

**Ю.І. КАЛЮХ**

ДП «Державний науково-дослідний інститут будівельних конструкцій»,  
Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,  
Київ, Україна, e-mail: *kalyukh2002@gmail.com*.

**О.Г. ЛЕБІДЬ**

Інститут телекомунікацій і глобального інформаційного простору НАН України,  
Київ, Україна, e-mail: *o.g.lebid@gmail.com*.

**ПОБУДОВА АДАПТИВНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
БАГАТОХВИЛЬОВИХ ЗАДАЧ**

**Анотація.** Удосконалено чисельний метод обчислення багатохвильових моделей для підвищення швидкодії і монотонізації (зменшення осциляцій чисельних розрахунків) розв'язання багатохвильових задач динаміки протяжних систем, таких як космічні зв'язки довжиною у десятки кілометрів, трубопроводи в повітрі та в рідині, підводні буксирні системи, ерліфти для видобутку мінералів з дна Світового океану протяжністю в 5–10 км тощо. Цей метод базується на декомпозиції чисельного алгоритму за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення. Показано, що в обчисленнях за рахунок різного ступеня квантування поздовжніх і поперечних хвиль можна домогтися подальшого збільшення швидкості обчислень порівняно з алгоритмом хвильової факторизації і порівняно з розв'язанням вихідної системи рівнянь. До того ж чисельно отримано, що діапазон стійкого обчислення не скорочується. У підсумку збільшення швидкості обчислень програми становить не менше 50–200 % в залежності від потрібної точності та варіантів декомпозиції багатохвильових моделей. Ця модифікація методу хвильової факторизації актуальна для розв'язання задач керування розподіленими системами, оперативного аналізу перехідних режимів руху тощо, де швидкодія обчислень є критично необхідною. Проведено порівняльне оцінювання точності методу хвильової факторизації, методу декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення та вихідного алгоритму на прикладі чисельного розв'язання задачі про 3D-еволюцію протяжної системи, якщо судно-буксирувальник рухається на циркуляції. Порівняльний аналіз розрахункових даних показав монотонізацію профілю чисельного розв'язання на основі факторизованих алгоритмів, їхню меншу чутливість до похибок у вихідних даних. Побудовано факторизовану за напрямками розповсюдження збурень і типами хвиль скінченнорізницеву схему із змінними дисперсійно-дифузійними властивостями.

**Ключові слова:** багатохвильові моделі, типи та швидкість поширення хвиль, декомпозиція, алгоритм, протяжна система.

**ВСТУП**

Багатохвильові моделі (БМ) описують чимало процесів у живій і неживій природі. Вони досліджувалися у багатьох наукових роботах, серед яких відзначимо лише деякі публікації вітчизняних учених, а саме: Ю.Г. Кривоноса [1], І.Т. Селезова [2], А.В. Гладкого, І.В. Сергієнка, В.В. Скопецького [3, 4], В.Ф. Губарева [5], О.М. Трофимчука [6] та ін. Під час чисельної реалізації БМ виникають деякі труднощі, зумовлені тим, що швидкість поширення хвиль різного типу неоднакова [7]. В окремих випадках, наприклад для поздовжніх і поперечних хвиль у розподілених системах (РС), відмінність може становити величину в декілька порядків [8]. За чисельної реалізації БМ ця особливість призводить до накопичення похибок в обчисленні шуканих величин під час переходу з одного часового шару на наступний і в результаті — до «розхитування» програми. Тож одним із способів монотонізації чисельного розв'язання і підвищення стійкості обчислення є врахування природи БМ в обчислювальному алгоритмі.

Для підвищення швидкодії і монотонізації чисельного розв'язання багатохвильових задач динаміки РС, таких як космічні зв'язки довжиною у десятки кілометрів [9], трубопроводи у повітрі та в рідині [10], підводні буксирні системи, ерліфти для видобутку мінералів з дна Світового океану довжиною 5–10 км тощо [11]. У [8] запропоновано метод факторизації БМ РС за типом хвиль.

© Ю.І. Калюх, О.Г. Лебідь, 2021

Далі розглядається наступний етап — декомпозиція вихідного алгоритму і програми: метод декомпозиції скінченнорізницевого оператора і програми за швидкостями поширення хвиль, а саме: поздовжніх, поперечних (конфігураційних), згинальних і крутильних хвиль. Ідея декомпозиції за швидкостями поширення хвиль базується на фізичній особливості поширення хвиль різного типу в РС, коли значення швидкості поширення в РС поздовжніх, поперечних (конфігураційних), згинальних і крутильних хвиль суттєво відрізняються (у 10–100 разів і більше) [7, 8].

#### ФІЗИЧНЕ ПІДґРУНТЯ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЗА ШВИДКОСТЯМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

Швидкість поширення поздовжніх хвиль в РС визначається поздовжньою жорсткістю

$$V_1 = \sqrt{\frac{EF}{m}}, \quad (1)$$

де  $E$  — модуль Юнга матеріалу РС,  $F$  — площа поперечного перерізу РС до деформування,  $m$  — погонна маса РС до деформування. Для РС швидкість  $V_1$  може змінюватися в діапазоні приблизно від  $10^2$  до  $10^5$  м/с.

Визначальним фактором для швидкості поширення поперечних (конфігураційних) хвиль є осьове зусилля  $T$  в РС:

$$V_2 = \sqrt{\frac{T - MU_t^2}{m + M}}, \quad (2)$$

де  $M$  — погонна приєднана маса рідини до деформування;  $U_t$  — дотична проекція відносної швидкості обтікання РС потоком рідини. Для РС у потоці  $V_2$  може змінюватися у діапазоні приблизно від 0 до  $10^3$  м/с.

Швидкість поширення крутильних хвиль в РС характеризується її крутильною жорсткістю  $B$  [12]:

$$V_3 = \sqrt{\frac{B}{r^2 m}}, \quad (3)$$

де  $r$  — радіус поперечного перерізу РС до деформування.

