

Л.А. ВЛАСЕНКО

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: lara@rutrus.com.

А.Г. РУТКАС

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: anatoly@rutrus.com.

В.В. СЕМЕНЕЦЬ

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: valery.semenets@nure.ua.

А.О. ЧИКРІЙ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: chik@insyng.kiev.ua.

ПРО ОДНУ ДЕСКРИПТОРНУ ГРУ ПЕРЕСЛІДУВАННЯ¹

Анотація. Досліджено диференціальну гру переслідування у дескрипторній системі. Еволюцію системи описано лінійним диференціально-алгебраїчним рівнянням. Розв'язки рівняння представлено за допомогою формули варіації сталих через початкові дані та блок керування. Використано техніку мнозначних відображень та їхніх селекторів, а також обмеження на функціонали, що визначаються поведінками переслідувача і втікача. Стаття містить приклади, що ілюструють диференціальну гру у радіотехнічних системах. Зокрема, вивчено конфліктно-керовані перехідні процеси у чотириполосних фільтрах.

Ключові слова: дескрипторна система, диференціально-алгебраїчне рівняння, диференціальна гра, радіотехнічний фільтр.

ВСТУП

Ця робота є продовженням дослідження [1–4] керованих процесів у дескрипторних системах. Одним із розділів математичної теорії керування є диференціальні ігри [5, 6]. Деякі задачі диференціальних ігор для дескрипторних систем розглядалися у [7–9]. У представленій статті вивчається ігрова задача зближення у дескрипторній системі. Дослідження диференціальної гри проілюстровано на прикладах радіотехнічних фільтрів.

Введемо позначення: $\Delta = \{(t, \tau) : 0 \leq \tau \leq t \leq T\}$ — трикутник на площині; $\langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|$ — скалярний добуток та норма у відповідних просторах; $E, 0$ — одинична та нульова матриці належної розмірності; K^{tr} — транспонована матриця чи транспонований вектор; $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ — простір вектор-функцій зі значеннями в \mathbf{R}^n , що сумовні з квадратом норми на $[0, T]$; $W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$ — простір Соболева порядку k вектор-функцій з $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$, узагальнені похідні яких до порядку k включно належать $L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$. Функції з $W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ будемо вважати неперервними на $[0, T]$, замінивши їх, якщо необхідно, на множині нульової міри. За визначенням $0^0 = E$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Динаміка системи описується диференціально-алгебраїчним рівнянням

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = f(t) + K_1 u(t) + K_2 v(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

з початковою умовою

$$Ax(0) = q, \quad (2)$$

¹Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.

© Л.А. Власенко, А.Г. Руткас, В.В. Семенець, А.О. Чикрій, 2021

де A та B — дійсні матриці розміру $n \times n$, K_1 та K_2 — дійсні матриці розмірів $n \times m_1$ та $n \times m_2$ відповідно, $f(t)$ — n -вимірний вектор-функція зі значеннями у \mathbf{R}^n , q — дійсний n -вимірний вектор. Нехай $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$. Рівняння (1) не є розв'язним відносно похідної, тобто є диференціально-алгебраїчним, а система керування, стани якої описуються цим рівнянням, є дескрипторною. Керування переслідувача $u(t)$ та втікача $v(t)$ є m_1 - та m_2 -вимірними вектор-функціями. Множини допустимих керувань U_1 та V_1 відповідно переслідувача та втікача є вимірні вектор-функції $u(t)$ та $v(t)$, що приймають значення з областей керувань $U_0 \subset \mathbf{R}^{m_1}$ та $V_0 \subset \mathbf{R}^{m_2}$. Припускаємо, що U_0, V_0 — опуклі компакти. Тоді множини допустимих керувань U_1 та V_1 є опуклі замкнені обмежені множини в $L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_1})$ та $L_2(0, T; \mathbf{R}^{m_2})$.

