

І.В. ГАРЯЧЕВСЬКА

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: i.garyachevskaya@karazin.ua.

Д.О. ПРОТЕКТОР

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна,
e-mail: d.protector@karazin.ua.

**СИСТЕМА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ
НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ
РІВНЯННЯМ БЮРГЕРСА–КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА**

Анотація. Розглянуто систему комп'ютерного моделювання нелінійних процесів, які описуються рівняннями Бюргерса–Кортевега-де Фріза. Реалізовано чисельний розв'язок диференціального рівняння Бюргерса–Кортевега-де Фріза за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Як радіальні базисні функції в системі комп'ютерного моделювання застосовано Гаусову, мультіквадратичну, обернену квадратичну, обернену мультіквадратичну функції, а також функцію Ву з компактним носієм. Показано, що розв'язок нелінійного одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса–Кортевега-де Фріза в системі комп'ютерного моделювання візуалізується у вигляді тривимірної поверхні. Продемонстровано ефективність чисельного розв'язку в системі комп'ютерного моделювання на прикладі тестової задачі, для якої отримано чисельні розв'язки, а також обчислено середню відносну, середню абсолютну та максимальну похибки.

Ключові слова: нелінійне одновимірне рівняння Бюргерса–Кортевега-де Фріза, система комп'ютерного моделювання, нестационарна крайова задача, безсітковий метод, радіальні базисні функції.

ВСТУП

Рівняння Бюргерса–Кортевега-де Фріза (БКдФ) є нелінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними, яке було сформульовано Су та Гарднером [1]. Його використовують для опису багатьох фізичних процесів, таких як поширення хвиль на мілкій воді [2], поширення хвиль в еластичній трубці, що заповнена в'язкою рідиною [3], і у слабо нелінійних хвилях у плазмі з певними дисипативними ефектами [4]. Рівняння БКдФ є комбінацією рівняння Бюргерса та рівняння Кортевега-де Фріза. Рівняння Бюргерса вперше було отримано в 1939 році нідерландським фізиком Йоганнесом Мартінусом Бюргерсом під час дослідження турбулентності [5], тоді як рівняння Кортевега-де Фріза вперше було отримано в 1877 році французьким ученим Жозефом Буссінеском [6], але детальний аналіз цього рівняння був виконаний у 1895 році нідерландськими математиками Дідеріком Кортевегом і Густавом де Фрізом, які використовували його як нелінійну модель для аналізу зміни форми довгих хвиль, що рухаються у прямокутному каналі [7].

Чимало дослідників зосереджують свою увагу на вивченні рівняння БКдФ. На сьогодні отримано низку аналітичних розв'язків цього диференціального рівняння, а також ведуться розроблення різних чисельних методів його розв'язання. Демірай [8], Антар і Демірай [9] вивели рівняння БКдФ як основне еволюційне рівняння для поширення хвиль у заповнених рідиною пружних або в'язкопружних трубках, в яких були наявні ефекти дисперсії, дисипації та нелінійності. Закі [10] використав B -сплайни п'ятого порядку в методі скінченних елементів, тоді як Талаат С. Алі-ель-Данаф [11] використав B -сплайни шостого порядку для отримання чисельного розв'язку рівняння БКдФ. Для отримання аналітичного розв'язку рівняння БКдФ було застосовано метод розкладання Адомяна та варіаційний ітераційний метод [12, 13].

Протягом останнього десятиліття широко застосовувалися безсіткові методи, що ґрунтуються на використанні радіальних базисних функцій (РБФ) [14–17]. Ці методи є альтернативою поширеним скінченно-різницеvim методам. Безсіткові методи надають змогу уникнути побудови інтерполяційної сітки всередині області крайової задачі, що забезпечує їхню обчислювальну ефективність, оскільки генерація сітки, як і раніше, залишається найбільш трудомісткою частиною будь-якого чисельного моделювання, що ґрунтується на використанні сіткових методів.

У 1990 році Едвард Канса [18] увів схему розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, що ґрунтується на комбінованому застосуванні методу колокації та РБФ. У цьому підході розв'язок диференціального рівняння апроксимується за допомогою РБФ, а метод колокації застосовується для знаходження невідомих коефіцієнтів. Мультиквадратична, тонкий пластинчатий сплайн, Гаусова, обернена мультиквадратична та обернена квадратична функція — це глобальні РБФ (globally supported RBFs), які широко використовуються для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Хон і Мао [19] розширили застосування РБФ для чисельних розв'язків різних диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема нелінійного рівняння Бюргерса з ударними хвилями.

Метою цього дослідження є розроблення та програмна реалізація системи комп'ютерного моделювання нелінійних процесів, які описуються рівнянням БКдФ. Чисельний розв'язок рівняння БКдФ отримано за безсітковою схемою, що ґрунтується на комбінації методу колокації та радіальних базисних функцій. Як РБФ в системі комп'ютерного моделювання використано Гаусову, мультиквадратичну, обернену квадратичну, обернену мультиквадратичну функції, а також функцію Ву з компактним носієм [20].

