



СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

УДК 519.85

Ю.Г. СТОЯН

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: yustoyan19@gmail.com.

Т.Є. РОМАНОВА

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: tarom27@yahoo.com.

О.В. ПАНКРАТОВ

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: pankratov2001@yahoo.com.

П.І. СТЕЦЮК

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна, e-mail: stetsyukp@gmail.com.

С.В. МАКСИМОВ

Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України, Харків, Україна, e-mail: maksimovsergey08@gmail.com.

РОЗРІДЖЕНЕ ЗБАЛАНСОВАНЕ КОМПОНУВАННЯ ЕЛІПСОЇДІВ¹

Анотація. Розглянуто задачу генерування сфероїдних порожнин у тривимірній області, що має складну геометрію з урахуванням обмежень на «розрідженість» розміщення порожнин та умови рівноваги. Задачу зведено до оптимізаційної задачі компоновки еліпсоїдів обертання в опуклому контейнері (циліндрі або кубоїді) з урахуванням зон заборони, обмежень на допустимі відстані між еліпсоїдами та умов балансу з метою максимізації мінімальної відстані між кожною парою еліпсоїдів та еліпсоїдом і межею контейнера. Визначено псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції для аналітичного опису обмежень розміщення. Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Запропоновано метод розв'язання із стратегією мультистарту, алгоритми пошуку допустимих та локально-оптимальних розв'язків. Наведено результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: розріджене компоновання, еліпсоїд обертання (сфероїд), квазі-*phi*-функція, нелінійне програмування, *r*-алгоритм Шора.

ВСТУП

Задача пакування (компоновання) еліпсоїдів є предметом інтенсивних теоретичних і практичних досліджень. Незважаючи на те, що у багатьох роботах розглядалась задача пакування куль (див., наприклад, [1–3]), задачі пакування еліпсоїдів приділялось більше уваги тільки в останні кілька років. Ця задача виникає у багатьох практичних застосуваннях, таких як розроблення високоміцних керамічних матеріалів, вирощування кристалів, моделювання структури рідин, кристалів і скла, моделювання руху і пресування сипучих речовин, у термодинаміці в процесі моделювання переходу рідин у кристалічну

¹ Робота підтримана Національним фондом досліджень України (грант № 2020.02/0128, Стоян Ю.Г., Романова Т.Є.) та Volkswagen Foundation (грант № 97 775, Романова Т.Є., Стецюк П.І.).

форму, у нанотехнологіях, хімічній промисловості, сучасній біології під час моделювання розміщення хромосом в ядрах клітин людини, в ядерній медицині для виробництва ліків, в адитивних технологіях для оптимізації геометрії промислових виробів, а також у робототехніці в процесі моделювання руху і взаємодії частин роботів та у багатьох інших галузях науки і техніки. У [4] обґрунтовано метод комп'ютерного моделювання, узагальнювальний алгоритм «force-biased», за допомогою якого статистично досліджується геометрична структура довільного пакування сфероїдів. У [5] розглянуто задачу моделювання колізії руху (зіткнення) еліпсоїдів. Моделювання відношення неперетину пари еліпсоїдів описано в [6], де розглядають апроксимацію еліпсоїда перетином двох куль для забезпечення неперетину пари апроксимованих об'єктів. У [7] наведено задачу послідовного пакування еліпсоїдів з використанням варіаційних методів.

Аналіз зазначених публікацій показав, що лише в декількох роботах задачі пакування еліпсоїдів у прямокутний контейнер формують як задачі нелінійного програмування (NLP) і використовують оптимізаційні алгоритми для їхнього розв'язання.

Задачу розміщення заданого набору еліпсів у прямокутному контейнері мінімальної площі розглянуто в [8]. Запропонована модель нелінійного програмування використовує квазі-*phi*-функції, які є розширенням класу *phi*-функцій, що широко застосовується для моделювання багатьох задач компонування (див., наприклад, [10–13] і посилання в них). У [14] запропоновано оригінальний підхід до розв'язання задачі пакування еліпсоїдів у контейнер-паралелепіпед мінімального об'єму. У [15] наведено моделі нелінійного програмування та алгоритми пакування еліпсоїдів у *n*-вимірному просторі.

У цьому дослідженні розглядається спеціальна задача компонування еліпсоїдів, що має застосування в адитивному виробництві [16] для створення еліптичних порожнин у деталях з метою зменшення маси. Це дає змогу скоротити обсяг друкованого матеріалу та час 3D-друку [17].

У цій роботі розглянуто задачу компонування еліпсоїдів обертання заданих розмірів із змінними параметрами розміщення в опуклій області з зонами заборони, що мають форму циліндра, сфери та багатогранника, за умови балансу (мінімального відхилення центра ваги системи від заданої точки) для максимізації мінімальної відстані між кожною парою еліпсоїдів та еліпсоїдом і межею контейнера.

Новизна підходу полягає у створенні засобів математичного моделювання та методів розв'язання задачі «розрідженого» компонування еліпсоїдів обертання, які ґрунтуються на ідеї з [18] для генерування сферичних порожнин, методі *phi*-функцій [8, 13, 19] та *r*-алгоритмі Шора [20, 21].

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Для аналітичного опису геометричних обмежень використано концепцію псевдонормалізованої квазі-*phi*-функції (adjusted quasi-*phi*-function) [8].