Керуванням $u(t) \in U_1$ та $v(t) \in V_1$ відповідає розв'язок $x(t) = x(t; u, v)$ початкової задачі (1), (2) (стан системи). Під розв'язками рівняння (1) на відрізку $[0, T]$ будемо розуміти вектор-функції $x(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$ такі, що $Ax(t) \in W_2^1(0, T; \mathbf{R}^n)$ та для майже всіх $t \in [0, T]$ справедливо рівняння (1). Функція $Ax(t)$ є неперервною після можливої заміни на множині нульової міри. Зрозуміло, що розв'язок початкової задачі (1), (2) також задовольняє початкову умову (2).

Для постановки ігрової задачі введемо у розгляд циліндричну термінальну множину $M \subset \mathbf{R}^n$ як ортогональну суму

$$M = M_0 \oplus M_1 \quad (3)$$

замкненого підпростору $M_0 \subset \mathbf{R}^n$ та замкненого шару M_1 з ортогонального доповнення M_0^\perp до M_0 з центром у нулі і радіусом d . Якщо $d=0$, то $M_1 = \{0\}$. На відміну від явної системи [5], для неявної динамічної системи [10, 11], стани якої описуються не розв'язним відносно похідної рівнянням, термінальне обмеження у диференціальній грі накладаємо не на стан $x(t)$, а на динамічний вектор $Ax(t)$, оскільки цей вектор стоїть під знаком похідної у рівнянні. Гру в системі (1), (2) можна завершити за час s , що не перевищує T , якщо для будь-якого допустимого керування втікача $v(t) \in V_1$ знайдеться допустиме керування переслідувача $u(t) \in U_1$, для якого динамічний вектор $Ax(t; u, v)$ системи може бути приведений на термінальну множину M (3) у момент s . Якщо Π — проєкційна матриця на M_0^\perp , то завершення гри в момент часу s за допустимих керувань $u(t), v(t)$ означає, що виконується нерівність

$$\|\Pi Ax(s; u, v)\| \leq d. \quad (4)$$

Опишемо стани дескрипторної системи (1), (2). Аналогічно [1–4] дослідимо регулярні дескрипторні системи, для яких жмуток матриць $\lambda A + B$ є регулярним, тобто його визначник $\det(\lambda A + B)$ як функція λ тотожно не перетворюється в нуль. Для регулярної системи можна ввести у розгляд матриці

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda A + B)^{-1} d\lambda, \quad G = AIA + B - AIB, \\ W = -AIBG^{-1}, \quad F = AG^{-1} - AIA G^{-1}, \quad (5)$$

де Γ — контур, що охоплює всі власні числа жмутка; F — нільпотентна матриця з індексом нільпотентності ν ($F^\nu = 0, F^{\nu-1} \neq 0$). Доведення властивостей цих матриць міститься в [12]. Якщо $\nu > 1$, припускаємо, що $F^k f(t) \in W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$ для $k=1, \dots, \nu-1$. Припустимо, що матриці при керуваннях у (1) та початковий вектор у (2) задовольняють обмеження

$$FK_1 = 0, \quad FK_2 = 0, \quad (6)$$

$$(E - AI)q = \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^{k+1}(E - AI)f(t)]_{t=0}. \quad (7)$$

Відомо [1–4], що, коли справджуються зазначені обмеження, існує єдиний розв'язок $x(t)$ початкової задачі (1), (2), який допускає зображення

$$x(t) = G^{-1} \int_0^t e^{W(t-\tau)} AI[K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau)] d\tau + G^{-1}[E - AI][K_1 u(t) + K_2 v(t)] + \varphi(t),$$

$$\varphi(t) = G^{-1} e^{Wt} AIq + G^{-1} \int_0^t e^{W(t-\tau)} AIf(\tau) d\tau + G^{-1} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^k (E - AI)f(t)].$$

Звідси одержуємо зображення динамічного вектора

$$Ax(t; u, v) = \int_0^t e^{W(t-\tau)} AI[K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau)] d\tau + \psi(t),$$

$$\psi(t) = e^{Wt} AIq + \int_0^t e^{W(t-\tau)} AIf(\tau) d\tau + \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} [F^{k+1}(E - AI)f(t)]. \quad (8)$$

2. ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ ГРИ У ДЕСКРИПТОРНІЙ СИСТЕМІ

Будемо використовувати підходи з робіт [10, 11], деталізувати та адаптувати запропоновані там методи на випадок дескрипторних систем, що описуються еволюційними рівняннями у скінченномірних просторах. На відміну від цих робіт, не будемо накладати жодних обмежень на обернену матрицю $(\lambda A + B)^{-1}$. Спочатку встановимо умови закінчення гри у системі (1), (2) з термінальною множиною (3). Поведінки переслідувача та втікача визначають функціонали, що відображують \mathbf{R}^n в \mathbf{R} :

$$\varphi_u(h) = \sup_{u \in U_1} \left\langle h, \int_0^s \Pi e^{W(s-\tau)} AIK_1 u(\tau) d\tau \right\rangle,$$

$$\varphi_v(h) = \sup_{v \in V_1} \left\langle h, \int_0^s \Pi e^{W(s-\tau)} AIK_2 v(\tau) d\tau \right\rangle. \quad (9)$$

Теорема 1. Припустимо, що справедливі такі обмеження для регулярної системи (1), (2): $f(t) \in L_2(0, T; \mathbf{R}^n)$; якщо індекс нільпотентності ν матриці F у (5) більше 1, то $F^k f(t) \in W_2^k(0, T; \mathbf{R}^n)$ для $k=1, \dots, \nu-1$; матриці K_1 та K_2 при керуваннях задовольняють співвідношення (6); початковий вектор q задовольняє співвідношення (7). Для того щоб гру у системі (1), (2) з термінальною множиною (3) можна було завершити у момент часу s , необхідно і достатньо, щоб виконувалася нерівність

$$p(s, h) = \varphi_v(h) - \varphi_u(h) + \langle h, \Pi \psi(s) \rangle \leq d \quad \forall h \in \mathbf{R}^n: \|h\|=1, \quad (10)$$

де функціонали $\varphi_u(h), \varphi_v(h)$ визначені в (9). Якщо

$$\| \Pi q \| > d \quad (11)$$

і для деякого $s_* \in (0, T]$ справедлива нерівність

$$p_0(s_*) \leq d, \quad p_0(s) = \sup_{\|h\|=1} p(s, h), \quad (12)$$

то гру в системі (1), (2) можна завершити за мінімальний час

$$s_0 = \min \{s: p_0(s) \leq d\} > 0.$$

Твердження цієї теореми виходить з теорем 1, 2 [11], якщо як простори Y, X , в яких діють оператори при стані та похідній, вибрати $X = Y = \mathbf{R}^n$, а як простори U і V , з яких відображують оператори при керуваннях переслідувача і втікача, вибрати $U = \mathbf{R}^{m_1}$ і $V = \mathbf{R}^{m_2}$. Тоді оцінка (4) у [11] має місце, якщо $r = v - 1$, проєкційні матриці Q_1 та Q_2 мають вигляд $Q_1 = AI$ та $Q_2 = E - AI$.

Здатність обчислювати розв'язувальні функції [5, 13] дає змогу будувати керування переслідувача, що гарантує приведення динамічного вектора неявної системи на термінальну множину [10]. Покажемо, як працює метод розв'язувальних функцій для завершення гри у дескрипторній системі. Метод розв'язувальних функціоналів [10] для вивчення диференціальної гри у розподіленій системі, що описується рівнянням типу Соболева, розповсюджуємо на дескрипторні системи, стани яких описуються диференціально-алгебраїчними рівняннями у скінченномірних просторах. Щоб спростити виклад, будемо розглядати окремий випадок рівняння (1), коли функція $f(t)$ у правій частині дорівнює нулю, а саме:

$$\frac{d}{dt}[Ax(t)] + Bx(t) = K_1u(t) + K_2v(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (13)$$

Такі рівняння виникають під час моделювання перехідних режимів електричних кіл (див. моделі у розд. 3). Умова (7) на початковий вектор q (2) спрощується

$$(E - AI)q = 0. \quad (14)$$

Зображення (8) для динамічного вектора системи (13), (2) має вигляд

$$Ax(t; u, v) = e^{Wt} AIq + \int_0^t e^{W(t-\tau)} AI[K_1u(\tau) + K_2v(\tau)]d\tau. \quad (15)$$