ІТЕРАЦІЙНА СХЕМА

Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне неоднорідне рівняння БКдФ [21]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \varepsilon u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \eta \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = \\ = \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1)$$

де ε , η — дійсні параметри, що характеризують ефекти нелінійності та дисперсії відповідно, $\nu = 1/R$ — кінематична в'язкість, яка характеризує величину дисипації, R — число Рейнольдса, $f(x, t)$ — функція джерела.

Початкові умови задано у вигляді

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

Граничні умови Діріхле мають вигляд

$$\begin{cases} u(a, t) = g_1(t), \\ u(b, t) = g_2(t), \end{cases} \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Застосовуючи θ -схему для дискретизації за часом [22], отримуємо

$$u(x, t) \approx \theta u^{n+1} + (1-\theta)u^n, \quad (4)$$

$$f(x, t) \approx \theta f^{n+1} + (1-\theta)f^n, \quad (5)$$

$$\Delta u(x, t) \approx \theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta)\Delta u^n, \quad (6)$$

$$\nabla^3 u(x, t) \approx \theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta)\nabla^3 u^n, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad (8)$$

де $u^n = u(x, t^n)$, $f^n = f(x, t^n)$, $t^n = n\tau$, n — крок ітерації, τ — крок за часом, $0 \leq \theta \leq 1$ — ваговий коефіцієнт, $\Delta = \partial^2 / \partial x^2$, $\nabla^3 = \partial^3 / \partial x^3$.

Підставимо рівняння (4)–(8) у рівняння (1):

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \varepsilon(\theta u^{n+1} \nabla u^{n+1} + (1-\theta) u^n \nabla u^n) + \eta(\theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^3 u^n) = \\ = \nu(\theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta) \Delta u^n) + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n. \end{aligned} \quad (9)$$

Нелінійний член у рівнянні (9) лінеаризується в такий спосіб:

$$u^{n+1} \nabla u^{n+1} = u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1} - u^n \nabla u^n. \quad (10)$$

Підставимо рівняння (10) у рівняння (9):

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \varepsilon(\theta(u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1}) + \\ + (1-2\theta) u^n \nabla u^n) + \eta(\theta \nabla^3 u^{n+1} + (1-\theta) \nabla^3 u^n) = \\ = \nu(\theta \Delta u^{n+1} + (1-\theta) \Delta u^n) + \theta f^{n+1} + (1-\theta) f^n. \end{aligned} \quad (11)$$

Покладемо $\theta = 1$, тоді рівняння (11) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} u^{n+1} + \tau[\eta \nabla^3 u^{n+1} - \nu \Delta u^{n+1} + \varepsilon(u^{n+1} \nabla u^n + u^n \nabla u^{n+1})] = \\ = u^n + \tau[\varepsilon u^n \nabla u^n + f^{n+1}]. \end{aligned} \quad (12)$$

Рівномірно оберемо $N-2$ точки колокації $\{x_i\}_2^{N-1}$ всередині області (a, b) та дві точки на границі області: $x_1 = a$ і $x_N = b$. Наближений розв'язок рівняння (1) можна сконструювати за допомогою радіальних базисних функцій $\varphi(r_{ij})$:

$$u^n(x_i) \approx \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}), \quad (13)$$

де $r_j = \|x - x_j\|$ — Евклідова відстань між вузлами, α_j^n — невідомі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Підставляючи рівняння (13) в рівняння (12), отримуємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь для точок всередині області:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) + \tau \left[\eta \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi'''(r_{ij}) - \nu \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi''(r_{ij}) + \right. \\ \left. + \varepsilon \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi'(r_{ij}) + \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi'(r_{ij}) \right) \right] = \\ = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) + \tau \left[\varepsilon \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi(r_{ij}) \sum_{j=1}^N \alpha_j^n \varphi'(r_{ij}) + f_i^{n+1} \right] \end{aligned} \quad (14)$$

і для двох точок на границі області ($x_1 = a$ та $x_N = b$):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) = g_1(t), \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) = g_2(t). \quad (16)$$

У цій статті як РБФ використано такі функції:

$\varphi(r_{ij}) = e^{-(cr_{ij})^2}$ — Гаусова функція (GA);

$\varphi(r_{ij}) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2}$ — мультиквадратична функція (MQ);

$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{r_{ij}^2 + c^2}$ — обернена квадратична функція (IQ);

$\varphi(r_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{(r_{ij}^2 + c^2)^3}}$ — обернена мультиквадратична функція (IMQ);

$\varphi(r_{ij}) = (1 - cr_{ij})_+^7 (5 + 35cr_{ij} + 101c^2r_{ij}^2 + 147c^3r_{ij}^3 + 101c^4r_{ij}^4 + 35c^5r_{ij}^5 + 5c^6r_{ij}^6)$

— функція Ву з компактним носієм (Wu's CS-RBF),

де $c \neq 0$ — параметр форми, який обирають довільно, $(1 - cr_{ij})_+^7$ — функція відтинання, що визначається як

$$(1 - cr_{ij})_+^7 = \begin{cases} (1 - cr_{ij})^7, & \text{якщо } 1 - cr_{ij} \geq 0, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Рівняння (12) є рекурсивною формулою. Отже, це диференціальне рівняння можна розв'язувати крок за кроком, починаючи з початкових умов (2). Запишемо рівняння (13) разом з граничними умовами (3) в матричній формі:

$$[u]^n = A[\alpha]^n,$$

де $[u]^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_N^n]^T$, $[\alpha]^n = [\alpha_1^n, \alpha_2^n, \dots, \alpha_N^n]^T$ і $A = [\varphi(r_{ij})]$, $1 \leq i, j \leq N$.