Нехай Ω — опукла область (у подальшому контейнер), що має форму кубоїда довжини l , ширини w і висоти h , або кругового циліндра радіуса r і висоти h , а Λ_l , $l \in J_n$, — зони заборони, що можуть мати форму сфери, кубоїда або кругового циліндра (у подальшому зони заборони). Визначимо область розміщення як $H = \Omega \setminus \Lambda$, де $\Lambda = \bigcup_{l=1}^n \Lambda_l$, $l \in J_n = \{1, \dots, n\}$, $\text{int}(\Omega \setminus \Lambda) \neq \emptyset$. Об'єкти Ω і Λ_l , $l \in J_n$, мають фіксовані параметри розміщення u_0 , $\bar{u}_l = (\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l, \bar{\Theta}_l)$, $l \in J_n$, у нерухомій системі координат, де $(\bar{x}_l, \bar{y}_l, \bar{z}_l)$ є відомим вектором трансляції та $\bar{\Theta}_l$ є вектором відомих параметрів обертання (три кути Ейлера) зони заборони Λ_l .

Задано множину еліпсоїдів обертання (сфероїдів) $E_q \subset R^3, q \in I_N = \{1, \dots, N\}$. Кожен еліпсоїд E_q заданий розмірами півосей a_i, b_i і $c_i = b_i$. Еліпсоїди $E_q, q \in I_N$, можуть неперервно транслюватися та обертатися. Позначимо $v_q = (x_q, y_q, z_q)$ вектор трансляції, а $\Theta_q = (\theta_q^1, \theta_q^2)$ — вектор параметрів обертання еліпсоїда E_q , де θ_i^1, θ_i^2 — кути Ейлера, $q \in I_N$. Центр кожного еліпсоїда збігається з початком його локальної системи координат. Вектор u визначає розміщення еліпсоїдів $E_q, q \in I_N$, в Евклідовому просторі R^3 , де $u = (u_1, \dots, u_N)$.

Положення еліпсоїда E_q , що рухається у просторі R^3 , описується так: $E(u_q) = \{p_q \in R^3 : p_q = v_q + M(\Theta_q) \cdot p_q^0 \forall p_q^0 \in E_q^0\}$, де $M(\Theta_q)$ — матриця повороту має вигляд

$$M(\Theta_q) = \begin{pmatrix} \cos \theta_q^1 \cdot \cos \theta_q^2 & -\sin \theta_q^1 & -\cos \theta_q^1 \sin \theta_q^2 \\ \sin \theta_q^1 \cdot \cos \theta_q^2 & \cos \theta_q^1 & -\sin \theta_q^1 \cdot \sin \theta_q^2 \\ -\sin \theta_q^2 & 0 & \cos \theta_q^2 \end{pmatrix}.$$

Кожен еліпсоїд E_q має вагу $m_q, q \in I_N$, тоді як кожна зона заборони Λ_l має вагу $m_0^l, l \in J_n$. Вага області Ω становить m_0 .

Вважається, що центр тяжіння еліпсоїда E_q розміщений у точці v_q (початок локальної системи координат), а центр тяжіння області розміщення — у заданій точці. Центр тяжіння $v_c = (x_c, y_c, z_c)$ системи еліптичних порожнин, розміщених усередині області, обчислюють у такий спосіб:

$$\begin{aligned} x_c(v) &= \frac{m_0}{M} x_0 - \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} x_q - \sum_{l=1}^n \frac{m_0^l}{M} \bar{x}_l, & y_c(v) &= \frac{m_0}{M} y_0 - \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} y_q - \sum_{l=1}^n \frac{m_0^l}{M} \bar{y}_l, \\ z_c(v) &= \frac{m_0}{M} z_0 - \sum_{q=1}^N \frac{m_q}{M} z_q - \sum_{l=1}^n \frac{m_0^l}{M} \bar{z}_l, \end{aligned} \quad (1)$$

де $M = m_0 - \sum_{q=1}^N m_q - \sum_{l=1}^n m_0^l$.

Допустиме відхилення центру тяжіння $v_c = (x_c, y_c, z_c)$ від заданої точки визначають системою нерівностей

$$-\delta^0 \leq x_c \leq \delta^0, \quad -\delta^0 \leq y_c \leq \delta^0, \quad -\delta^0 \leq z_c \leq \delta^0, \quad (2)$$

де $\delta^0 \geq 0$.

Уведемо новий змінний параметр ρ , який визначатимемо так:

$$\rho = \min \{ \rho_{qg}, (q, g) \in \Xi, \rho_q, q \in I_N, \rho_{ql}, q \in I_N, l \in J_n \},$$

де $\rho_{qg} = \text{dist}(E_q(u_q), E_g(u_g)) = \min_{t_q \in E_q(u_q), t_g \in E_g(u_g)} \|t_q - t_g\|$ — Евклідова відстань

між парою еліпсоїдів: $E_q(u_q)$ та $E_g(u_g)$, $(q, g) \in \Xi$, $\Xi = \{(q, g) \mid q \in I_N, g \in I_N, q < g\}$; $\rho_{ql} = \text{dist}(E_q(u_q), \Lambda_l(\bar{u}_l)) = \min_{t_q \in E_q(u_q), t_l \in \Lambda_l(\bar{u}_l)} \|t_q - t_l\|$ — Евк-

лідова відстань між еліпсоїдом $E_q(u_q)$ та зоною заборони $\Lambda_l(\bar{u}_l)$, $q \in I_N, l \in J_n$; $\rho_q = \text{dist}(E_q(u_q), \Omega^*) = \min_{t_q \in E_q(u_q), t \in \Omega^*} \|t_q - t\|$ — Евклідова відстань між

еліпсоїдом $E_q(u_q)$ та об'єктом $\Omega^* = R^3 \setminus \text{int } \Omega$, $q \in I_N$.

Задачу розрідженого збалансованого компонування еліпсоїдів $E_q(u_q)$, $q \in I_N$, у межах області H можна сформулювати як задачу генерування структури еліптичних порожнин, якщо вона максимізує ρ за умов

$$\text{dist}(E_q(u_q), E_g(u_g)) \geq \rho, \quad (q, g) \in \Xi, \quad (3)$$

$$\text{dist}(E_q(u_q), \Omega^*) \geq \rho, \quad q \in I_N, \quad (4)$$

$$\text{dist}(E_q(u_q), \Lambda_l(\bar{u}_l)) \geq \rho, \quad q \in I_N, \quad l \in J_n. \quad (5)$$

Для аналітичного опису умов (3)–(5) будемо застосовувати псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції зі змінним параметром $\rho > 0$.