Введемо у розгляд многозначне відображення

$$\Omega(t, \tau) = \bigcap_{v \in V_0} \text{Pe}^{W(t-\tau)} AI(K_1U_0 + K_2v), \quad (t, \tau) \in \Delta, \quad (16)$$

та його селектор $\gamma(t, \tau) \in \Omega(t, \tau)$ (якщо $\Omega(t, \tau)$ приймає непорожні значення), вектор-функцію

$$\xi(t) = \text{Pe}^{Wt} AIq + \int_0^t \gamma(t, \tau)d\tau \quad (17)$$

і розв'язувальну функцію

$$\alpha(t, \tau, v) = \sup \{ \tilde{\alpha} \geq 0: [\text{Pe}^{W(t-\tau)} AI(K_1U_0 + K_2v) - \gamma(t, \tau)] \cap \tilde{\alpha}[M_1 - \xi(t)] \neq 0 \}. \quad (18)$$

Зауважимо, якщо $\xi(t) \in M_1$, то $\alpha(t, \tau, v) = \infty$ для всіх $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$. Якщо $\xi(t) \notin M_1$, то $\alpha(t, \tau, v)$ обмежена на $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$ і супремум у (18) досягається. Із застосуванням теорем про образ, прообраз та опорну функцію [14] доводимо, що функція $\alpha(t, \tau, v)$ є вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V_0$, а функція $\alpha_t(\tau) = \alpha(t, \tau, v(\tau))$ є вимірною за $\tau \in [0, t]$.

Теорема 2. Нехай справедливі такі обмеження для регулярної системи (13), (2): матриці K_1 та K_2 при керуваннях задовольняють співвідношення (6), початковий вектор q задовольняє співвідношення (14), багатовзначне відображення (16) приймає непорожні значення. Якщо для деякого селектора $\gamma(t, \tau) \in \Omega(t, \tau)$ існує $s \in (0, T]$ таке, що функція $\xi(t)$ (17) задовольняє умову $\xi(s) \in M_1$, то гру в системі (13), (2) можна завершити у момент часу s . Якщо $\xi(s) \notin M_1$, але

$$\inf_{v(\tau) \in V_1} \int_0^s \alpha(s, \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1, \quad (19)$$

то гру у системі (1), (2) також можна завершити у момент часу s .

Доведення. Використаємо схему доведення теореми з [10]. Для завершення гри у системі (13), (2) допустиме керування переслідувача $u(t) \in U_1$ будуватиметься в залежності від вибраного допустимого керування втікача $v(t) \in V_1$ за допомогою двох багатовзначних відображень:

$$\Gamma_1(t) = \{u \in U_0 : \text{Пе}^{W(s-t)} AI(K_1 u + K_2 v(t)) = \gamma(s, t)\}, \quad (20)$$

$$\Gamma_2(t) = \{u \in U_0 : \text{Пе}^{W(s-t)} AI(K_1 u + K_2 v(t)) - \gamma(s, t) \in \alpha(s, t, v(t))(M_1 - \xi(s))\}. \quad (21)$$

Із застосуванням теореми про прообраз та теореми вимірного вибору [14] одержуємо вимірність цих відображень.

Нехай для селектора $\gamma(t, \tau) \in \Omega(t, \tau)$ існує $s \in (0, T]$ таке, що функція $\xi(t)$ (17) задовольняє умову $\xi(s) \in M_1$. Покажемо, що у цьому разі за будь-яких допустимих керувань втікача $v(t) \in V_1$ знайдеться допустиме керування переслідувача $u(t) \in U_1$, для якого динамічний вектор $Ax(t)$ (15) системи (13), (2) буде приведено на термінальну множину M (3) у момент s . Дійсно, якщо як допустиме керування переслідувача вибрати селектор багатовзначного відображення $\Gamma_1(t)$ (20), то

$$\text{П}Ax(s) = \text{Пе}^{Ws} AIq + \int_0^s \gamma(s, \tau) d\tau = \xi(s) \in M_1.$$

Звідси $Ax(s) \in M$.