Матрицю A можна розкласти на дві матриці A_d і A_b , які відповідають $N - 2$ внутрішнім точкам і двом точкам на границі області, у такий спосіб:

$$A = A_d + A_b, \quad (17)$$

де

$$A_d = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$A_b = \begin{cases} \varphi(r_{ij}), & \text{якщо } i = 1, N, 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Об'єднуючи рівняння (14)–(16) з урахуванням (17), отримуємо таке матричне рівняння:

$$\{A_d + \tau[\eta D_d - \nu C_d + \varepsilon(\text{diag}(B_d[\alpha]^n)A_d + \text{diag}(A_d[\alpha]^n)B_d)] + A_b\}[\alpha]^{n+1} = A_d[\alpha]^n + \tau\varepsilon(A_d[\alpha]^n) \cdot * (B_d[\alpha]^n) + [F]^{n+1}, \quad (18)$$

де

$$B_d = \begin{cases} \varphi'(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$C_d = \begin{cases} \varphi''(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$$D_d = \begin{cases} \varphi'''(r_{ij}), & \text{якщо } 2 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq N, \\ 0 & \text{інакше,} \end{cases}$$

$\text{diag}(A_d[\alpha]^n)$ — діагональна матриця з елементами $A_d[\alpha]^n$ на головній діагоналі, $[F]^{n+1} = [g_1^{n+1}, \tau f_2^{n+1}, \dots, \tau f_{N-1}^{n+1}, g_2^{n+1}]^T$, “ \cdot ” означає покомпонентний добуток двох векторів.

Рівняння (18) можна розв’язати відносно невідомих коефіцієнтів $[\alpha]^n$ методом Гауса або методами, що представлені в роботі [23]. Підставляючи значення коефіцієнтів $[\alpha]^n$ у рівняння (13), отримуємо наближений розв’язок рівняння (1) на n -му кроці.

Описану ітераційну схему реалізовано в розробленій системі комп’ютерного моделювання.

ОПИС СИСТЕМИ КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання (СКМ) нелінійних процесів, які описуються рівнянням БКдФ, наведено на рис. 1.

У верхній частині вікна СКМ розміщується меню, що складається з вкладок Language і Choice RBF. Вкладка Language надає змогу вибрати мову інтерфейсу СКМ, а у вкладці Choice RBF здійснюється вибір радіальної базисної функції.

Нижче меню розміщується панель інструментів, зображена на рис. 2.

На панелі інструментів розташовані кнопки, які надають змогу змінювати масштаб координатних осей та обертати їх у тривимірному просторі, відображати значення чисельного розв’язку крайової задачі в окремій точці, зберігати отриманий чисельний розв’язок у вигляді растрового або векторного зображення, відображати та приховувати сітку на тривимірній поверхні, а також експортувати чисельний розв’язок у бінарний файл.