Нехай задано еліпсоїди обертання $E_q(u_q)$ і $E_g(u_g)$. Визначимо псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції для аналітичного опису обмеження (3).

Функція вигляду

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho) = & n_{qg} \cdot (v_q^T - v_g^T) - \|Q^{-1}(\theta_g) \cdot M_g \cdot n_{qg}^T\| - \\ & - \|Q^{-1}(\theta_q) \cdot M_q \cdot n_{qg}^T\| - \rho \end{aligned} \quad (6)$$

є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією еліпсоїдів $E_q(u_q)$ і $E_g(u_g)$, де

$$M_q = \begin{pmatrix} a_q & 0 & 0 \\ 0 & b_q & 0 \\ 0 & 0 & c_q \end{pmatrix}, \quad M_g = \begin{pmatrix} a_g & 0 & 0 \\ 0 & b_g & 0 \\ 0 & 0 & c_g \end{pmatrix},$$

$$v_q = (x_q, y_q, z_q), \quad v_g = (x_g, y_g, z_g), \quad \tau_{qg} = (\theta_{qg}^1, \theta_{qg}^2).$$

Значення n_{qg} та $\theta_{qg}^1, \theta_{qg}^2$ обчислюють у такий спосіб. З кожною парою еліпсоїдів асоціюється площина $L_{qg} = \{(x, y, z) : \alpha_{qg} \cdot x + \beta_{qg} \cdot y + \gamma_{qg} \cdot z + \zeta_{qg} = 0\}$. Вектор нормалі до площини L_{qg} визначається як $n_{qg} = (\alpha_{qg}, \beta_{qg}, \gamma_{qg}) = Q(\theta_{qg})(1, 0, 0)^T$, де $Q(\theta_{qg}) = Q_2(\theta_{qg}^2) \cdot Q_1(\theta_{qg}^1)$, $\alpha_{qg} = \cos \theta_{qg}^1 \cdot \cos \theta_{qg}^2$, $\beta_{qg} = \cos \theta_{qg}^1 \cdot \sin \theta_{qg}^2$, $\gamma_{qg} = -\sin \theta_{qg}^1$, а $\theta_{qg}^1, \theta_{qg}^2$ — кути обертання площини L_{qg} навколо осей OY та OZ . Таким чином, $L_{qg}(\theta_{qg}^1, \theta_{qg}^2, \zeta_{qg}) = \{p = (x, y, z) : n_{qg} \cdot p^T + \zeta_{qg} = 0\}$.

Визначимо псевдонормалізовані квазі-*phi*-функції для аналітичного опису обмеження (4).

Нехай $E(u)$ — еліпсоїд обертання зі змінними параметрами $u = (x, y, z, \theta_1, \theta_2)$, а $\Omega \equiv B$ — прямокутний паралелепіпед заданої довжини l , ширини w і висоти h . Тоді E_1 буде еліпсом, який є проекцією еліпсоїда $E(u)$ на площину Ω_1 , E_2 — еліпсом, який є проекцією еліпсоїда $E(u)$ на основу Ω_2 контейнера B . Тоді функція

$$\Phi^{E\Omega^*}(u, \rho) = \min\{\varphi_1(u), \varphi_2(u)\} - \rho \quad (7)$$

є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією для еліпсоїда E і об'єкта $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \text{int } B$, де

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) = \min\{z - a_1, h - z - a_1\}, \quad \varphi_2(u) = \min_{k=1, \dots, 4} f_k(u), \\ f_1(u) = x - a^*, \quad f_2(u) = y - b^*, \quad f_3(u) = l - x - a^*, \quad f_4(u) = w - y - b^*, \\ a^* = \sqrt{b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \cos^2 \theta_1}, \quad b^* = \sqrt{b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2) \sin^2 \theta_1}, \end{aligned}$$

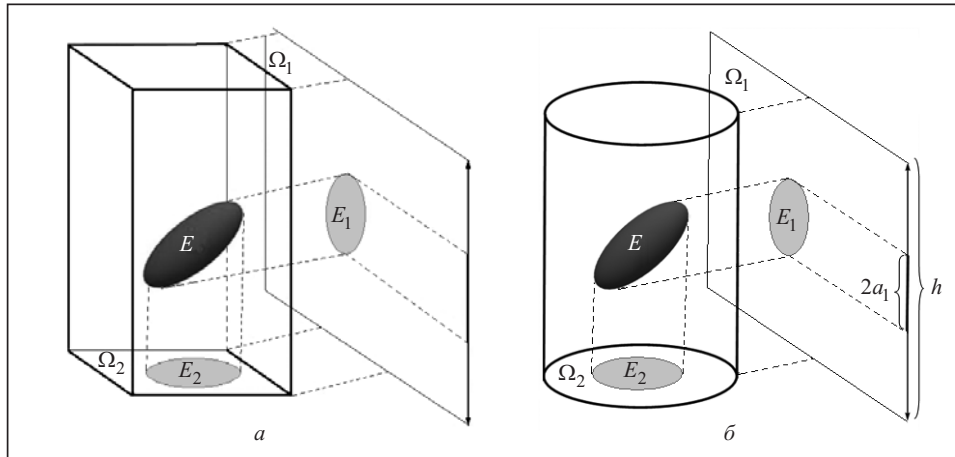


Рис. 1. Ілюстрація до побудови псевдонормалізованої квазі- ϕ -функції для еліпсоїда E та об'єкта Ω^* : Ω — кубоїд (а); Ω — циліндр (б)

$\phi_2(u)$ — ϕ -функція для еліпса, який є проекцією еліпсоїда E на основу Ω_2 кубоїда B і об'єкта $\Omega_2^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_2$ (Ω_2 — прямокутник (рис. 1, а)).