Розглянемо випадок, коли $\xi(s) \notin M_1$ та виконується нерівність (19). Нехай $v(t) \in V_1$ є довільне допустиме керування втікача. Шукаємо момент часу t_* , що задовольняє співвідношення

$$\int_0^{t_*} \alpha(s, \tau, v(\tau)) d\tau = 1. \quad (22)$$

За допустимого керування переслідувача $u(t)$, $t \in [0, s]$, виберемо функцію, що на проміжку $[0, t_*]$ є селектором багатовзначного відображення $\Gamma_2(t)$ (21), а на проміжку $[t_*, s]$ є селектором багатовзначного відображення $\Gamma_1(t)$ (20). За такого вибору керування переслідувача справедливі співвідношення

$$\text{П}Ax(s) = \text{Пе}^{Ws} AIq + \int_0^{t_*} \text{Пе}^{W(s-\tau)} AI[K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau)] d\tau + \int_{t_*}^s \gamma(s, \tau) d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= \xi(s) + \int_0^{t_*} [\text{П}e^{W(s-\tau)} AI (K_1 u(\tau) + K_2 v(\tau)) - \gamma(s, \tau)] d\tau \in \\
&\in \xi(s) + \int_0^{t_*} \alpha(s, \tau, v(\tau))(M_1 - \xi(s)) d\tau = \int_0^{t_*} \alpha(s, \tau, v(\tau)) M_1 d\tau \subset M_1,
\end{aligned}$$

де інтеграл $\int_0^{t_*} \alpha(s, \tau, v(\tau)) M_1 d\tau$ від многозначного відображення $\alpha(s, \tau, v(\tau)) M_1$

розуміється в сенсі Ауманна [14] як множина інтегралів від інтегровних селекторів. Оскільки $\text{П}Ax(s) \in M_1$, то $Ax(s) \in M$.

Теорема доведена.

3. ЗАСТОСУВАННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ПРОЦЕСІВ У РАДІОТЕХНІЧНИХ КОЛАХ

На прикладах двох чотирьополосних фільтрів покажемо, як одержані результати застосовуються до вивчення конфліктно-керованої динаміки радіотехнічних систем.

Розглянемо чотирьополосний фільтр (рис. 1). Паралельно з ємностями C_1, C_2 включені провідності g_1, g_2 . На внутрішній гілці розташовані індуктивність L і опір r . За заданих зовнішніх напруг $u(t)$ та $v(t)$ внутрішні струми $I_{C_1}, I_{C_2}, I_{g_1}, I_{g_2}, I_L$ і напруги $U_{C_1}, U_{C_2}, U_r, U_L$ однозначно визначаються із законів Кірхгофа, рівнянь коливань елементів та відповідних початкових значень. Зрозуміло, що можна регулювати значення внутрішніх струмів та напруг за допомогою двох зовнішніх напруг (керувань): $u(t), v(t)$. Виникає питання: чи можна за будь-якої зміни однієї зовнішньої напруги (втрати, збурення тощо) знайти іншу зовнішню напругу таку, що у певний момент часу одне чи декілька абсолютних значень внутрішніх змінних не перевищить порогового значення. Покажемо, як за допомогою результатів, одержаних у розд. 2, можна знайти відповідь на це питання. Запишемо рівняння Кірхгофа та коливань елементів

$$\begin{aligned}
I_{C_1} + I_{g_1} &= I_{C_2} + I_{g_2} + I_L, \quad U_{C_1} + U_L + U_r = u, \quad U_{C_1} + U_{C_2} + v = u, \\
U_L &= \frac{d}{dt}(LI_L), \quad U_r = rI_L, \quad I_{C_j} = \frac{d}{dt}(C_j U_{C_j}), \quad I_{g_j} = g_j U_{C_j}, \quad j=1,2, \quad (23)
\end{aligned}$$