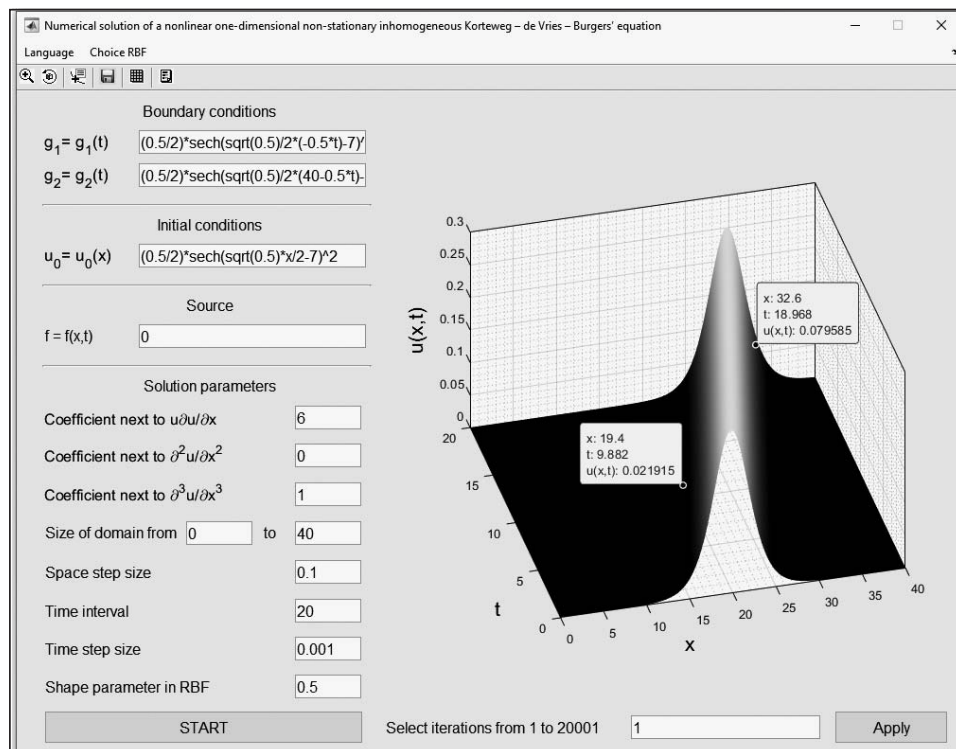


Рис. 1. Інтерфейс системи комп’ютерного моделювання

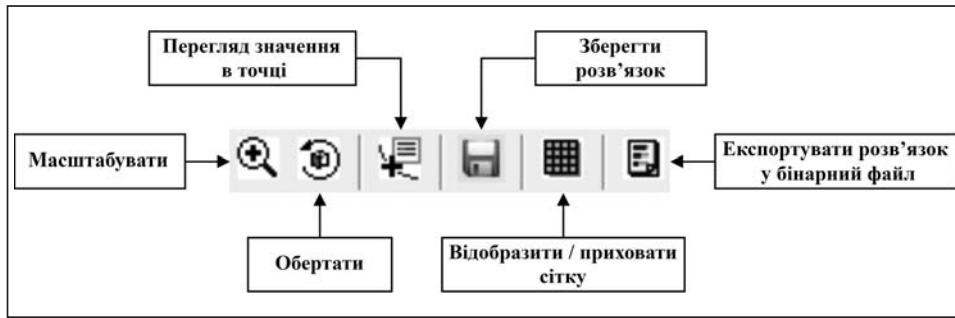


Рис. 2. Панель інструментів

Для розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними потрібно задати значення початкових і граничних умов. У СКМ передбачено задання граничних умов у числовому вигляді або як функції, що залежить від часу. У системі можна задавати як числові початкові умови, так і у вигляді функції, що залежить від координат. У СКМ функція джерела може набувати сталого значення або бути функцією, що залежить від координат і часу. До того ж, у системі можна налаштовувати такі параметри розв'язку, як розмір області крайової задачі, відстань між інтерполяційними вузлами, часовий інтервал, крок за часом, параметр форми РБФ, а також коефіцієнти в рівнянні БКдФ.

Чисельний розв'язок рівняння БКдФ у системі можна візуалізувати у вигляді тривимірної поверхні (див. рис. 1). В СКМ реалізовано можливість візуалізації чисельного розв'язку на окремих проміжках часу у вигляді тривимірних графіків (рис. 3).