Визначальним фактором для швидкості поширення згинальних хвиль є модуль Юнга  $E$  матеріалу РС, а також моменти інерції  $I$  і  $J$  поперечного перерізу РС до деформування:

$$V_4 = \sqrt{\frac{EI}{J}}. \quad (4)$$

Швидкості  $V_3$  (3) і  $V_4$  (4) можуть змінюватися в широкому діапазоні приблизно від 0 до  $10^4$  м/с.

Залежно від застосованої хвильової апроксимації реальної РС для побудови математичної моделі можна використати від одного до чотирьох типів хвиль (1)–(4), причому в просторовому випадку — шість хвиль чотирьох типів: поздовжня, дві поперечні (конфігураційні), крутильна і дві згинальні [13]. У результаті отримаємо квазілінійну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, для якої передбачається, що в зоні зміни фізико-механічних властивостей (ФМВ) РС і початково-крайових умов виконується принцип гіперболічності [2].

У матричному представленні така математична модель РС у просторово-неоднорідному полі масових і поверхневих сил має вигляд [7, 8, 13]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B \frac{\partial W}{\partial S} = D, \quad (5)$$

де  $E$  — одинична матриця розміру  $12 \times 12$ ,  $B$  — матриця конвективних членів розміру  $12 \times 12$ . Вектор-стовпець правих частин  $D$  визначається розподіленими масовими і поверхневими силами, а також моментами цих сил і залежить від часу  $t$ , Лагранжевої координати  $S$  РС, вектора-стовпця невідомих  $W$ , розподілених масових і поверхневих сил.

**ОСОБЛИВОСТІ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ПРОГРАМИ  
ЗА ШВИДКОСТЯМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ**

Декомпозиція обчислювального алгоритму здійснювалася у такий спосіб. Якщо розглядають дві або більшу кількість хвиль різного типу, квазілінійна система гіперболічних рівнянь, отримана зниженням розмірності (5), є сингулярно збуреною (оскільки швидкості поширення хвиль різного типу в РС суттєво відрізняються). На першому етапі розділюють скінченнорізницевий оператор системи (5) відповідно до [14]:

$$(E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{1\xi} \Lambda_\xi)(E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{2\xi} \Lambda_\xi) \dots (E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{6\xi} \Lambda_\xi) W^{1+n} = \Delta t \tilde{D}^n + W^n, \quad (6)$$

тоді похибка апроксимації становить

$$O\left(\frac{\gamma^2 \Delta t^2}{\Delta S^2}\right). \quad (7)$$

Наприклад, якщо довжина кроків РС  $\Delta S = 5$  м, крок за часом  $\Delta t = 0.05$  с,  $\gamma = 1$ , похибка апроксимації (7) складе  $10^{-4}$ . У разі зменшення кроку за часом  $\Delta t$  похибка апроксимації (7) буде зменшуватися.

З точністю (7) оператор (6) можна розділити на шість кроків:

$$\begin{aligned} (E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{1\xi} \Lambda_\xi) W^{1+n} &= \Delta t \tilde{D}_1^n + W^n, \\ (E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{2\xi} \Lambda_\xi) W^{2+n} &= \Delta t \tilde{D}_2^{1+n} + W^{1+n}, \\ &\dots \\ (E + \Delta t \gamma \tilde{B}_{6\xi} \Lambda_\xi) W^{6+n} &= \Delta t \tilde{D}_6^{5+n} + W^{5+n}, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\tilde{D}_i^n$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , — декомпозиція вектора-стовпця правих частин (5) відповідно до типу хвиль.

Подальшу декомпозицію чисельного алгоритму (8) на основі швидкостей поширення хвиль здійснимо таким чином. Як характерний час можна розглядати час проходження одиничним імпульсом усієї довжини РС хвилями різного типу:

$$t_1 = \frac{L}{V_1}; \quad t_2 = \frac{L}{V_2}; \quad t_3 = \frac{L}{V_3}; \quad t_4 = \frac{L}{V_4}. \quad (9)$$

Крок обчислення за різницевою схемою вибирається згідно з умовою стійкості (критерій Куранта–Фрідрікса–Леві (КФЛ)) [15], що відповідає нерівності:

$$V_{\text{розрахункова}} > \frac{1}{p} V_{\text{фізична}}; \quad V_{\text{розрахункова}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \quad (10)$$

де параметр  $p \in (0, 1)$ , тобто розрахункова швидкість повинна перевищувати реальну швидкість поширення хвиль в РС. Нехай  $t = \min(t_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , тоді з (9) можна отримати

$$k_1 = \frac{t_1}{t}; \quad k_2 = \frac{t_2}{t}; \quad \dots \quad (11)$$

Коефіцієнти  $k_i$  показують, у скільки разів швидше встигає пробігти імпульс найшвидшої хвилі всю довжину РС у порівнянні з імпульсами інших типів хвиль. Таким чином, можна припустити, що протягом деякої кількості  $a$  етапів обчислення найшвидших хвиль величини, що описують характеристики інших хвиль, значно не зміняться. Відповідно до цих припущень факторизацію чисельного алгоритму можна виконати в такий спосіб.

**Крок 1.** Перші  $a$  кроків обчислюються лише найшвидші хвилі на основі однієї з частин скінченнорізницевого оператора (8) (інші невідомі величини враховуються з попереднього шару за часом), де  $a$  ( $a > 1$ ) — ціле число, мінімум чисел (11).

**Крок 2.** Обчислюються інші типи хвиль.

**Крок 3.** Перехід до першого кроку.

Подальша декомпозиція чисельного алгоритму полягає у виокремленні серед решти  $k_i$  мінімального і повторенні наведеної послідовності обчислення. Такий підхід дає змогу заощадити час обчислень і оперативно розв'язати задачу керування РС, швидко проводити аналіз перехідних процесів у РС, чисельно моделювати хвильові задачі великої розмірності.

