УДК 517.988

В.В. СЕМЕНОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *semenov.volodya@gmail.com.*

С.В. ДЕНИСОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *sireukr@gmail.com.*

А.В. КРАВЕЦЬ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *anya171kravets@gmail.com.*

АДАПТИВНИЙ ДВОЕТАПНИЙ БРЕГМАНІВСЬКИЙ МЕТОД ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ[1]

Анотація. Розглянуто двоетапний брегманівський метод Попова з новим адаптивним правилом вибору величини кроку, що не потребує знання Ліпшицевих констант та обчислення значень оператора в додаткових точках. Для варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та Ліпшицевими операторами, що діють у скінченновимірному лінійному нормованому просторі, доведено теорему збіжності методу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, псевдомонотонність, дивергенція Брегмана, двоетапний метод, адаптивність, збіжність.

ВСТУП

Багато цікавих та актуальних задач дослідження операцій та математичної фізики можна записати у вигляді варіаційних нерівностей [1–4]. Розв'язання таких задач є напрямом прикладного нелінійного аналізу, що активно розвивається [5–28]. З появою генерувальних змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник і у спеціалістів в галузі машинного навчання [11].

Найвідомішим узагальненням методу проєкції градієнта для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод Корпелевич [12]. Дослідженню цього алгоритму присвячено велику кількість публікацій. Зокрема, запропоновано модифікації екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину [13–16]. Ефективним сучасним варіантом екстраградієнтного методу є проксимальний дзеркальний метод Неміровського [17]. Цей метод можна проінтерпретувати як варіант екстраградієнтного методу з проєктуванням у сенсі дивергенції Брегмана [18]. Він дає змогу іноді ефективно використати структуру допустимої множини задачі. Наприклад, для симплекса як відстань можна вибрати дивергенцію Кульбака–Лейблера (дивергенція Брегмана, побудована за від'ємною ентропією) та отримати оператор проєктування на симплекс, що обчислюється явно.

Також цікавий метод двоїстої екстраполяції для розв'язання варіаційних нерівностей запропонував Ю.Є. Нестеров [19]. Адаптивні варіанти проксимального дзеркального методу Неміровського досліджено в [20–22]. На початку 1980-х років Л.Д. Попов запропонував модифікацію алгоритму Ерроу–Гурвіца для пошуку сідлових точок опукло-угнутих функцій [23]. У роботі [24] досліджено модифікацію методу Попова для розв'язання варіаційних нерівностей з монотонними операторами. У статті [25] запропоновано двоетапний про-

[1]Робота виконана за фінансової допомоги МОН України (проєкт «Математичне моделювання та оптимізація динамічних систем для оборони, медицини та екології», номер держреєстрації 0119U100337).

ксимальний алгоритм для розв'язання задачі рівноважного програмування, що є адаптацією методу з роботи [23] до загальних нерівностей Кі Фаня. У працях [26–28] досліджено двоетапний проксимальний дзеркальний метод, що є модифікацією двоетапного проксимального алгоритму [25] з застосуванням дивергенції Брегмана замість Евклідової відстані. Зауважимо, що останнім часом алгоритм Попова для варіаційних нерівностей став відомим серед спеціалістів з машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» [11].

Ця стаття продовжує роботи [16, 22, 26]. Вона присвячена вивченню двоетапного брегманівського методу [26] з новим адаптивним правилом выбору величини кроку, що не потребує знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора в додаткових точках (без процедур типу лінійного пошуку). Для варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та Ліпшицевими операторами, що діють у скінченновимірному лінійному нормованому просторі, доведено теорему збіжності методу.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай E — скінченновимірний дійсний лінійний простір з нормою $\|\cdot\|$ (не обов'язково Евклідовою). Двоїстий простір позначимо E^*. Для $a \in E^*$ та $b \in E$ позначатимемо (a, b) значення лінійної функції a в точці b. Двоїста норма $\|\cdot\|_*$ на E^* визначена стандартно: $\| a \|_* = \max\{(a, b)\colon \| b\| = 1\}$, що забезпечує виконання нерівності Шварца: $(a, b) \le \| a\|_* \| b\|$ для всіх $a \in E^*$, $b \in E$.

Нехай C — непорожня підмножина простору E; A – оператор, що діє з E в E^*. Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C: \ (Ax, y - x) \ge 0 \ \ \forall y \in C, \tag{1}$$

множину розв'язків якої позначимо S.