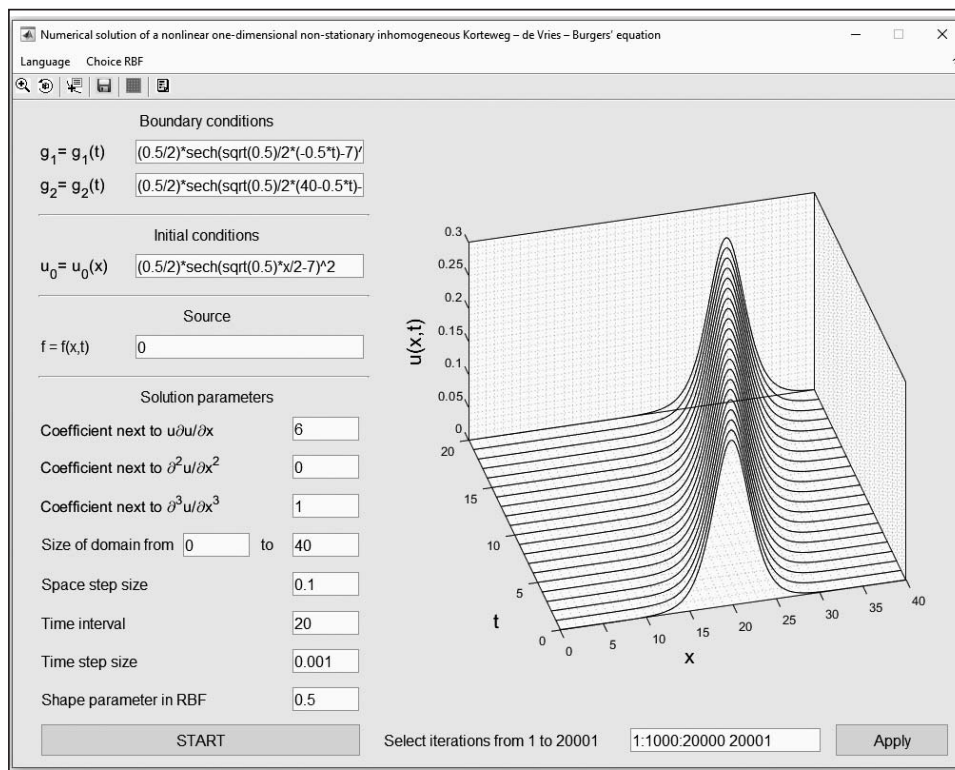


Рис. 3. Візуалізація розв'язку в СКМ на окремих проміжках часу

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

У цьому розділі продемонстровано застосування створеної СКМ на прикладі тестової задачі та оцінено точність отриманих розв'язків. Для оцінювання точності апроксимації використано середню відносну похибку $\text{rerr}(u)$, середню абсолютну похибку $\text{aerr}(u)$ і максимальну похибку $\text{merr}(u)$, які обчислюють за формулами

$$\text{rerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \frac{\sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2}{\sum_{j=1}^N u_j^2}}, \quad \text{aerr}(u) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (u_j - \tilde{u}_j)^2},$$

$$\text{merr}(u) = \max_j |u_j - \tilde{u}_j|,$$

де u_j та \tilde{u}_j є відповідно аналітичними та чисельними розв'язками, а N — загальна кількість інтерполяційних вузлів.

Тестова задача. Розглянемо нелінійне одновимірне нестационарне рівняння БКдФ

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \varepsilon u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0,$$

де $x \in [-20, 20]$, $d_x = 0.5$, $t \in [0, 0.01]$, $\tau = 0.001$, $\varepsilon = 1$, $\eta = 0.1$, $\nu = 0.004, 0.04, 0.1, 1$.

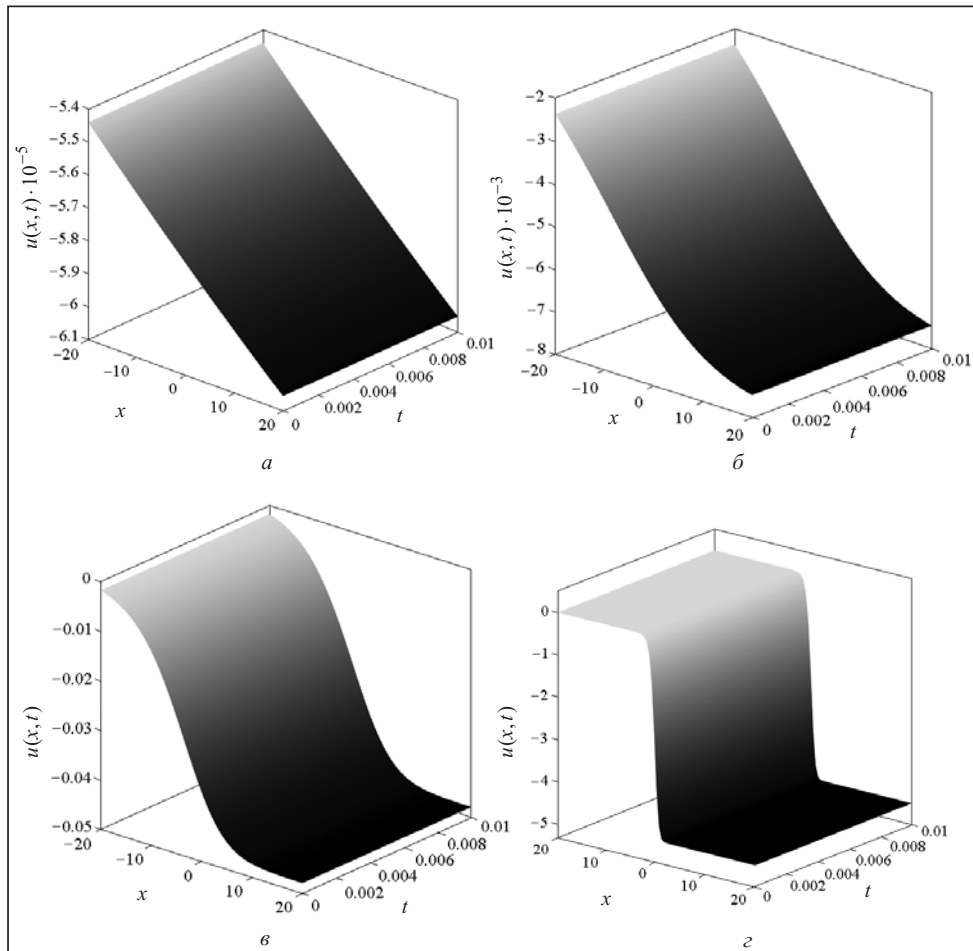


Рис. 4. Візуалізація чисельних розв'язків тестової задачі для різних значень кінематичної в'язкості: $\nu = 0.004$ (а); $\nu = 0.04$ (б); $\nu = 0.1$ (г); $\nu = 1$ (з)

Аналітичний розв'язок задано рівнянням

$$u(x, t) = -\frac{6\nu^2}{25\eta} \left[1 + \tanh \left(\frac{\nu}{10\eta} \left(x + \frac{6\nu^2}{25\eta} t \right) \right) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\nu}{10\eta} \left(x + \frac{6\nu^2}{25\eta} t \right) \right) \right].$$

На рис. 4 представлено візуалізацію чисельних розв'язків тестової задачі для різних значень параметра ν , що отримані з використанням оберненої мультиквадратичної РБФ з параметром форми $c = 0.02$.