Детальна організація обчислювального процесу за наведеним сценарієм залежить від конкретної постановки задачі, взаємозв'язку хвиль різного типу, від того, наскільки відрізняються значення швидкостей їхнього поширення для розглянутого конкретного випадку, а також від фізико-механічних характеристик РС, що і визначає величини  $p$  (10),  $a$ ,  $\Delta t$  та  $\Delta S$ . Основними параметрами ефективності адаптивного алгоритму є час виконання програми, прискорення і масштабованість (ефективність) обчислень. Максимальне прискорення  $S^*$  алгоритму обчислюється за формулою

$$S^* = \frac{T_1^*}{T_p^*} = \frac{T_1^*}{\alpha^* T_1^* + \frac{(1-\alpha^*)T_1^*}{r^*}} \leq \frac{1}{\alpha^*}, \quad (12)$$

а його ефективність  $E^*$  — за формулою [16]:

$$E^* = \frac{S^*}{r^*}, \quad (13)$$

де  $T_1^*$  — час виконання послідовного алгоритму;  $T_p^*$  — час виконання паралельної частини алгоритму;  $\alpha^*$  — частка послідовних операцій в алгоритмі;  $r^*$  — кількість однакових процесорів. Також за цими формулами оцінювалася ефективність програми обчислення динаміки РС.

#### ТЕСТУВАННЯ ПРОГРАМИ, ФАКТОРИЗОВАНОЇ ЗА ШВИДКОСТЯМИ ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ

Систему рівнянь, що описує нестационарну поведінку РС під час буксирування в рідині, у двовимірній постановці можна представити в матричному вигляді [8]:

$$E \frac{\partial W}{\partial t} + B_\xi \frac{\partial W}{\partial S} = D_\xi, \quad (14)$$

де  $E$  — одинична матриця розміру  $4 \times 4$ ,  $B_\xi$  — матриця при конвективних членах розміру  $4 \times 4$ ,  $D_\xi$  — вектор-стовпець правих частин,  $W$  — вектор-стовпець невідомих.

Для  $B_\xi$ ,  $D_\xi$  і  $W$  з формули (14) маємо:

$$B_\xi = \begin{pmatrix} \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{-1}{m} & 0 \\ \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{u_t}{1+eT} & 0 & \frac{u_t^2 + u_n^2}{1+eT} - \frac{T - Mu_t^2}{m+M} \\ \frac{-1}{e} & 0 & 0 & \frac{u_n}{e} \\ 0 & \frac{-1}{1+eT} & 0 & \frac{-u_t}{1+eT} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$D_\xi = \begin{pmatrix} \frac{-1}{m} \left( \omega \sin \varphi + \frac{\pi k_f \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_t| |u_t| \right) \\ \frac{-1}{m+M} \left( \omega \cos \varphi + \frac{k_n \rho d_0}{2} \sqrt{1+eT} |u_n| |u_n| \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \\ T \\ \varphi \end{pmatrix}$$

де  $d_0$  — початковий діаметр РС до деформування;  $\varphi$  — кут нахилу РС до горизонталі;  $m$ ,  $M$ ,  $\omega$  — відповідно маса, приєднана маса і плавучість одиниці довжини РС до деформування;  $k_f$ ,  $k_n$  — гідродинамічний коефіцієнт опору тертя і гідродинамічний коефіцієнт опору форми РС;  $\rho$  — щільність рідини;  $T$  — ефективний натяг РС;  $u_t$ ,  $u_n$  — проекції відносної швидкості обтікання РС відповідно на дотичну і нормаль;  $t$  — час;  $S$  — поточна довжина РС до деформування;  $e = \frac{1}{EF}$  — ефективна розтяжність РС;  $E$  — модуль Юнга;  $F$  — площа поперечного перерізу РС до деформування.

Граничні умови в корінній точці РС (точці сходження РС з лебідки, розташованої на кормі корабля ( $S = 0$ )), яка здійснює рівноприскорений рух, запишемо у вигляді

$$u_t(0, t) = V(t) \cos \varphi, \quad u_n(0, t) = V(t) \sin \varphi, \quad (16)$$

де  $u_t(0, t)$ ,  $u_n(0, t)$  — проекції відносної швидкості обтікання РС відповідно на поточну дотичну і нормаль у точці РС  $S = 0$ ;  $V(t)$  — швидкість (закон руху) судна-буксира.

На буксироване тіло діють сила тяжіння, сила Архімеда, динамічні сили опору та інерції приєднаної маси рідини, зусилля  $T$  у точці кріплення підводного буксированого апарату (ПБА). У цьому разі крайова умова, якщо  $S = L$ , матиме вигляд

$$\begin{aligned} Q^* + P^* \sin \varphi + M^* \left( \frac{\partial u_t}{\partial t} - u_n \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_t &= 0, \\ P^* \cos \varphi + M^* \left( \frac{\partial u_n}{\partial t} - u_t \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{K^* Z^* \rho}{2} \sqrt{u_t^2 + u_n^2} u_n &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

де  $Q^*$  — контактна сила в точці кріплення тіла;  $P^*$  — різниця гідростатичної виштовхувальної сили і сили тяжіння, що діють на ПБА;  $M^*$  — сума маси і приєднаної маси ПБА;  $K^*$  — коефіцієнт опору ПБА;  $Z^*$  — площа міделевого перерізу ПБА.

Для тестування адаптивного методу обчислень (з урахуванням декомпозиції за швидкостями поширення хвиль) були проведені обчислення для ФМВ двохвильової моделі РС (13)–(17) за таких фактичних даних:

- довжина системи  $L = 80$  м;
- коефіцієнт опору тертя  $k_f = 0.05$ ;
- коефіцієнт опору форми  $k_n = 0.15$ ;
- модуль Юнга  $E = 10^9$  Н/м<sup>2</sup>;
- ефективна ширина обтічника по міделю  $d_0 = 0.032$  м;
- від'ємна плавучість лінії  $\omega = 26.4$  Н/м;
- ефективна погонна маса (маса і приєднана маса) обтічника  $m + M = 3.5$  кг/м;
- ефективна маса заглиблювача  $M^* = 400$  кг;
- коефіцієнт опору заглиблювача  $K^* = 0.5$ ;
- площа міделевого перерізу заглиблювача  $Z^* = 0.1$  м<sup>2</sup>.