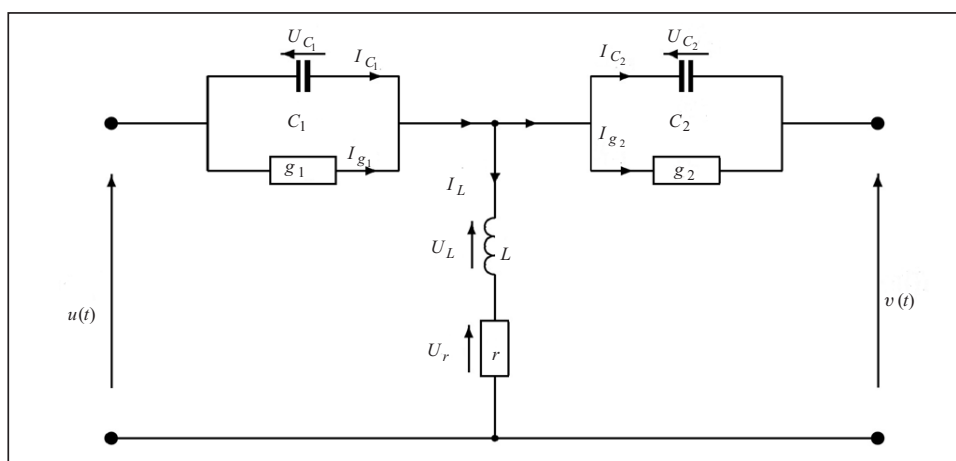


Рис. 1. Чотирьополосний фільтр 1

де L, r, C_j, g_j — додатні сталі. Стани електричного кола характеризуються вектором

$$x(t) = (x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t))^{\text{tr}} = (I_L(t) \ U_{C_1}(t) \ U_{C_2}(t))^{\text{tr}}, \quad (24)$$

що складається з «енергетичних» компонент, які відповідають інерційним елементам. Виконуючі очевидні перетворення у співвідношеннях (23), одержуємо систему трьох диференціально-алгебраїчних рівнянь відносно «енергетичних» компонент (24):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(LI_L) + U_{C_1} + rI_L &= u(t), \\ \frac{d}{dt}(C_1U_{C_1} - C_2U_{C_2}) - I_L + g_1U_{C_1} - g_2U_{C_2} &= 0, \\ U_{C_1} + U_{C_2} &= u(t) - v(t), \end{aligned} \quad (25)$$

яку розглядаємо на відрізку часу $[0, T]$. Допустимі напруги $u(t), v(t) \in L_2(0, T)$ задовольняють обмеження $|u(t)| \leq \rho_1, |v(t)| \leq \rho_2$ ($\rho_1, \rho_2 > 0$) для майже всіх $t \in [0, T]$. У початковий момент часу $t=0$ відомі такі значення:

$$LI_L(0) = q_1, \quad C_1U_{C_1}(0) - C_2U_{C_2}(0) = q_2. \quad (26)$$

Нехай ціль гри у системі (25), (26) полягає у приведенні струму $I_L(t)$ у момент часу $t=s$ ($s \in (0, T]$) на термінальну множину $[-\delta, \delta]$ ($\delta \geq 0$) у класі допустимих напруг переслідувача $u(t)$ за будь-якої допустимої напруги втікача $v(t)$.

У позначеннях

$$A = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & -C_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} r & 1 & 0 \\ -1 & g_1 & -g_2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

система рівнянь (25) приймає векторну форму (1) відносно вектора станів $x(t)$ (24). Тут $n=3, m_1=m_2=1$. Початкові умови (26) мають вигляд (2). Система є регулярною в силу регулярності жмутка матриць $\lambda A + B$. Вигляд матриць AI, G, G^{-1}, F, W (5) наведено у [2, 3]. Гру у системі (25), (26) можна інтерпретувати як гру у дескрипторній системі (1), (2) у позначеннях (27). Маємо області керувань переслідувача $U_0 = [-\rho_1, \rho_1]$ та втікача $V_0 = [-\rho_2, \rho_2]$. У термінальному обмеженні (4) маємо $\Pi = \text{diag}\{1, 0, 0\}$, $d = \delta L$. Умови (6) на матриці K_1, K_2 виконуються, оскільки $F=0$. Відносно початкового вектора $q = (q_1 \ q_2 \ q_3)^{\text{tr}}$ (2) припускаємо, що $q_3 = 0$. Оскільки $f(t)$ — нульовий вектор, то має місце обмеження (7). Знаходимо функціонали (9):