Нехай $E(u)$ — еліпсоїд обертання зі змінними параметрами $u = (x, y, z, \theta_1, \theta_2)$, а $\Omega \equiv C$ — циліндр заданої висоти h і радіуса r , тоді функція

$$\Phi^{E\Omega^*}(u, \rho) = \min \{ \phi_1(u), \phi_2(u) \} - \rho \quad (8)$$

є псевдонормалізованою квазі- ϕ -функцією для еліпсоїда E і об'єкта Ω^* , якщо $\phi_1(u) = \min \{ z - a_1, h - z - a_1 \}$, $\phi_2(u) = \Phi^{E_2\Omega_2^*}(u)$ — ϕ -функції для еліпса $E_2(u)$ і об'єкта $\Omega_2^* = \mathbb{R}^2 \setminus \text{int } \Omega_2$, Ω_2 — коло радіуса r з центром у точці $(0, 0)$ (рис. 1, б).

Псевдонормалізовані квазі- ϕ -функції для аналітичного опису обмеження (5) наведено в [22, 23].

Математичну модель задачі розрідженого компонування еліпсоїдів сформулюємо як задачу неперервної оптимізації

$$\max \rho \text{ s.t. } (u, \tau, \rho) \in W, \quad (9)$$

$$W = \{ (u, \tau, \rho) : \hat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho) \geq 0, (q, g) \in \Xi,$$

$$\hat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \rho) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n,$$

$$\hat{\Phi}'_q(u_q, \tau_q, \rho) \geq 0, q \in I_N, \Upsilon(v) \geq 0, \rho > 0 \}, \quad (10)$$

де $u = (u_1, \dots, u_N)$, $\tau = (\tau_{qg}, (q, g) \in \Xi, \tau_{ql}, q \in I_N, l \in J_n, \tau_q, q \in I_N)$ — вектор допоміжних змінних для псевдонормалізованих квазі- ϕ -функцій $\hat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho)$, $(q, g) \in \Xi$, $\hat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \rho)$, $q \in I_N, l \in J_n$, та $\hat{\Phi}'_q(u_q, \tau_q, \rho)$, $q \in I_N$, вигляду (6)–(8); нерівність $\hat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho) \geq 0$ описує умови розміщення еліпсоїдів $E_q(u_q)$ і $E_g(u_g)$ на допустимій відстані, $q < g \in I_N$; нерівність $\hat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \rho) \geq 0$ — умови розміщення об'єктів $E_q(u_q)$ та $\Lambda_l(u_l)$ на допустимій відстані, $q \in I_N, l \in J_n$; нерівність $\hat{\Phi}'_q(u_q, \rho) \geq 0$ — умови включення об'єкта $E_q(u_q)$ у контейнер Ω , $i \in I_n$, з урахуванням допустимої відстані; нерівність $\Upsilon(v) = \min \{ x_c + \delta^0, -x_c + \delta^0, y_c + \delta^0, -y_c + \delta^0 \} \geq 0$ — умови балансу (1), (2).

Область допустимих розв'язків W визначається системою нерівностей із негладкими функціями, які можна звести до системи нерівностей із диференційованими функціями, що формують окрему псевдонормалізовану квазі- ϕ -функцію із (10).

Модель (9), (10) є багатоекстремальною задачею нелінійного програмування, яка відповідає розглянутій раніше задачі розрідженого збалансованого компонування еліпсоїдів.

У задачі фігурують $\sigma = 1 + 6n + |\tau| + Nn$ основних змінних, де n — кількість зон заборони $\Lambda_l(\bar{u}_l)$, $l \in I_n$, $|\tau|$ — кількість допоміжних змінних у псевдонормалізованих квазі- ϕ -функціях. Задача (9), (10) містить $O(N^2)$ нелінійних нерівностей та $O(Nn)$ змінних, які є допоміжними змінними у псевдонормалізованих квазі- ϕ -функціях в (10).

Для стратегії розв'язання задачі (9), (10) заплановано три основні етапи.

Етап 1. Створення множини допустимих стартових точок для задачі (9), (10).

Етап 2. Побудова множини локальних максимумів для задачі (9), (10), починаючи з кожної допустимої точки, отриманої на етапі 1.

Етап 3. Вибір найкращого локального максимуму із множини локальних максимумів, знайдених на етапі 2.

ПОШУК ДОПУСТИМИХ ТА ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

Метод пошуку допустимих стартових точок для задачі (9), (10) включає такі кроки.

Крок 1. Генерування в області Ω N випадкових точок $v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)}$ таких, що $v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)} \notin \Lambda$. Формування точки $(v^{(0)}, \bar{v}) = ((v_1^{(0)}, \dots, v_N^{(0)}), (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n))$, де \bar{v}_l , $l \in J_n$, — фіксовані вектори трансляції зон заборони Λ_l , $l \in J_n$.

Крок 2. Пошук збалансованого компонування N зважених точок (вироджених еліпсоїдів та зон заборони) у межах області H з розв'язанням задачі нелінійного програмування

$$\min \delta \text{ s.t. } (v, \delta) \in V \subset R^{3N+1}, \quad (11)$$

$$V = \{(v, \delta) : \phi_q(v) \geq 0, q \in I_N, \Upsilon(v, \delta) \geq 0\}, \quad (12)$$

де $v = (v_1, \dots, v_N)$. Точку $v^{(0)}$ розглядають як стартову допустиму точку для задачі (11), (12).

З нерівності $\phi_q(v) \geq 0$ випливає, що $v_q \in \Omega \setminus \Lambda$. Знаходимо точку $(v^{(1)}, \delta^{(1)}) = (v_1^{(1)}, \dots, v_N^{(1)}, \delta^{(1)})$ локального екстремуму задачі (11), (12).