#### ОПИС ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Досліджувався режим переходу РС з прискоренням  $0.01$  м/с<sup>2</sup> з однієї постійної швидкості руху ( $V = 15$  вузлів) на іншу ( $V = 20$  вузлів). Для скінченнорізницевої апроксимації використовувалася неявна схема Кранка–Нікольсона. Деякі результати обчислення за вихідним алгоритмом, а також з різними варіантами розпаралелювання чисельного алгоритму за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення наведено в табл. 1 і 2.

У табл. 1 і 2 індекс «0» відповідає корінній точці БС, а індекс «L» — точці кріплення ПБА,  $\nu$  — у розглянутому випадку «коефіцієнт прискорення», який показує, у скільки разів рідше обчислювалися параметри поперечних (конфігураційних) хвиль у порівнянні з поздовжніми. Отже, чим рідше проводилося це обчислення, тим більшим ставало значення прискорення  $S^*$  паралельного алгоритму програми і зростала його ефективність  $E^*$ .

Таблиця 1

Кроки за часом	Відносна похибка $\Delta T$ обчислення осьового зусилля в РС за вихідним алгоритмом (без розпаралелювання для поздовжніх і поперечних хвиль)					
	$\nu = 2$		$\nu = 10$		$\nu = 100$	
	$\Delta T_L, \%$	$\Delta T_0, \%$	$\Delta T_L, \%$	$\Delta T_0, \%$	$\Delta T_L, \%$	$\Delta T_0, \%$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.3	0.0	1.1	0.2	2.0
10	0.0	1.1	0.2	2.3	3.0	4.5
15	0.1	1.9	0.4	4.0	4.0	6.2
20	0.5	3.0	1.0	5.9	3.4	7.6
25	1.0	3.5	1.2	7.0	3.1	8.4
30	1.2	3.8	1.8	7.2	2.8	9.0
35	1.4	3.8	2.0	7.5	2.6	9.4
40	1.5	3.6	2.2	7.7	2.4	9.7
45	1.3	3.1	2.1	7.8	2.3	9.9
50	0.9	2.0	2.0	7.9	2.2	10.0
55	0.6	0.7	1.7	7.8	2.1	10.1

Обчислення відносної похибки осьового зусилля  $T$  і кута нахилу  $\varphi$  здійснювалося за формулами:

$$\Delta T = \left| \frac{T_f - T}{T} \right|; \Delta \varphi = \left| \frac{\varphi_f - \varphi}{\varphi} \right|, \quad (18)$$

де  $T_f, \varphi_f$  — значення змінних, отримані за розпаралеленим алгоритмом,  $T, \varphi$  — значення змінних, отримані за вихідним алгоритмом (без розпаралелювання для поздовжніх і поперечних хвиль).

Для оцінювання ефективності реалізованих версій здійснювалося порівняння часу виконання факторизованої і вихідної версій програми. Кожне вимірювання проводилося три–п'ять разів. У всіх випадках розкид часу виконання не перевищував 0.3–0.5 %. Як випливає з табл. 1, чим більший коефіцієнт прискорення  $\nu$ , тим пізніше досягається максимум  $\Delta T$  (18). Якщо  $\nu = 100$ , максимум  $\Delta T$  досягається за 50–60 ітерацій за часом для цього прикладу, відтак відносна похибка обчислення осьового зусилля плавно зменшується. Метод декомпозиції за хвильовими швидкостями незначно впливає на точність обчислення параметрів поздовжніх хвиль (характерні величини  $T, u_t$ ). Найбільша відносна похибка (до 10 %) спостерігається лише за високої частоти квантування ( $\nu \geq 100$ ).

Якщо коефіцієнт прискорення  $\nu = 100$ , на наведеному у табл. 2 діапазоні ітерацій за часом максимум  $\Delta \varphi$  (18) не досягається. Під час обчислення геометричних характеристик РС метод декомпозиції за швидкостями поширення хвиль призводить до дворазового збільшення відносної похибки, що становить 20–25 % за умови великих значень коефіцієнта прискорення ( $\nu = 100$ ).

На основі аналізу табл. 1 і 2 можна зробити висновок щодо ефективності алгоритму декомпозиції за швидкостями поширення хвиль у разі, коли коефіцієнт прискорення  $\nu \leq 100$  для розглянутого прикладу обчислення характеристик поздовжніх і поперечних хвиль. До того ж максимальне значення коефіцієнта прискорення має бути обчислено заздалегідь під час тестових розрахунків діапазону зміни ФМВ РС і параметрів початково-крайових умов задачі.

Підсумкове зростання продуктивності програми становить не менше 50–200 % під час проведення обчислень в залежності від необхідної точності і варіантів декомпозиції БМ (формули (12), (13)); діапазон зміни кроку за часом  $\Delta t$  становив  $[0.001; 0.1]$  с, за довжиною  $\Delta S = [0.1; 10]$  м.

Таблиця 2

Кроки за часом	Відносна похибка $\Delta\varphi$ обчислення кута нахилу РС за вихідним алгоритмом (без розпаралелювання для поздовжніх і поперечних хвиль)					
	$\nu = 2$		$\nu = 10$		$\nu = 100$	
	$\Delta\varphi_L, \%$	$\Delta\varphi_0, \%$	$\Delta\varphi_L, \%$	$\Delta\varphi_0, \%$	$\Delta\varphi_L, \%$	$\Delta\varphi_0, \%$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.4	2.0	2.3	2.1	3.6
10	0.0	2.0	4.0	5.6	4.2	7.5
15	0.3	3.2	7.2	7.0	7.8	13.1
20	2.4	8.9	10.8	15.2	12.9	19.8
25	4.2	11.0	12.1	18.0	15.2	23.2
30	4.2	9.2	12.0	19.4	16.4	24.8
35	3.8	7.4	11.5	20.1	17.3	25.8
40	2.9	6.5	10.5	20.3	17.7	26.4
45	2.4	6.0	9.5	20.2	17.9	27.0
50	2.0	5.7	8.6	19.9	18.0	27.3
55	1.8	5.5	7.8	18.8	18.0	27.5