Припустимо, що виконано такі умови:

- множина $C \subseteq E$ опукла та замкнена;
- оператор $A\colon E \to E^*$ — псевдомонотонний та Ліпшицевий з константою $L > 0$ на просторі C;
- множина S непорожня.

Зауваження 1. Зазначимо, що псевдомонотонність оператора A на множині C полягає в тому, що для всіх x, $y \in C$ з нерівності $(Ax, y - x) \ge 0$ випливає $(Ay, y - x) \ge 0$. Монотонність оператора A на множині C означає, що для всіх x, $y \in C$ виконується $(Ax - Ay, x - y) \ge 0$. Оператор $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ вигляду

$$Tx = (e^{-(Ax, x)} + \beta)(Cx + d), \ x \in \mathbb{R}^m,$$

де A – додатньо визначена матриця, $\beta > 0$, C – невід'ємно визначена матриця, $d \in \mathbb{R}^m$, в загальному випадку не буде монотонним, але він псевдомонотонний та Ліпшиців на $\mathbb{R}^m$.

Розглянемо дуальну варіаційну нерівність [5]:

$$\text{знайти } x \in C: \ (Ay, x - y) \le 0 \ \ \forall y \in C. \tag{2}$$

Множину розв'язків (2) позначимо S^d. Зазначимо, що множина S^d опукла та замкнена. Нерівність (2) іноді називають слабкою або дуальною постановкою (1), а розв'язки (2) — слабкими розв'язками (1) [5]. Для псевдомонотонних операторів A завжди матимемо $S \subseteq S^d$. За наших припущень маємо $S^d = S$ [5].

Уведемо конструкції для формулювання алгоритму розв'язання задачі (1). Нехай опукла функція $\varphi: E \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ задовольняє умови:

- $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \subseteq E$ — непорожня опукла множина;
- фунція φ рівномірно неперервно диференційовна на $\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$;
- фунція φ сильно опукла відносно норми $\|\cdot\|$ з константою сильної опуклості 1:

$$\varphi(a) \ge \varphi(b) + (\nabla\varphi(b), a-b) + \frac{1}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Дивергенція Брегмана, відповідна функції φ, задається формулою

$$V(a,b) = \varphi(a) - \varphi(b) - (\nabla\varphi(b), a-b) \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi.$$

Приклади практично важливих дивергенцій Брегмана наведено в [29]. Розглянемо два основних приклади. Для $\varphi(\cdot) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, де $\|\cdot\|_2$ — Евклідова норма, матимемо

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2 .$$

Для $\mathbb{R}_+^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0\}$ та функції від'ємної ентропії $\varphi(x) = \sum_{i=1}^m x_i \ln x_i$ (вона сильно опукла з константою 1 відносно ℓ_1-норми на симплексі $S_m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^m x_i = 1\}$) отримаємо дивергенцію Кульбака–Лейблера

$$V(x,y) = \sum_{i=1}^m x_i \ln(x_i / y_i) - \sum_{i=1}^m (x_i - y_i),\ x \in \mathbb{R}_+^m,\ y \in \mathbb{R}_{++}^m = \operatorname{int}(\mathbb{R}_+^m).$$

Має місце корисна 3-точкова тотожність [29]

$$V(a,c) = V(a,b) + V(b,c) + (\nabla\varphi(b) - \nabla\varphi(c), a-b).$$

Із сильної опуклості функції φ випливає оцінка

$$V(a,b) \ge \frac{1}{2}\|a-b\|^2 \quad \forall a \in \operatorname{dom}\varphi,\ b \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi .$$

Нехай $K \subseteq \operatorname{dom}\varphi$ — непорожня замкнена опукла множина, причому $K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi \ne \varnothing$. Розглянемо сильно опуклі задачі мінімізації вигляду

$$P_x^K(a) = \arg\min_{y \in K} \{-(a, y-x) + V(y,x)\} \quad \forall a \in E^*,\ x \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi . \tag{3}$$

Відомо [29], що екстремальна задача (3) має єдиний розв'язок $z \in$ $\in K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, причому

$$-(a, y-z) + (\nabla\varphi(z) - \nabla\varphi(x), y-z) \ge 0 \quad \forall y \in K.$$

Останню нерівність з урахуванням 3-точкової тотожності можна записати у вигляді

$$-(a, y-z) + V(y,x) - V(y,z) - V(z,x) \ge 0 \quad \forall y \in K.$$

Відображення $P_x^K : E^* \to K \cap \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$ називають прокс-відображенням.