Крок 3. Визначення стартових значень змінних $\tau_{qg}, \tau_{ql}, \tau_q$ для кожної псевдонормалізованої квазі- ϕ -функції $\hat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho)$, $(q, g) \in \Xi$, $\Phi'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \rho)$, $q \in I_N$, $l \in J_n$. Ці змінні розглядають як параметри роздільних площин між кожною парою зважених точок: $v_q^{(1)}$ і \bar{v}_l , $q \in I_N$, $l \in J_n$. Визначення вектора $\tau^{(1)} = (\tau_{qg}, (q, g) \in \Xi, \tau_{ql}, \tau_q, q \in I_N, l \in J_n, q \in I_N)$.

Крок 4. Генерування N випадкових векторів кутових параметрів $\Theta^{(1)}$. Формування точки $(u^{(1)}, \tau^{(1)})$, де $u^{(1)} = (v^{(1)}, \Theta^{(1)})$.

Крок 5. Пошук початкових розмірів еліпсоїдів обертання за допомогою розв'язання такої задачі нелінійного програмування:

$$\max \beta \text{ s.t. } (u, \tau, \beta) \in \Delta, \quad (13)$$

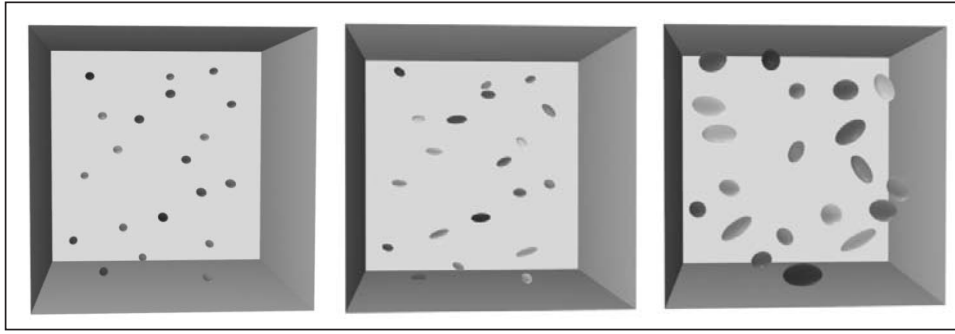


Рис. 2. Побудова допустимих стартових точок (крок 5)

$$\Delta = \{(u, \tau, \beta) : \widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \beta) \geq 0, (q, g) \in \Xi, \\ \widehat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \beta) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n, \\ \widehat{\Phi}'_q(u_q, \tau_q, \beta) \geq 0, q \in I_N, Y(v) \geq 0, \rho > 0, \beta \geq 0\}, \quad (14)$$

починаючи з точки $(u^{(1)}, \tau^{(1)}, \beta = 0)$.

У задачі (13), (14) змінна β є коефіцієнтом гомотетії еліпсоїдів E_q , $q \in I_N$, а також зон заборони $\beta\Lambda_l(\bar{u}_l)$, $l \in J_n$, $\widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \beta)$ є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією для $\beta E_q(u_q)$ і $\beta E_g(u_g)$, $(q, g) \in \Xi$, $\widehat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \beta) \geq 0$ є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією об'єктів $\beta E_q(u_q)$ і $\beta\Lambda_l(\bar{u}_l)$, $q \in I_N$, $l \in J_n$, $\widehat{\Phi}'_q(u_q, \tau_q, \beta)$ є псевдонормалізованою квазі-*phi*-функцією об'єктів $\beta E_q(u_q)$ і Ω^* .

Знаходимо точку $(u^{(2)}, \tau^{(2)}, \beta^{(2)} = 1)$ глобального максимуму задачі (13), (14).

Якщо $\beta^{(2)} < 1$, тоді переходимо до кроку 1. Задача (13), (14) реалізує «збільшення» зважених точок $v_1^{(1)}, \dots, v_N^{(1)}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ (вироджені об'єкти, $\beta = 0$) до початкових розмірів об'єктів E_q , $q \in I_N$, та $\Lambda_l(\bar{u}_l)$, $l \in J_n$, $\beta = 1$, що не перетинаються та розміщені усередині області H за умови балансу системи.

Крок 6. Обчислення початкового значення ρ для задачі (9), (10)

$$\rho^{(2)} = \min \{ \widehat{\Phi}'_{qg}(u_q^{(2)}, u_g^{(2)}, \tau_{qg}^{(2)}) \geq 0, (q, g) \in \Xi, \\ \widehat{\Phi}'_{ql}(u_q^{(2)}, \bar{u}_l, \tau_{ql}^{(2)}) \geq 0, q \in I_N, l \in J_n, \widehat{\Phi}'_q(u_q^{(2)}, \tau_q^{(2)}) \geq 0, q \in I_N \}.$$

Крок 7. Формування точки $(u^{(2)}, \tau^{(2)}, \rho^{(2)})$ як допустимого розв'язку задачі (9), (10). Ця точка може бути використана як стартова точка для подальшої локальної оптимізації з застосуванням глобального або локального NLP-solver (наприклад, IPOPT).

Вихідні дані, які відповідають локальній точці мінімуму задачі (9), (10), є такими: ρ^* — оптимізоване значення цільової функції; $u^* = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ — вектор параметрів розміщення еліпсоїдів E_q , $q \in I_N$, де $u_q^* = (x_q^*, y_q^*, z_q^*, \Theta_q^*)$.

Для пошуку локально оптимальних розв'язків задачі (9), (10) можна використати *r*-алгоритм Шора [20, 21] за тією ж схемою, що міститься в [18] для компонування сферичних порожнин.