#### МОНОТОНІЗАЦІЯ ПРОФІЛЮ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ РС ЗА ДОПОМОГОЮ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ЗА ТИПАМИ ХВИЛЬ І ШВИДКОСТЯМИ ЇХНЬОГО ПРШИРЕННЯ

Необхідно відзначити певні складнощі, які виникають під час чисельної реалізації повного алгоритму розв'язання просторових задач динаміки РС (урахування трьох хвиль двох типів). Це є однією з причин високої чутливості програми і її чисельного алгоритму до похибок у заданні початково-крайових умов. Тож не можна розраховувати режим просторової 3D-еволюції РС для режимів повороту або розвороту буксира, задаючи на вході геометричні та силові характеристики РС за результатами чисельного розв'язання плоскої задачі статичної РС за початковою швидкістю буксирування. Обчислення потрібно проводити з урахуванням поширення ударного імпульсу. Для уникнення «розхитування» чисельного алгоритму можна скористатися такими способами:

— обчислювати режим 3D-еволюції РС за просторовими рівняннями моделі (5), почавши з мінімальної швидкості руху РС, яка поступово збільшується до необхідної;

— задавати початкові умови РС у площині за призначеної швидкості буксирування, але тоді необхідно обчислювати режим 3D-еволюції РС не відразу, а через деякий час, протягом якого початковий ударний імпульс за рахунок високо-частотного фільтра (осереднення) дисипує;

— монотонізувати профіль чисельного розв'язання, використавши алгоритм декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення.

Систему рівнянь, що описує нестационарну поведінку РС у просторі, запишемо в матричному вигляді [7, 8, 13]:

$$E \frac{\partial W^*}{\partial t} + B^* \frac{\partial W^*}{\partial S} = D^*, \quad (19)$$

де

$$D^* = \begin{pmatrix} -\omega \sin \varphi \\ m \\ -\omega \cos \varphi \\ m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W^* = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \\ u_b \\ T \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix},$$

$$B^* = \begin{pmatrix} \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{-u_b}{1+eT} & \frac{-1}{m} & 0 & 0 \\ \frac{-u_n}{1+eT} & \frac{u_t}{1+eT} & \frac{u_b \operatorname{tg} \varphi}{1+eT} & 0 & \frac{u_t^2 + u_n^2}{1+eT} - \frac{T}{m} & I_1 \\ \frac{-u_b}{1+eT} & 0 & \frac{u_t - u_n \operatorname{tg} \varphi}{1+eT} & 0 & \frac{u_n u_b}{1+eT} & I_2 \\ \frac{-1}{e} & 0 & 0 & 0 & \frac{u_n}{e} & \frac{-u_b \cos \varphi}{e} \\ 0 & \frac{-1}{1+eT} & 0 & 0 & \frac{-u_t}{1+eT} & \frac{u_b \sin \varphi}{1+eT} \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1+eT) \cos \varphi} & 0 & 0 & \frac{u_n \operatorname{tg} \varphi - u_t}{1+eT} \end{pmatrix}.$$

Тут

$$I_1 = \frac{u_b u_n}{1+eT} (\operatorname{tg} \varphi \sin \varphi - \cos \varphi) - \frac{2u_t u_b}{1+eT} \sin \varphi, \quad (20)$$

$$I_2 = \frac{T}{m} \cos \varphi - \frac{u_b^2 \cos \varphi}{1+eT} + (u_t - u_n \operatorname{tg} \varphi)(u_n \sin \varphi - u_t \cos \varphi) \frac{1}{1+eT},$$

$u_b$  — проекція відносної швидкості обтікання РС на бінормаль,  $\theta$  — кут сферичної системи координат. Опис інших змінних у (19), (20) наведено раніше. Крайові умови на верхньому кінці РС (суднової лебідці) мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_t &= V_{0x} \cos \theta \cos \varphi - V_{0y} \sin \theta \cos \varphi - V_{0z} \sin \varphi, \\ u_n &= -V_{0x} \cos \theta \sin \varphi + V_{0y} \sin \theta \sin \varphi - V_{0z} \cos \varphi, \\ u_b &= V_{0x} \sin \theta + V_{0y} \cos \theta, \end{aligned} \quad (21)$$

$\vec{V}_0 = V_{0x} \vec{i} + V_{0y} \vec{j} + V_{0z} \vec{k}$  — швидкість буксира. Крайові умови на ПБА аналогічні умовам (17), записаним для просторового випадку.

Чисельні дослідження проведено для початкового етапу 3D-еволюції РС під час циркуляції буксира. Було обчислено такі варіанти:

— чисельне розв'язання повної системи (19), (21) методом скінченних різниць з використанням схеми Кранка–Нікольсона. З проведеного чисельного дослідження випливає, що 50–100 кроків встановлення за часом є достатніми для повної дисипації початкового ударного імпульсу розузгодженості;

— застосування алгоритму декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення.

На рис. 1 і 2 показано еволюцію осьового зусилля в корінній точці РС і точці кріплення ПБА. Як впливає з рис. 1 і 2, алгоритм декомпозиції за типами хвиль

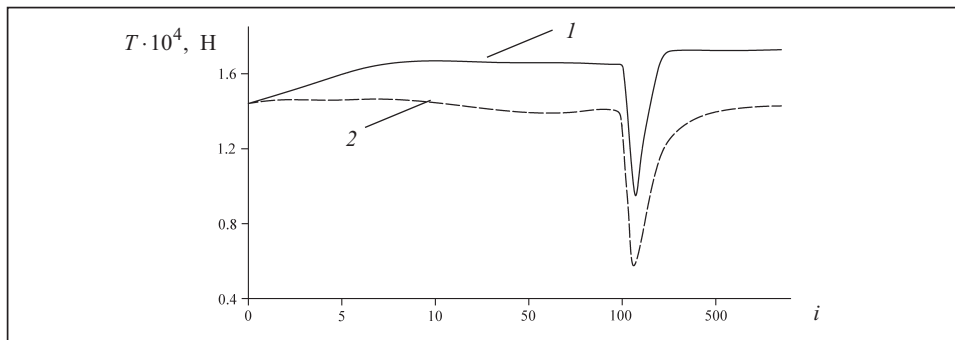


Рис. 1. Еволюція осьового зусилля в корінній точці РС на початковому етапі обчислення режиму еволюції: 1 — за вихідним алгоритмом; 2 — за факторизованим алгоритмом



