\\_list/zhurnal-inzhenemye-izyskaniya-5-62015/?attach=2263](http://www.geomark.ru/journals_list/zhurnal-inzhenemye-izyskaniya-5-62015/?attach=2263).
7. Zhou B., Bouzidi Y., Ullah S., Iqbal M.A. A full-range gradient survey for 2D electrical resistivity tomography. *Near Surface Geophysics*. 2020. Vol. 18, Iss. 6. P. 609–626. <https://doi.org/10.1002/nsg.12125>.
8. Aleardi M., Vinciguerra A., Hojat A. A geostatistical Markov chain Monte Carlo inversion algorithm for electrical resistivity tomography. *Near Surface Geophysics*. 2021. Vol. 19, N 1. P. 7–26. <https://doi.org/10.1002/nsg.12133>.
9. Бомба А.Я., Каштан С.С., Пригорницький Д.О., Ярошак С.В. Методи комплексного аналізу. Рівне: Нац. ун-т водного господарства та природокористування, 2013. 430 с.
10. Bomba A., Boichura M. On a numerical quasiconformal mapping method for the medium parameters identification using applied quasipotential tomography. *Mathematical Modeling and Computing*. 2017. Vol. 4, N 1. P. 10–20. <https://doi.org/10.23939/mmc2017.01.010>.

11. Bomba A., Boichura M. Identification of burst parameters using numerical quasiconformal mapping methods. *International Journal of Applied Mathematics*. 2020. Vol. 33, N 5. P. 903–917. <http://dx.doi.org/10.12732/ijam.v33i5.11>.
12. Bulavatsky V.M. Mathematical models and problems of fractional-differential dynamics of some relaxation filtration processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 5. P. 727–736. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0074-4>.
13. Bohaienko V., Gladky A., Romashchenko M., Matiash T. Identification of fractional water transport model with  $\psi$ -Caputo derivatives using particle swarm optimization algorithm. *Applied Mathematics and Computation*. 2021. Vol. 390. 125665. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125665>.
14. Bohaienko V., Gladky A. Parameters identification for fractional-fractal model of filtration-consolidation using GPU. *Proc. Fourth International Workshop on Computer Modeling and Intelligent Systems (CMIS-2021)* (27 April 2021, Zaporizhzhia, Ukraine). Zaporizhzhia, 2021. CEUR Workshop Proceedings. 2021. Vol. 2864. P. 409–418. URL: <http://ceur-ws.org/Vol-2864/paper36.pdf>.
15. Bohaienko V., Bulavatsky V. Fractional-fractal modeling of filtration-consolidation processes in saline saturated soils. *Fractal and Fractional*. 2020. Vol. 4, N 4. P. 1–11. <https://doi.org/10.3390/fractalfract4040059>.
16. Sergienko I.V., Petryk M.R., Fraissard J., Leclerc S. Highly efficient methods of the identification of competitive diffusion parameters in inhomogeneous media of nanoporous particles. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 529–546. <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9744-7>.
17. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of the parabolic system and identification of its parameters for the known heat flows. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 1. P. 38–59. <https://doi.org/10.1007/s10559-014-9591-y>.
18. Vlasyuk A., Zhukovskyy V., Zhukovska N., Shatnyi S. Parallel computing optimization of two-dimensional mathematical modeling of contaminant migration in catalytic porous media. *Proc 2020 10th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT'2020)*. (16–18 September 2020, Deggendorf, Germany). Deggendorf, 2020. P. 23–28. <https://doi.org/10.1109/ACIT49673.2020.9208878>.
19. Michuta O., Ivanchuk N., Martyniuk P., Ostapchuk O. A finite element study of elastic filtration in soils with thin inclusions. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. Vol. 5, N 5 (107). P. 41–48. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.215047>.

### **A.Ya. Bomba, M.V. Boichura**

#### **IDENTIFYING THE STRUCTURE OF SOIL MASSIFS BY NUMERICAL QUASICONFORMAL MAPPING METHODS**

**Abstract.** A method of identifying the parameters of the structure of small-sized objects, which assumes the presence at the domain boundary (for each of the corresponding injections) of only equipotential lines (with given values of current or flow function) and streamlines (with known potential distributions), is adapted for the cases of image reconstruction of large soil massifs. A significant advantage of the developed algorithm over the known ones is the avoidance of the “traditional” procedure of artificial “cutting” of an infinite domain due to narrowing the localization of this singularity to the neighborhood of a certain point. Numerical experiments are carried out and their results are compared with the known solutions.

**Keywords:** electrical resistivity tomography, quasiconformal mappings, identification, inverse problems, numerical methods.

*Надійшла до редакції 14.05.2021*