За допомогою методу негладких штрафних функцій задача (9), (10) зводиться до задачі безумовної максимізації негладкої функції

$$\max_{(u, \tau, \rho) \in W} \{f(u, \tau, \rho) = \rho + \Phi_P(u, \tau, \rho)\}, \quad (15)$$

де негладка штрафна функція $\Phi_P(u, \tau, \rho)$ має вигляд:

$$\Phi_P(u, \tau, \rho) = -\sum_{i=1}^2 P_i F_i(u, \tau, \rho) - P_3 F_3(u, \rho) - P_4 F_4(u) - P_5 \max\{0, -\rho\}. \quad (16)$$

Тут $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$, де P_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$, — додатні штрафні коефіцієнти, а функції $F_i(u, \tau, \rho)$, $i = 1, 2$, $F_3(u, \rho)$, $F_4(u)$ визначаються у такий спосіб:

$$F_1(u, \tau, \rho) = \sum_{(q, g) \in \Xi} \max\{0, -\widehat{\Phi}'_{qg}(u_q, u_g, \tau_{qg}, \rho)\}, \quad (17)$$

$$F_2(u, \tau, \rho) = \sum_{q \in I_N, l \in J_n} \max\{0, -\widehat{\Phi}'_{ql}(u_q, \bar{u}_l, \tau_{ql}, \rho)\}, \quad (18)$$

$$F_3(u, \rho) = \sum_{q \in I_N} \max\{0, -\widehat{\Phi}'_q(u_q, \tau_q, \rho)\}, \quad (19)$$

$$F_4(v) = \max\{0, -Y(v)\}. \quad (20)$$

Штрафні коефіцієнти $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ мають таке значення для обмежень (10). Коефіцієнти P_1, P_2, P_3 і P_4 відповідають за «сумарне порушення» першої, другої, третьої та четвертої груп обмежень із (10) відповідно. Коефіцієнт P_5 дає змогу враховувати невід'ємність змінної ρ .

Знаходження локального максимуму задачі (9), (10) можна замінити на пошук локального максимуму задачі (15), яка є задачею безумовної максимізації багатоекстремальної негладкої функції $f(u, \tau, \rho)$, де штрафна функція $\Phi_P(u, \tau, \rho)$ обчислюється за формулами (16)–(20). Якщо для деяких додатних значень штрафних коефіцієнтів $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ локальному максимуму функції $f(u, \tau, \rho)$ відповідає рівне нулю значення штрафної функції $\Phi_P(u, \tau, \rho)$, то він буде локальним максимумом задачі (9), (10). Вибір штрафних коефіцієнтів P_1, P_2, P_3, P_4 дає змогу враховувати точність виконання чотирьох груп обмежень із (10).

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розглянемо низку тестових прикладів, що демонструють роботу розроблених програмних модулів, які реалізують алгоритм розв'язання задачі (9), (10) для еліпсоїдів із урахуванням зон заборони. Усі експерименти виконано на комп'ютері AMD FX(tm)-6100, 3.30 GHz мовою програмування C++, Windows 7. Для локальної оптимізації використано IPOPT (<https://github.com/coin-or/Ipopt>). В усіх прикладах еліпсоїди мають розміри $a = 10$, $b = 6$, $c = 6$. Багатостартовий запуск програми виконано 10 разів для кожного прикладу.

Приклад 1. Маємо $N = 30$, E_q , $q = 1, \dots, 30$, еліпсоїдів, область — кубоїд Ω , $l = 60$, $w = 60$, $h = 60$. На рис. 3, *a* наведено розріджене розміщення еліпсоїдів у кубоїді Ω , що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 3.4591$.

Приклад 2. Маємо $N = 12$, E_q , $q = 1, \dots, 12$, еліпсоїдів, область — кубоїд Ω , $l = 60$, $w = 60$, $h = 70$.

Зона заборони Λ_1 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(0, 0, 0), (5, 0, 0), (0, 60, 0), (5, 60, 0), (0, 0, 60), (15, 0, 60), (0, 60, 60), (15, 60, 60)\}$, Λ_2 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(0, 0, 0), (0, 5, 0), (60, 0, 0), (60, 5, 0), (0, 0, 60), (0, 5, 60), (60, 0, 60), (60, 5, 60)\}$.

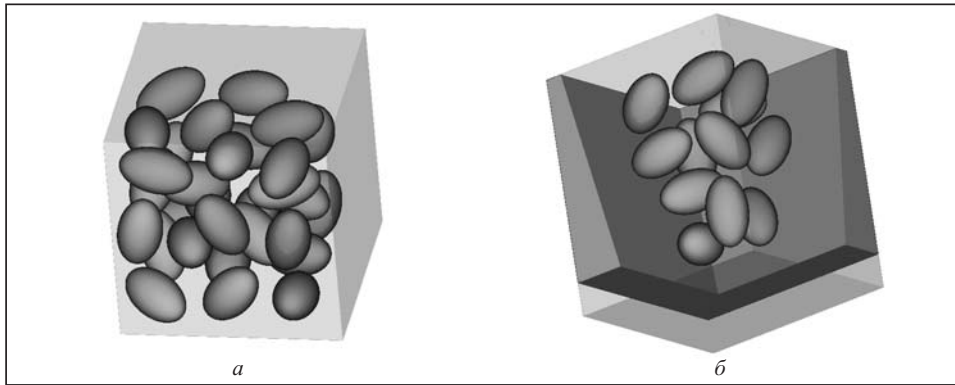


Рис. 3. Розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів, що відповідає локальному максимуму ρ^* у кубі Ω (а) і в області $\Omega \setminus \Lambda_1$ (б)