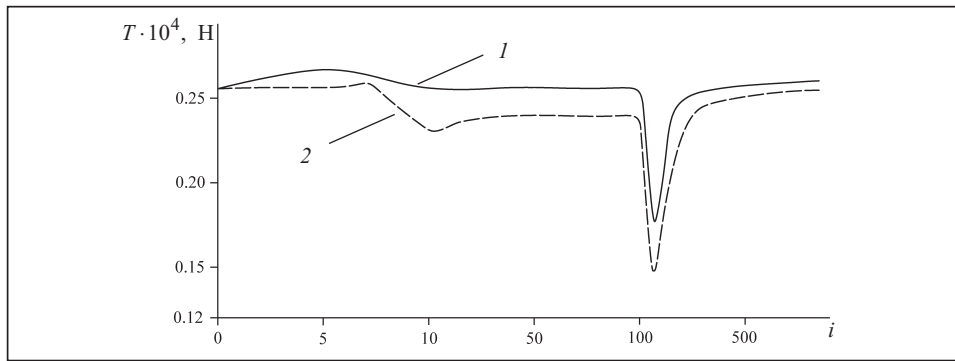


Рис. 2. Еволюція осьового зусилля в точці кріплення ПБА на початковому етапі обчислення режиму еволюції: 1 — за вихідним алгоритмом; 2 — за факторизованим алгоритмом

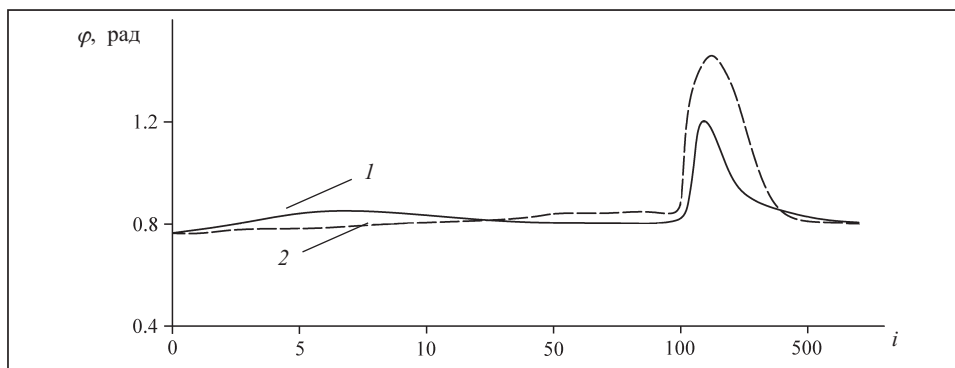


Рис. 3. Еволюція кута  $\varphi$  в корінній точці РС на початковому етапі обчислення режиму еволюції: 1 — за вихідним алгоритмом; 2 — за факторизованим алгоритмом

і швидкостями їхнього поширення має хороші дисипативні властивості і зумовлює деяке збільшення осьового зусилля на початковому етапі 3D-еволюції РС. Водночас після закінчення маневру буксира з РС алгоритм декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення швидше поновлює чисельні значення напружено-деформованого стану (НДС) РС до початкових, відповідних крайовим умовам до початку маневру. На рис. 3 і 4 наведено аналогічні результати для значень кута  $\varphi$  у корінній точці РС і точці кріплення ПБА до РС.

Якщо порівнювати результати, отримані за допомогою методу декомпозиції за типами хвиль і методу декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення, то в останньому випадку швидкість обчислення додатково збільшилася не менше ніж у два–три рази, що не спричинило істотної зміни чисельного розв'язування. Коефіцієнт прискорення  $\nu$  в розглянутому прикладі змінювався в діапазоні 30–50, що також незначно вплинуло на точність обчислення характеристик НДС РС у режимі 3D-еволюції.

**СКІНЧЕННОРІЗНИЦЕВА СХЕМА ІЗ ЗМІННИМИ ДИСПЕРСІЙНО-ДИФУЗІЙНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ, ВИКОРИСТОВУВАНА ПІД ЧАС ДЕКОМПОЗИЦІЇ АЛГОРИТМУ ОБЧИСЛЕННЯ БМ ЗА НАПРЯМКАМИ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗБУРЕНЬ І ТИПАМИ ХВИЛЬ**

Проведені дослідження показали, що для чисельного розв'язання задач, що описують взаємодію пружно-деформованої РС з потоком, використання явних схем недостатньо ефективне. Причиною цього є значні обмеження на КФЛ (10). Тож обчислення нестационарних режимів руху РС проводилися з використанням абсолютно стійкої неявної скінченнорізницевої схеми Кранка–Нікольсона. Ця схема мала перший порядок точності внаслідок лінеаризації нелінійних членів на розрахунковому кроці за часом. А через осциляції чисельного розв'язку під час переходу з одного часового шару на інший, які зумовлені наближеним чисель-

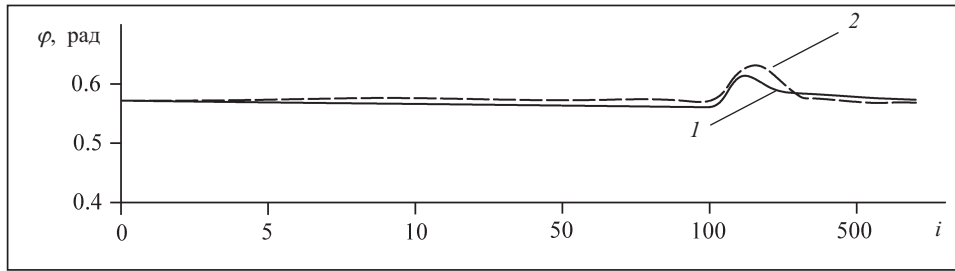


Рис. 4. Еволюція кута  $\varphi$  в точці кріплення ПБА на початковому етапі обчислення режиму еволюції: 1 — за вихідним алгоритмом; 2 — за факторизованим алгоритмом