З представлених розв'язків видно, що зі збільшенням значення кінематичної в'язкості ν розв'язок рівняння БКдФ має тенденцію поводити себе як розв'язок рівняння Бюргерса, оскільки формується крутий профіль хвилі.

У табл. 1 наведено значення середніх відносних, середніх абсолютних і максимальних похибок чисельних розв'язків тестової задачі в момент часу $t = 0.01$ для різних значень параметра ν . Отримані результати відповідають значенням параметра форми $c = 2$ для GA, та $c = 0.02$ для MQ, IQ, IMQ та Wu's CS-RBF.

Похибки чисельних розв'язків свідчать про те, що апроксимація глобальними РБФ призводить до меншої точності наближеного розв'язку, ніж апроксимація функцією Ву з компактним носієм.

Таблиця 1. Значення похибок чисельних розв'язків тестової задачі в момент часу $t = 0.01$ для різних значень кінематичної в'язкості ν

ν	Тип РБФ	rerr (u)	aerr (u)	merr (u)
0.004	GA	$1.046279331 \cdot 10^{-10}$	$5.422600117 \cdot 10^{-14}$	$3.357532486 \cdot 10^{-13}$
	MQ	$1.046279220 \cdot 10^{-10}$	$5.422599539 \cdot 10^{-14}$	$3.357532893 \cdot 10^{-13}$
	IQ	$1.046278878 \cdot 10^{-10}$	$5.422597769 \cdot 10^{-14}$	$3.357531402 \cdot 10^{-13}$
	IMQ	$1.046278980 \cdot 10^{-10}$	$5.422598295 \cdot 10^{-14}$	$3.357529505 \cdot 10^{-13}$
	Wu's CS-RBF	$1.044054214 \cdot 10^{-10}$	$5.411067898 \cdot 10^{-14}$	$3.356206710 \cdot 10^{-13}$
0.04	GA	$2.077950141 \cdot 10^{-8}$	$1.059294845 \cdot 10^{-9}$	$3.061785944 \cdot 10^{-9}$
	MQ	$2.077950139 \cdot 10^{-8}$	$1.059294844 \cdot 10^{-9}$	$3.061785948 \cdot 10^{-9}$
	IQ	$2.077950140 \cdot 10^{-8}$	$1.059294845 \cdot 10^{-9}$	$3.061785969 \cdot 10^{-9}$
	IMQ	$2.077950141 \cdot 10^{-8}$	$1.059294845 \cdot 10^{-9}$	$3.061785974 \cdot 10^{-9}$
	Wu's CS-RBF	$2.077962112 \cdot 10^{-8}$	$1.059300948 \cdot 10^{-9}$	$3.061809422 \cdot 10^{-9}$
0.1	GA	$2.053273320 \cdot 10^{-7}$	$6.399708596 \cdot 10^{-8}$	$1.528343192 \cdot 10^{-7}$
	MQ	$2.053273321 \cdot 10^{-7}$	$6.399708598 \cdot 10^{-8}$	$1.528343192 \cdot 10^{-7}$
	IQ	$2.053273321 \cdot 10^{-7}$	$6.399708597 \cdot 10^{-8}$	$1.528343191 \cdot 10^{-7}$
	IMQ	$2.053273321 \cdot 10^{-7}$	$6.399708598 \cdot 10^{-8}$	$1.528343191 \cdot 10^{-7}$
	Wu's CS-RBF	$2.053274167 \cdot 10^{-7}$	$6.399711236 \cdot 10^{-8}$	$1.528341198 \cdot 10^{-7}$
1	GA	$5.317835830 \cdot 10^{-5}$	$1.628739445 \cdot 10^{-3}$	$1.091699730 \cdot 10^{-2}$
	MQ	$5.317835830 \cdot 10^{-5}$	$1.628739445 \cdot 10^{-3}$	$1.091699730 \cdot 10^{-2}$
	IQ	$5.317835830 \cdot 10^{-5}$	$1.628739445 \cdot 10^{-3}$	$1.091699730 \cdot 10^{-2}$
	IMQ	$5.317835830 \cdot 10^{-5}$	$1.628739445 \cdot 10^{-3}$	$1.091699730 \cdot 10^{-2}$
	Wu's CS-RBF	$5.314929394 \cdot 10^{-5}$	$1.627849266 \cdot 10^{-3}$	$1.091271814 \cdot 10^{-2}$