Зауваження 2. Точка $P_x^K(a)$ в Евклідовому випадку збігається з Евклідовою метричною проєкцією $P_K(x+a) = \arg\min_{y \in K} \|y-(x+a)\|_2$.

Зауваження 3. Для ймовірносного симплексу S_m та дивергенції Кульбака–Лейблера матимемо

$$P_x^{S_m}(a)=\left(\frac{x_1e^{a_1}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \frac{x_2e^{a_2}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}, \ldots, \frac{x_m e^{a_m}}{\sum_{j=1}^m x_j e^{a_j}}\right), \quad a\in\mathbb{R}^m,\ x\in \operatorname{ri}(S_m).$$

Надалі будемо припускати, що $C\subseteq \operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$.

У статті [26] для розв'язання задачі (1) запропоновано алгоритм

$$\begin{cases} y_n=P_{x_n}^C(-\lambda A y_{n-1}),\\ x_{n+1}=P_{x_n}^C(-\lambda A y_n), \end{cases} \tag{4}$$

де величина λ задавалась відповідно до вимоги $\lambda\in\left(0,(\sqrt{2}-1)\frac{1}{L}\right)$. Тобто використовувалась інформація про константи ліпшицевості оператора A. Відомо [26], що послідовності (x_n) та (y_n), які породжені (4), збігаються до розв'язку (1). У випадку компактності множини $C\subseteq E$ та монотонності оператора A має місце оцінка

$$G(z_N)=\max_{y\in C}(Ay, z_N-y)\le \frac{\lambda^{-1}R_C(x_1)+LV(x_1,y_0)}{N},$$

де $z_N=\frac{\sum_{n=1}^N y_n}{N}$ — усереднений вихід роботи алгоритму (4), $R_C(x_1)=$ $=\max_{y\in C}V(y,x_1)$ [27].

Використовуючи ітераційну схему (4) та роботи [16, 22], побудуємо двоетапний брегманівський алгоритм з адаптивним вибором величини λ, що не потребує знання Ліпшицевих констант та обчислень значень оператора A у додаткових точках (тобто без процедур типу лінійного пошуку).

АЛГОРИТМ З АДАПТИВНИМ РЕГУЛЮВАННЯМ

Опишемо запропонований алгоритм для розв'язання варіаційної нерівності (1).

Алгоритм 1. **«Екстраполяція з минулого» з адаптивним регулюванням**. Вибираємо $y_0\in E$, $x_1\in\operatorname{int}\operatorname{dom}\varphi$, $\tau\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$ та число $\lambda_1>0$. Покладемо $n=1$.

1. Обчислити
$$y_n=P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_{n-1}).$$
2. Обчислити
$$x_{n+1}=P_{x_n}^C(-\lambda_n A y_n).$$

Якщо $y_n=x_n=x_{n+1}$, то СТОП, інакше перейти до кроку 3.

3. Обчислити
$$\lambda_{n+1}=\begin{cases}\min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|y_n-y_{n-1}\|}{\|Ay_n-Ay_{n-1}\|_*}\right\}, & \text{якщо } Ay_{n-1}\ne Ay_n,\\ \lambda_n & \text{інакше.}\end{cases} \tag{5}$$

Покласти $n:=n+1$ та перейти до кроку 1.

Зауваження 4. Якщо $\varphi(\cdot)=\frac{1}{2}\|\cdot\|_2^2$, то алгоритм 1 набуває вигляду

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_{n-1}),$$

$$x_{n+1} = P_C(x_n - \lambda_n A y_n),$$

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\| y_n - y_{n-1}\|_2}{\| Ay_n - Ay_{n-1}\|_2}\right\}, \text{ якщо } Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n \text{ інакше,} \end{cases}$$

де $\tau \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$, $\lambda_1 > 0$.

Зауваження 5. Розглянемо варіаційну нерівність на стандартному симплексі:

$$\text{знайти } x \in S_m: \quad (Ax, y-x) \geq 0 \quad \forall y \in S_m.$$

Вибираємо дивергенцію Кульбака–Лейблера і отримуємо таку версію алгоритму:

$$y_i^n = \frac{x_i^n \exp(-\lambda_n (Ay_{n-1})_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^n \exp(-\lambda_n (Ay_{n-1})_j)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_i^{n+1} = \frac{x_i^n \exp(-\lambda_n (Ay_n)_i)}{\sum_{j=1}^m x_j^n \exp(-\lambda_n (Ay_n)_j)}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau \dfrac{\sum_{j=1}^m \left| y_j^n - y_j^{n-1} \right|}{\max_{j=\overline{1,m}} |(Ay_n)_j - (Ay_{n-1})_j|}\right\}, \text{ якщо } Ay_{n-1} \neq Ay_n, \\ \lambda_n \text{ інакше,} \end{cases}$$

де $(Ay_n)_i \in \mathbb{R}$ — i-та координата вектора $Ay_n \in \mathbb{R}^m$.