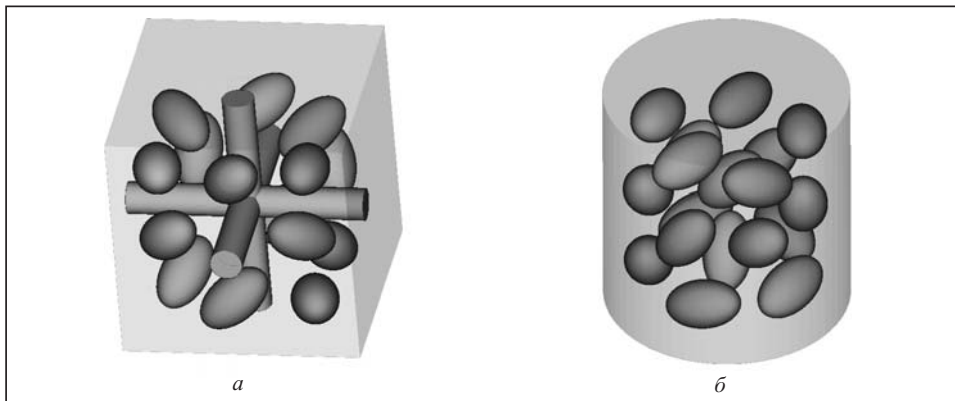


Рис. 4. Розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів, що відповідає локальному максимуму ρ^* в області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$ (а) та у циліндрі Ω (б)

$(0, 15, 60), (60, 0, 60), (60, 15, 60)\}$, Λ_3 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(55, 0, 0), (60, 0, 0), (55, 60, 0), (60, 60, 0), (45, 0, 60), (60, 0, 60), (45, 60, 60), (60, 60, 60)\}$, Λ_4 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(0, 55, 0), (0, 60, 0), (60, 55, 0), (60, 60, 0), (0, 45, 60), (0, 60, 60), (60, 45, 60), (60, 60, 60)\}$, Λ_5 — опуклий багатогранник з вершинами $\{(0, 0, 60), (0, 60, 60), (60, 0, 60), (60, 60, 60), (0, 0, 70), (0, 60, 70), (60, 0, 70), (60, 60, 70)\}$.

На рис. 3, б наведено розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів у області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3 \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5)$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 2.6233$.

Приклад 3. Маємо $N = 15$, E_q , $q = 1, \dots, 15$, еліпсоїдів, область — куб Ω , $l = 60$, $w = 60$, $h = 60$.

Зони заборони Λ_l , $l = 1, 2, 3$, — циліндри $r_l = 4$, $h_l = 60$. Центри основ циліндрів розміщені у центрі граней Ω . На рис. 4, а наведено розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів у складеній області $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \Lambda_3)$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 4.7946$.

Приклад 4. Маємо $N = 18$, E_q , $q = 1, \dots, 18$, еліпсоїдів, область — циліндр Ω , $r = 30$, $h = 60$.

На рис. 4, б наведено розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів у складеній області Ω , що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 4.625992$.

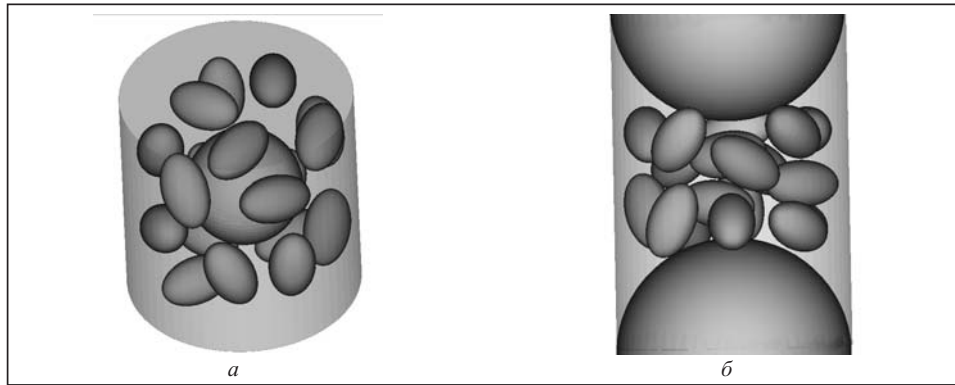


Рис. 5. Розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів, що відповідає локальному максимуму ρ^* в областях $\Omega \setminus \Lambda_1$ (а) і $\Omega \setminus (\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ (б)

Приклад 5. Маємо $N = 18$, E_q , $q = 1, \dots, 18$, еліпсоїдів, область — циліндр Ω , $r = 30$, $h = 60$, Λ_1 — куля радіуса $r_1 = 15$ у центрі Ω . На рис. 5, а наведено розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів в області $\Omega \setminus \Lambda_1$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 2.288322$.

Приклад 6. Маємо $N = 18$, E_q , $q = 1, \dots, 18$, еліпсоїдів, область — циліндр Ω , $r = 30$, $h = 90$, Λ_1, Λ_2 — кулі радіуса $r = 30$ з центрами в центрах двох основ циліндра Ω . На рис. 5, б наведено розріджене збалансоване розміщення еліпсоїдів в області $\Omega \setminus \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, що відповідає точці локального максимуму (ρ^*, v^*, τ^*) , $\rho^* = 2.349449$.