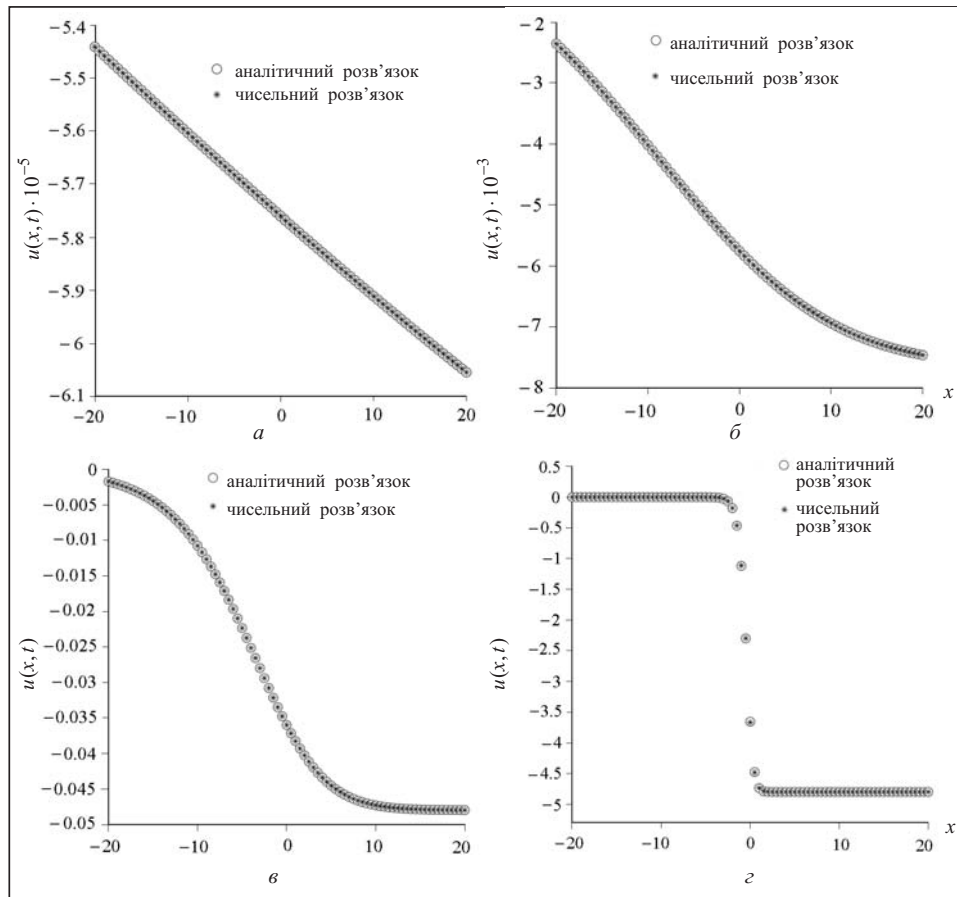


Рис. 5. Графіки аналітичних та чисельних розв'язків тестової задачі в момент часу $t = 0.01$ для різних значень кінематичної в'язкості: $\nu = 0.004$ (а); $\nu = 0.04$ (б); $\nu = 0.1$ (в); $\nu = 1$ (з)

На рис. 5 для порівняння представлено графіки аналітичних та чисельних розв'язків тестової задачі в момент часу $t = 0.01$ для різних значень кінематичної в'язкості ν . Наближені розв'язки отримано з використанням оберненої мультиквадратичної РБФ з параметром форми $c = 0.02$.

ВИСНОВКИ

Розроблено та програмно реалізовано систему комп'ютерного моделювання нелінійних процесів, які описуються рівняннями БКдФ. Чисельне розв'язання диференціального рівняння БКдФ здійснено за безсітковою схемою з використанням радіальних базисних функцій. Ефективність чисельного розв'язання в СКМ продемонстровано на прикладі тестової задачі, для якої отримано наближені розв'язки, а також обчислено середню відносну, середню абсолютну та максимальну похибки.