ним розв'язком вихідних рівнянь внаслідок лінеаризації, виникла необхідність у примусовому пригніченні осциляцій високочастотним фільтром. Це було реалізовано осередненням усіх значень шуканих змінних на кожних трьох послідовних шарах за часом. Наслідком цього стало збільшення часу обчислення для розглянутих прикладів. Монотонні різницеві схеми, отримані на основі декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення, також були першого порядку точності.

Водночас для розв'язання низки практичних задач перший порядок точності різницевої схеми може бути недостатнім. У разі, якщо використовуються абсолютно стійкі неявні схеми другого порядку точності (Ейлера, Кранка–Нікольсона тощо), на кожному кроці обчислення за часом необхідно розв'язувати нелінійну систему рівнянь високої розмірності для обчислення збільшень значень шуканих змінних, що призводить до значного збільшення часу. Для подолання цих труднощів необхідно створювати ефективні різницеві схеми, які будуть враховувати особливості моделі нелінійної динаміки РС, а також будуть абсолютно стійкими, матимуть змінювані дисперсійно-дифузійні властивості, а найголовніше — значення збільшень шуканих змінних обчислюватиметься рекурентним способом, а не розв'язанням системи нелінійних рівнянь великої розмірності на кожному новому шарі за часом.

Для цього запишемо рівняння для збільшення вектора-розв'язку  $\Delta W$  на кроці обчислення за часом для рівнянь динаміки РС у полі масових і поверхневих сил:

$$E \frac{\partial \Delta W}{\partial t} + B^{*n} \frac{\partial \Delta W}{\partial S} = -B^{*n} \frac{\partial W^n}{\partial S} + D^{*n}, \quad (22)$$

де

$$W(t, S) = W(t_n, S) + \Delta W(t, S),$$

$$\Delta t = t_{n+1} - t_n.$$

Матрицю  $B^*$  можна представити у вигляді суми знаковизначених матриць згідно з правилами матричної алгебри [17]. Конкретний вигляд  $B^{*(+)}$  залежить від типів хвиль. З урахуванням апроксимаційних формул для похідних за Лагранжевою координатою  $S$  на  $n$ -му часовому шарі система рівнянь (22) у скінченно-різницевому запису матиме вигляд

$$\begin{aligned} (B^{*n})^+ \frac{\partial}{\partial S} \Delta W^n &= \frac{(B_{ij}^{*n})^+ \Delta W_{ij}^n - (B_{ij-1}^{*n})^+ \Delta W_{ij-1}^n}{\Delta S} = \Lambda_s^+ \Delta W^n, \\ (B^{*n})^- \frac{\partial}{\partial S} \Delta W^n &= \frac{(B_{ij}^{*n})^- \Delta W_{ij}^n - (B_{ij+1}^{*n})^- \Delta W_{ij+1}^n}{\Delta S} = \Lambda_s^- \Delta W^n. \end{aligned} \quad (23)$$

У (20) конвективні похідні апроксимуються однобічними розділеними різницями «проти потоку» [14]. Виходячи з (22) і (23), у матричній формі системи визначальних різницевих рівнянь запишемо так:

$$(E + \Delta t q (\Lambda_s^+ + \Lambda_s^-)) \Delta W^{n+1} = Q^n \Delta t; \quad Q^n = -B^{*n} \frac{\partial W^n}{\partial S} + D^{*n}, \quad (24)$$

де  $q$  — інтерполяційний параметр [14, 15], який визначає часовий шар  $t = t_n + q\Delta t$ , на якому записуються похідні за Лангранжевою координатою  $S$  в (24).

Факторизована за напрямками розповсюдження збурень і типами хвиль монотонна скінченнорізницева схема для обчислення збільшень  $\Delta W^{n+1}$  матиме вигляд [14]

$$(E + \Delta t q \Lambda_s^+) \Delta W^{n+1/2} = D^{*n} \Delta t; (E + \Delta t q \Lambda_s^-) \Delta W^{n+1} = \Delta W^{n+1/2}. \quad (25)$$

Якщо в (25) похідні, що фігурують у векторі правих частин, апроксимувати центрально розділеними різницями за Лангранжевою координатою  $S$ , то отримана скінченнорізницева схема матиме другий порядок точності, у випадку  $q = 1/2$ . Скінченнорізницева схема (25) неявна, проте визначення  $\Delta W^{n+1}$  проводиться на основі рекурентних обчислень з урахуванням того, що члени матриць  $B^{-(+)}$  обчислюються на  $n$ -му часовому шарі. За цими властивостями вона аналогічна відомим схемам Біма–Уормінга, які базуються на розкладанні матриці  $B_{ij}^{*n}$  конвективних членів у ряд Тейлора на попередньому часовому шарі [15], але на відміну від них додатково враховує особливості природи перехідних процесів у пружно-деформованій РС у потоці.

Можливість керування сітковою в'язкістю  $q$ , як зазначається в [14], є однією з основних переваг скінченнорізницевої схеми типу (25). За допомогою параметра  $q$  можна змінювати дисперсійно-дифузійні властивості схеми (25) і відповідно визначити оптимальний режим роботи чисельного алгоритму в залежності від досліджуваного фізичного процесу.