ВИСНОВКИ

Досліджено задачу компоунвання еліпсоїдів обертання заданих розмірів із змінними параметрами розміщення в опуклому контейнері із зонами заборони з урахуванням обмежень на «розрідженість» розміщення об'єктів та умов балансу, що має застосування в адитивних технологіях для оптимізації топології промислових продуктів. Для аналітичного опису геометричних обмежень визначено псевдонормалізовані квазі- ϕ -функції. Побудовано математичну модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Запропоновано стратегію та методи пошуку допустимих стартових точок та локально-оптимальних розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ungson Y., Burtseva L., Garcia-Curiel E., Valdez-Salas B., Flores-Rios B.L., Werner F., Petranovskii V. Filling of irregular channels with round cross-section: Modeling aspects to study the properties of porous materials. *Materials*. 2018. Vol. 11, N 10. P. 1901.
2. Stoyan, Y., Yaskov G., Romanova T., Litvinchev I., Yakovlev S., Cantú J.M.V. Optimized packing multidimensional hyperspheres: A unified approach. *Mathematical Biosciences and Engineering*. 2020. Vol. 17, Iss. 6. P. 6601–6630. <http://doi.org/10.3934/mbe.2020344>.
3. Blyuss O., Koriashkina L., Kiseleva E., Molchanov R. Optimal placement of irradiation sources in the planning of radiotherapy: Mathematical models and methods of solving. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*. 2015. Vol. 2015. Article ID 142987. <http://doi.org/10.1155/2015/142987>.
4. Bezrukov A., Stoyan D. Simulation and statistical analysis of random packings of ellipsoids. *Particle & Particle Systems Characterization*. 2007. Vol. 23. P. 388–398.
5. Choi Y.-K., Chang J.-W., Wang W., Kim M.-S., Elber G. Continuous collision detection for ellipsoids. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*. 2009. Vol. 15(2). P. 311–324.
6. Baule A., Mari R., Bo L., Portal L., Makse H.A. Mean-field theory of random close packings of axisymmetric particles. *Nature Communications*. 2013. Vol. 2194. P. 1–11.
7. Pedro G. Lind. Sequential random packings of spheres and ellipsoids. *AIP Conference Proceedings*. 2009. Vol. 1145. P. 219.

8. Stoyan Y., Pankratov A., Romanova T. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65. P. 283–307. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0331-2>.
9. Romanova T.E., Stetsyuk P.I., Chugay A.M., Shekhovtsov S.B. Parallel computing technologies for solving optimization problems of geometric design. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. Vol. 55, N 6. P. 894–904. <https://doi.org/10.1007/s10559-019-00199-4>.
10. Romanova T., Stoyan Y., Pankratov A., Litvinchev I., Avramov K., Chernobryvko M., Yanchevskiy I., Mozgova I., Bennell J. Optimal layout of ellipses and its application for additive manufacturing. *International Journal of Production Research*. 2021. Vol. 59, Iss. 2. P. 560–575. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1697836>.
11. Grebennik I.V., Kovalenko A.A., Romanova T.E., Urniaieva I.A., Shekhovtsov S.B. Combinatorial configurations in balance layout optimization problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 2. P. 221–231. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0023-2>.
12. Romanova T., Pankratov A., Litvinchev I., Plankovskyy S., Tsegelnyk Y., Shypul O. Sparsest packing of two-dimensional objects. *International Journal of Production Research*. 2020. <https://doi.org/10.1080/00207543.2020.1755471>.
13. Romanova T., Litvinchev I., Pankratov A. Packing ellipsoids in an optimized cylinder. *European Journal of Operational Research*. 2020. Vol. 285, Iss. 2. P. 429–443. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2020.01.051>.
14. Kallrath J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes. *Journal of Global Optimization*. 2017. Vol. 67, Iss. 1–2. P. 151–185. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0348-6>.
15. Birgin E.G., Lobato R.D., Martínez J.M. Packing ellipsoids by nonlinear optimization. *Journal of Global Optimization*. 2016. Vol. 65, Iss. 4. P. 709–743. <https://doi.org/10.1007/s10898-015-0395-z>.
16. Gardan J. Additive manufacturing technologies: State of the art and trends. *Int. J. Prod. Res.* 2016. 54(10): 3118.
17. Lee M., Fang Q., Cho Y., Ryu J., Liu L., Kim D.S. Support-free hollowing for 3D-printing via Voronoi diagram of ellipses. *Computer-Aided Design*. 2018. 101: 23.
18. Стоян Ю.Г., Романова Т.Е., Панкратов О.В., Стецюк П.І., Стоян Ю.Є. Розріджене збалансоване розміщення сферичних порожнин у тривимірних областях. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 4. С. 44–55.
19. Стецюк П.І., Романова Т.Е., Субота І.О. NLP-задача упаковки гомотетичних еліпсів у прямокутний контейнер. *Теорія оптимальних рішень*. 2014. С. 139–146.
20. Stetsyuk P.I. Shor's r -algorithms: theory and practice. In: Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. Butenko S., Pardalos P.M., Shylo V. (Eds). Springer International Publishing, 2017. P. 495–520.
21. Стецюк П.І. Теория и программные реализации r -алгоритмов Шора. *Кібернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.
22. Pankratov A., Romanova T., Litvinchev I. Packing oblique 3D-objects. *Mathematics*. 2020. 8(7). 1130. <https://doi.org/10.3390/math8071130>
23. Romanova T., Bennell J., Stoyan Y., Pankratov A. Packing of concave polyhedra with continuous rotations using nonlinear optimization. *European Journal of Operational Research*. 2018. Vol. 268. P. 37–53.

Y.G. Stoyan, T.E. Romanova, O.V. Pankratov, P.I. Stetsyuk, S.V. Maximov
SPARSE BALANCED LAYOUT OF ELLIPSOIDS

Abstract. The authors consider the problem of generating spheroidal voids in a three-dimensional domain of complex geometry, taking into account the constraints on the “sparseness” of the placement of voids subject to the system balance. The problem is reduced to the optimized layout of ellipsoids of revolution in a convex container (cylinder or cuboid), taking into account the prohibited zones, constraints on the allowable distances between objects, and the balancing condition. The problem is aimed to maximize the minimum distance between each pair of ellipsoids and each ellipsoid and the boundary of the container. Adjusted quasi-phi-functions for analytical description of the placement constraints are defined. A mathematical model is constructed in the form of a nonlinear programming problem. A solution method is proposed that uses the multistart strategy in combination with smart algorithms to search for feasible and locally optimal solutions. The results of computational experiments are presented.

Keywords: sparse layout, ellipsoids of revolution, ϕ -function, nonlinear programming, r -algorithm.

Надійшла до редакції 31.05.2021