Варто відзначити, що радіальні базисні функції, що використовуються в СКМ для апроксимації, містять параметр форми, який впливає як на точність отриманого розв'язку, так і на обумовленість системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Оптимальні параметри форми для всіх розрахунків були знайдені експериментально. Вибір оптимальних параметрів форми радіальних базисних функцій досі залишається нерозв'язаним завданням.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Su C.H., Gardner C.S. Korteweg-de Vries equation and generalizations. III. Derivation of the Korteweg-de Vries equation and Burgers equation. *Journal of Mathematical Physics*. 1969. Vol. 10, N 3. P. 536–539. <https://doi.org/10.1063/1.1664873>.
2. Jonson R.S. Shallow water waves on a viscous fluid — the undular bore. *The Physics of Fluids*. 1972. Vol. 15, N 10. P. 1693–1699. <https://doi.org/10.1063/1.1693764/>.
3. Jonson R.S. A nonlinear equation incorporating damping and dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*. 1970. Vol. 42, N 1. P. 49–60. <https://doi.org/10.1017/S0022112070001064>.
4. Grad H., Hu P.N. Unified shock profile in a plasma. *The Physics of Fluids*. 1967. Vol. 10, N 12. P. 2596–2602. <https://doi.org/10.1063/1.1762081>.
5. Burgers J.M. Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion. *Verhandelingen der Koninklijke Nederlandsche Akademie van Wetenschappen*. 1939. Vol. 17, N 2. P. 1–53. https://doi.org/10.1007/978-94-011-0195-0_10.
6. Boussinesq J. Essai sur la théorie des eaux courantes. Paris: Imprimerie Nationale, 1877. 770 p.
7. Korteweg D.J., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1895. Vol. 39, N 240. P. 422–443. <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>.
8. Demeiray H. Nonlinear waves in a thick-walled viscoelastic tube filled with an inviscid fluid. *International Journal of Engineering Science*. 1998. Vol. 36, N 3. P. 345–357. [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(97\)00056-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(97)00056-6).
9. Antar N., Demiray H. Nonlinear waves in an inviscid fluid contained in a prestressed viscoelastic thin tube. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. 1997. Vol. 48. P. 325–340. <https://doi.org/10.1007/s000330050034>.
10. Zaki S.I. A quintic B-spline finite elements scheme for the KdVB equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Vol. 188, Iss. 1–3. P. 121–134. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00142-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00142-5).
11. El-Danaf T.S. Septic B-spline method of the Korteweg-de Vries–Burger’s equation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Vol. 13, Iss. 3. P. 554–566. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.05.010>.
12. Kaya D. An application of the decomposition method for the KdVB equation. *Applied Mathematics and Computation*. 2004. Vol. 152, N 1. P. 279–288. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00566-6](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00566-6).
13. Soliman A.A. A numerical simulation and explicit solutions of KdV–Burgers’ and Lax’s seventh-order KdV equations. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2006. Vol. 29, N 2. P. 294–302. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.08.054>.
14. Колодяжний В.М., Лисин Д.А. Бессеточный метод решения нестационарных задач теплопроводности с использованием атомарных радиальных базисных функций. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49, № 3. С. 124–131.
15. Протектор Д.О., Лисин Д.А., Лисина О.Ю. Численный анализ решений двумерных задач теплопроводности по бессеточной схеме с использованием фундаментальных и общих решений. *Прикладні питання математичного моделювання*. 2019. Т. 2, № 1. С. 98–111. <https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-8>.
16. Гарячевська І.В., Протектор Д.О. Система комп’ютерного моделювання для числового вирішення одновимірного нестационарного рівняння Бюргерса. *Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління»*. 2019. Т. 43. С. 11–19. <https://doi.org/10.26565/2304-6201-2019-43-02>.
17. Xie H., Zhou J., Jiang Z., Guo X. Approximations for Burgers’ equations with C-N scheme and RBF collocation methods. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*. 2016. Vol. 9, Iss. 6. P. 3727–3734. <http://dx.doi.org/10.22436/jnsa.009.06.23>.
18. Kansa E.J. Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — I surface approximations and partial derivative estimates. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19, Iss. 8–9. P. 127–145. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90270-T](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90270-T).

19. Hon Y.C., Mao X.Z. An efficient numerical scheme for burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*. 1998. Vol. 95, N 1. P. 37–50. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(97\)10060-1](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(97)10060-1).
20. Wu Z. Compactly supported positive definite radial functions. *Advances in Computational Mathematics*. 1995. Vol. 4. P. 283–292. <https://doi.org/10.1007/BF03177517>.
21. Montoya C. Inverse source problems for the Korteweg-de Vries–Burgers equation with mixed boundary conditions. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2019. Vol. 27, N 6. P. 777–794. <https://doi.org/10.1515/jiip-2018-0108>.
22. Langtangen H.P., Linge S. Finite difference computing with PDEs. Cham: Springer International Publishing, 2017. 507 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-55456-3>.
23. Сергиенко И.В., Химич А.Н., Яковлев М.Ф. Методы получения достоверных решений систем линейных алгебраических уравнений. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. Т. 47, № 1. С. 68–80.

I.V. Hariachevska, D.O. Protektor

COMPUTER SIMULATION SYSTEM FOR NONLINEAR PROCESSES DESCRIBED BY THE KORTEWEG-DE VRIES–BURGERS EQUATION

Abstract. The article discusses the computer simulation system of nonlinear processes described by the Korteweg-de Vries–Burgers equation. The numerical solution of the Korteweg-de Vries–Burgers differential equation is implemented by the meshless approach using radial basis functions. The computer simulation system uses the following radial basis functions: Gaussian, multiquadric, inverse quadratic, inverse multiquadric, and Wu’s compactly-supported radial function. The solution of the nonlinear one-dimensional non-stationary Korteweg-de Vries–Burgers equation in the computer simulation system is visualized as a three-dimensional surface. The efficiency of the numerical solution in the computer simulation system is demonstrated by a benchmark problem for which numerical solutions were obtained, and the average relative error, average absolute error, and maximum error were calculated.

Keywords: nonlinear one-dimensional Korteweg-de Vries–Burgers equation, computer simulation system, non-stationary boundary-value problem, meshless method, radial basis functions.

Надійшла до редакції 19.04.2021