Послідовність (λ_n), що задається правилом (5), незростаюча та обмежена знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{L}\right\}$. Отже, існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$.

Для послідовностей (x_n), (y_n), що породжені алгоритмом 1, мають місце нерівності

$$-\lambda_n (Ay_{n-1}, y - y_n) \leq V(y, x_n) - V(y_n, x_n) - V(y, y_n) \ \forall y \in C, \tag{6}$$

$$-\lambda_n (Ay_n, y - x_{n+1}) \leq V(y, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) - V(y, x_{n+1}) \quad \forall y \in C. \tag{7}$$

Нерівність (7) дає змогу обґрунтувати правило зупинки алгоритму 1. Дійсно, для $x_{n+1} = x_n = y_n$ з нерівності (7) випливає

$$(Ax_n, y - x_n) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто $x_n \in S$.

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 1.

ДОВЕДЕННЯ ЗБІЖНОСТІ АЛГОРИМУ

Доведемо основну оцінку, що зв'язує відстані між породженими алгоритмом 1 точками та довільним елементом множини розв'язків S.

Лема 1. Для послідовностей (x_n), (y_n), що породжені алгоритмом 1, має місце нерівність

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - \left(1 - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(x_{n+1}, y_n) - \tag{8}$$

$$-\left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(y_n, x_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_n, y_{n-1}),$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. З псевдомонотонності оператора A випливає

$$(Ay_n, z - y_n) \le 0. \tag{9}$$

Із нерівності (7) випливає

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n (Ay_n, z - x_{n+1}). \tag{10}$$

До правої частини нерівності (10) додамо доданок $\lambda_n (Ay_n, y_n - z) \ge 0$. Отримаємо

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, x_n) + \lambda_n (Ay_n, y_n - x_{n+1}). \tag{11}$$

Із умови (6) випливає

$$-\lambda_n (Ay_{n-1}, x_{n+1} - y_n) \le V(x_{n+1}, x_n) - V(y_n, x_n) - V(x_{n+1}, y_n). \tag{12}$$

Оцінимо зверху $-V(x_{n+1}, x_n)$ в нерівності (11) за допомогою (12) і отримаємо

$$\begin{aligned} V(z, x_{n+1}) &\le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) + \\ &+ \lambda_n (Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}). \end{aligned} \tag{13}$$

Використаємо правило обчислення λ_{n+1} і оцінимо зверху доданок $\lambda_n (Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1})$. Матимемо

$$\begin{aligned} &\lambda_n (Ay_n - Ay_{n-1}, y_n - x_{n+1}) \le \lambda_n \| Ay_n - Ay_{n-1} \|_* \| y_n - x_{n+1} \| \le \\ &\le \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| y_n - y_{n-1} \| \| x_{n+1} - y_n \| \le \\ &\le \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} (\| y_n - x_n \| + \| x_n - y_{n-1} \|) \| x_{n+1} - y_n \| \le \\ &\le \tau \frac{\lambda_n}{2\lambda_{n+1}} \| y_n - x_n \|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{2\lambda_{n+1}} \| x_n - y_{n-1} \|^2 + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \| x_{n+1} - y_n \|^2 \le \\ &\le \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(y_n, x_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_n, y_{n-1}) + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_{n+1}, y_n). \end{aligned} \tag{14}$$

Застосуємо (14) в (13) та отримаємо

$$V(z, x_{n+1}) \le V(z, x_n) - V(x_{n+1}, y_n) - V(y_n, x_n) +$$

$$+ \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(y_n, x_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_n, y_{n-1}) + 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_{n+1}, y_n),$$

що й потрібно було довести. ■

Нагадаємо елементарний факт про властивості числових послідовностей.