#### ВИСНОВКИ

1. Для чисельного розв'язання БМ запропоновано подальший розвиток чисельного методу хвильової факторизації [8] — алгоритму декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення. Тестовий аналіз двоххвильової задачі про прискорення РС дав змогу встановити діапазони його застосовності ( $\nu \leq 100$ ). Показано, що під час обчислень за рахунок різного ступеня квантування поздовжніх і поперечних хвиль можна домогтися подальшого збільшення швидкості обчислень у порівнянні з алгоритмом хвильової факторизації та з розв'язанням вихідної системи рівнянь, не скорочуючи діапазон стійких обчислень. Ця модифікація методу хвильової факторизації актуальна для розв'язання задач керування РС [18], оперативного чисельного аналізу перехідних режимів руху тощо, де швидкодія є критично необхідною.

Підсумкове зростання продуктивності програми становить не менше 50–200 % під час проведення обчислень в залежності від необхідної точності і варіантів декомпозиції БМ.

2. Проведено порівняльне оцінювання точності методів хвильової факторизації (1) та методу декомпозиції за типами хвиль і швидкостями їхнього поширення (2), а також вихідного алгоритму (3) для прикладу чисельного розв'язання задачі про 3D-еволюцію РС під час руху буксира на циркуляції. Порівняльний аналіз розрахункових даних показав монотонізацію чисельного розв'язання на основі факторизованих алгоритмів, їхню меншу чутливість до похибок у вихідних даних.

3. Побудовано факторизовану за напрямками розповсюдження збурень і типами хвиль скінченнорізницеву схему із змінними дисперсійно-дифузійними властивостями, яка матиме другий порядок точності, якщо  $q = 1/2$ . До того ж знаходження збільшень шуканих змінних проводиться рекурентним способом, а не розв'язанням системи нелінійних сіткових рівнянь великої розмірності на кожному новому шарі за часом.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Selezov I.T., Kryvonos Iu.G., Gandzha I.S. Wave propagation and diffraction. Mathematical methods and applications. Ser. Foundations of engineering mechanics. Springer, 2018. 237 p. <https://doi.org/10.1007/978-981-10-4923-1>.
2. Селезов И.Т. Развитие и приложение метода Коши–Пуассона в эластодинамике слоя и уравнение Тимошенко. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 3. С. 106–115.

3. Гладкий А.В., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Численно-аналитические методы исследования волновых процессов. Киев: Наук. думка, 2001. 452 с.
4. Гладкий А.В., Скопецкий В.В. О численном моделировании и оптимизации однонаправленных волновых процессов в неоднородных средах. *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 5. С. 177–186.
5. Губарев В.Ф. Рациональная аппроксимация систем с распределенными параметрами. *Кибернетика и системный анализ*. 2008. № 2. С. 99–115.
6. Трофимчук А.Н. Сейсмостойкость сооружений с учетом их взаимодействия с грунтовым основанием. Киев: УИИОСР, 2004.
7. Калюх Ю.И., Берчун Я.А. Четырехмодовая модель динамики распределенных систем. *Проблемы управления и информатики*. 2020. № 1. С. 5–15.
8. Калюх Ю.И., Вусатюк А.Е. Факторизация в задачах управления и динамики протяженных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 2. С. 117–128.
9. Troger H., Alperston A.P., Beletsky V.V., Dranovskii V.I., Khoroshilov V.S., Pirozhenko A.V., Zakrzhevskii A.E. Dynamics of tethered space systems (Advances in engineering series). 1st ed. CRC Press, 2017. 245 p.
10. Amabili M., Paidoussis M.P. Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction. *Applied Mechanics Reviews*. 2003. Vol. 56. P. 349–381.
11. Doyle R.L., Halkyard J. Large scale airlift experiments for application to deep ocean mining. *Proc. ASME 2007 26th Intern. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 2007. <https://doi.org/10.1115/OMAEE2007-29641>.
12. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. 332 с.
13. Трофимчук О.М., Калюх Ю.И., Дунін В.А., Берчун Я.О. Про можливість багатохвильової ідентифікації дефектів у палях. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 4. С. 98–108.
14. Хрущ В.К. Численные методы газовой динамики. Днепропетровск: Днепропетровский ун-т, 1981. 102 с.
15. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. Москва: Мир, 1980. 616 с.
16. Эффективность и ускорение параллельных программ. URL: <https://mipt.ru/drec/upload/d52/lab2-argpyfe27m6.pdf>.
17. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 4-е изд. Москва: Наука, 1988. 552 с.
18. Лебедь А.Г. Управление и динамика распределенной системы с переменной длиной. *Проблемы управления и информатики*. 2020. № 5. С. 40–50.

## Iu. Kaliukh, O. Lebid

### CONSTRUCTING THE ADAPTIVE ALGORITHMS FOR SOLVING MULTI-WAVE PROBLEMS

**Abstract.** The authors improve the numerical method of calculating multiwave models to increase the speed and monotony of the numerical solution of problems of multiwave dynamics for long systems such as space communications of the length of tens of kilometers; pipelines in both air and liquid; underwater towed systems; airlifts for the extraction of minerals from the bottom of the oceans of the length of 5 to 10 km, etc. The method is based on the decomposition of the numerical algorithm by wave types and wave velocities. The test analysis of the two-mode problem on acceleration of the towed long system allowed establishing the ranges of its application. It is shown that due to quantization in calculating longitudinal and transverse waves, it is possible to achieve a further increase in the computation speed compared to the wave factorization algorithm and compared to solving the full system of equations, without reducing the range of sustainable calculation. The final increase in the productivity of the program code is at least 50–200% when performing calculations, depending on the required accuracy and options for the decomposition of multiwave models. This modification of the wave factorization method is relevant in solving the problems of controlling a distributed system, operative analysis of transient motion modes, etc., where the pace of calculations is critically important. A comparative evaluation of the accuracy of the full algorithm, the wave factorization method, the decomposition algorithm by wave types and wave velocities has been carried out. Comparative analysis of the calculated data showed the monotonicity of the numerical solution profile on the basis of factorized algorithms, their lower sensitivity to errors in the original data. A finite-difference scheme factorization by perturbation directions and wave types with variable dispersion-diffusion properties is constructed.

**Keywords:** multiwave models, types and speed of waves, decomposition, algorithm, lengthy system.

*Надійшла до редакції 29.03.2021*