Лемма 2. Нехай (a_n), (b_n) — дві послідовності невід'ємних чисел, що задовольняють нерівність

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n \quad \text{для всіх} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty} a_n$ і $\sum_n b_n < +\infty$.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. Нехай множина $C \subseteq E$ — опукла та замкнена, оператор $A: E \to E^*$ — псевдомонотонний та Ліпшиців з константою $L > 0$ та $S \neq \varnothing$. Тоді послідовності (x_n) та (y_n), що породжені алгоритмом 1, збігаються до деякої точки $\bar{z} \in S$.

Доведення. Нехай $z' \in S$. Покладемо

$$a_n = V(z', x_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_n, y_{n-1}),$$

$$b_n = \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(y_n, x_n) + \left(1 - \tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(x_{n+1}, y_n).$$

Нерівність (8) набуває вигляду

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n.$$

Оскільки існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, маємо

$$1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0,1) \quad \text{і} \quad 1 - \tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - 3\tau \in (0,1) \quad \text{для} \quad n \to \infty.$$

З леми 2 випливає, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \left(V(z', x_n) + \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} V(x_n, y_{n-1})\right)$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(y_n, x_n) + \left(1 - \tau \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+2}} - 2\tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) V(x_{n+1}, y_n) \right) < +\infty.$$

Звідси отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} V(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} V(x_{n+1}, y_n) = 0 \tag{15}$$

та збіжність числових послідовностей $(V(z', x_n))$ для всіх $z' \in S$. Із (15) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - x_n \| = \lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - y_n \| = 0. \tag{16}$$

З нерівності

$$V(z', x_n) \geq \frac{1}{2} \| z' - x_n \|^2$$

та (16) випливає обмеженість послідовностей (x_n), (y_n), а з нерівностей (11), (12) та граничних співвідношень (15) випливає

$$\lim_{n\to\infty} V(x_{n+1}, x_n) = 0$$

та

$$\lim_{n\to\infty} \| x_{n+1} - x_n \| = 0. \tag{17}$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що збігається до деякої точки $\bar{z} \in E$. Вочевидь $\bar{z} \in C$. Із граничних співвідношень (16) випливає, що $y_{n_k} \to \bar{z}$ і $x_{n_k+1} \to \bar{z}$. Покажемо, що $\bar{z} \in S$. Матимемо

$$(Ay_{n_k}, y - x_{n_k+1}) + \frac{1}{\lambda_{n_k+1}} (\nabla\varphi(x_{n_k+1}) - \nabla\varphi(x_{n_k}), y - x_{n_k+1}) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (18)$$

Здійснивши в (18) граничний перехід з урахуванням (17), отримаємо

$$(A\bar{z}, y - \bar{z}) \geq 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто $\bar{z} \in C$.

Покажемо, що $x_n \to \bar{z}$ (тоді з $\| x_n - y_n \| \to 0$ випливе, що $y_n \to \bar{z}$). Відомо, що існує границя

$$\lim_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = \lim_{n\to\infty} (\varphi(\bar{z}) - \varphi(x_n) - (\nabla\varphi(x_n), \bar{z} - x_n)).$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_{n_k}) = 0$, то і $\lim\limits_{n\to\infty} V(\bar{z}, x_n) = 0$. Звідси $\| x_n - \bar{z} \| \to 0$. ■

ВИСНОВКИ

Стаття продовжує роботи [16, 22, 26]. У ній запропоновано та досліджено двоетапний брегманівський метод [26], відомий як «Extrapolation from the Past», з новим адаптивним правилом вибору величини кроку, що не потребує знання Ліпшицевих констант і обчислень значень оператора в додаткових точках (тобто без процедур типу лінійного пошуку). Для варіаційних нерівностей з псевдомонотонними та Ліпшицевими операторами, що діють у скінченновимірному лінійному нормованому просторі, доведено теорему збіжності.

У наступних роботах ми плануємо розглянути спеціальний мультиблоковий варіант адаптивного двоетапного брегманівського методу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения. Москва: Мир, 1983. 256 с.
2. Байокки К., Капело А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Москва: Наука, 1988. 448 с.
3. Nagurney A. Network economics: A variational inequality approach. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 325 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3005-0.
4. Lyashko S.I., Klyushin D.A., Nomirovsky D.A., Semenov V.V. Identification of age-structured contamination sources in ground water. In: Boucekkline R., Hritonenko N., and Yatsenko Y. (eds.). *Optimal Control of Age-Structured Populations in Economy, Demography, and the Environment*. London; New York: Routledge, 2013. P. 277–292.
5. Konnov I.V. Combined relaxation methods for variational inequalities. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2001. 181 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56886-2.
6. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarily problem. Vol. 2. New York: Springer, 2003. 666 p.
7. Popov L.D. On schemes for the formation of a master sequence in a regularized extragradient method for solving variational inequalities. *Russian Mathematics*. 2004. Vol. 48, Iss. 1. P. 67–76.

8. Нурминский Е.А. Использование дополнительных малых воздействий в фейеровских моделях итеративных алгоритмов. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2008. Т. 48, № 12. С. 2121–2128.
9. Semenov V.V. On the parallel proximal decomposition method for solving the problems of convex optimization. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2010. Vol. 42, Iss. 4. P. 13–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v42.i4.20.
10. Semenov V.V. Modified extragradient method with Bregman divergence for variational inequalities. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 8. P. 26–37. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i8.30.
11. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A variational inequality perspective on generative adversarial networks. *arXiv preprint arXiv:1802.10551*. 2018.
12. Korpelevich G.M. An extragradient method for finding saddle points and for other problems. *Matecon*. 1976. Vol. 12, N 4. P. 747–756.
13. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings. *SIAM Journal on Optimization*. 2000. Vol. 38. P. 431–446.
14. Censor Y., Gibali A., Reich S. The subgradient extragradient method for solving variational inequalities in Hilbert space. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2011. Vol. 148. P. 318–335.
15. Verlan D.A., Semenov V.V., Chabak L.M. A strongly convergent modified extragradient method for variational inequalities with non-Lipschitz operators. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, N 7. P. 31–46. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v47.i7.40.
16. Denisov S.V., Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of extragradient algorithm with monotone step size strategy for variational inequalities and operator equations. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20.
17. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence $O(1/t)$ for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM Journal on Optimization*. 2004. Vol. 15. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629.
18. Брэгман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования. *Журн. вычисл. матем. и матем. физ*. 1967. № 3. С. 620–631.
19. Nesterov Yu. Dual extrapolation and its applications to solving variational inequalities and related problems. *Mathematical Programming*. 2007. Vol. 109, Iss. 2–3. P. 319–344.
20. Stonyakin F.S. On the adaptive proximal method for a class of variational inequalities and related problems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*. 2019. Vol. 25, N 2. P. 185–197. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2019-25-2-185-197.
21. Stonyakin F.S., Vorontsova E.A., Alkousa M.S. New version of mirror prox for variational inequalities with adaptation to inexactness. In: Jaćimović M., Khachay M., Malkova V., Posypkin M. (eds.). Optimization and Applications. OPTIMA 2019. Communications in Computer and Information Science. Cham: Springer, 2020. Vol. 1145. P. 427–442. https://doi.org/10.1007/978-3-030-38603-0_31.
22. Denisov S.V., Semenov V.V., Stetsyuk P.I. Bregman extragradient method with monotone rule of step adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5.

23. Popov L.D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1980. Vol. 28, Iss. 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092.

24. Malitsky Yu.V., Semenov V.V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 2. P. 271–277. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8.

25. Lyashko S.I., Semenov V.V. A new two-step proximal algorithm of solving the problem of equilibrium programming. In: Goldengorin B. (ed.). *Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications*. Cham: Springer, 2016. Vol. 115. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10.

26. Semenov V.V. A Version of the mirror descent method to solve variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 234–243. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9923-9.

27. Nomirovskii D.A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of two-stage method with Bregman divergence for solving variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 3. P. 359–368. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00142-7.

28. Chabak L., Semenov V., Vedel Y. A new non-Euclidean proximal method for equilibrium problems. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds.). Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* Vol. 836. Cham: Springer, 2019. P. 50–58. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_6.

29. Beck A. First-order methods in optimization. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2017. 479 p.

V.V. Semenov, S.V. Denisov, A.V. Kravets

ADAPTIVE TWO-STEP BREGMAN METHOD FOR VARIATIONAL INEQUALITIES

Abstract. The authors analyze the two-step Popov method with Bregman divergence and a new adaptive rule for choosing the step size, which does not require knowledge of Lipschitz constants and calculation of operator values at additional points. For variational inequalities with pseudo-monotone and Lipschitz continuous operators acting in a finite-dimensional normed linear space, a convergence theorem for the method is proved.

Keywords: variational inequality, pseudomonotonicity, Bregman divergence, two-step method, adaptivity, convergence.

Надійшла до редакції 25.01.2021