$$\begin{aligned} \varphi_u(h) &= \varphi_u(h_1, h_2, h_3) = \rho_1 |h_1| \int_0^s |\eta(s-\tau)K_1| d\tau, \\ \varphi_v(h) &= \rho_2 |h_1| \int_0^s |\eta(s-\tau)K_2| d\tau, \quad \eta(s) = (1 \ 0 \ 0) e^{Ws} AI. \end{aligned}$$

Із теореми 1 витікає, що гру в системі (25),(26) можна завершити у момент часу s тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність (10), яка у цьому випадку має вигляд

$$\int_0^s [\rho_2 |\eta(s-\tau)K_2| - \rho_1 |\eta(s-\tau)K_1|] d\tau \leq \delta L.$$

Для демонстрації запропонованого методу дослідження диференціальної гри детальніше розглянемо чотириполюсний фільтр, що зображений на рис. 2. Моделювання диференціальної гри для цього кола здійснюється аналогічно моделюванню для кола, що зображене на рис. 1.

Стан системи — це вектор $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^{\text{tr}} = (I_L(t) \ U_C(t))^{\text{tr}}$, що складається з енергетичних змінних інерційних елементів. Із рівнянь Кірхгофа та коливань елементів

$$U_L + U_r = u - v, U_C = u - v, U_r = rI_L, U_L = \frac{d}{dt}(LI_L), I_C = \frac{d}{dt}(CU_C), I_g = gU_C$$

отримуємо рівняння відносно енергетичних компонент I_L та U_C :

$$\frac{d}{dt}(LI_L) + rI_L = u(t) - v(t), \quad U_C = u(t) - v(t), \quad (28)$$

де L, r — додатні сталі. Для системи диференціально-алгебраїчних рівнянь (28), що розглядається на відрізку часу $[0, T]$, задано початкове значення

$$LI_L(0) = q_1. \quad (29)$$

У позначеннях $A = \text{diag}\{L, 0\}$, $B = \text{diag}\{r, 1\}$, $K_1 = (1 \ 1)^{\text{tr}}$, $K_2 = (-1 \ -1)^{\text{tr}}$, $q = (q_1 \ q_2)^{\text{tr}}$ система (28), (29) має вигляд регулярної дескрипторної системи (13), (2) відносно стану $x(t)$. Для однозначної розв'язності системи припускаємо, що $q_2 = 0$. Згідно з означенням диференціальної гри у дескрипторній системі (13), (2) дамо означення диференціальної гри у системі (28), (29). Динамічним вектором буде $Ax(t) = (LI_L(t) \ 0)^{\text{tr}}$. Тому термінальне обмеження накладаємо лише на струм $I_L(t)$. Допустимі зовнішні напруги $u(t), v(t) \in L_2(0, T)$ задовольняють нерівності $|u(t)| \leq \rho_1, |v(t)| \leq \rho_2$ ($\rho_1, \rho_2 > 0$). Гру в системі (28), (29) можна завершити за час s ($0 < s \leq T$), якщо для будь-якої допустимої зовнішньої напруги $v(t)$ знайдеться допустима зовнішня напруга $u(t)$, для якої $|LI_L(s)| \leq d$ ($d \geq 0$).

Згідно з методом, запропонованим у розд. 2, знаходимо

$$\varphi_u(h) = \varphi_u(h_1, h_2) = \rho_1 |h_1| \frac{L}{r} (1 - e^{-\frac{rs}{L}}), \quad \varphi_v(h) = \varphi_v(h_1, h_2) = \frac{\rho_2}{\rho_1} \varphi_u(h).$$

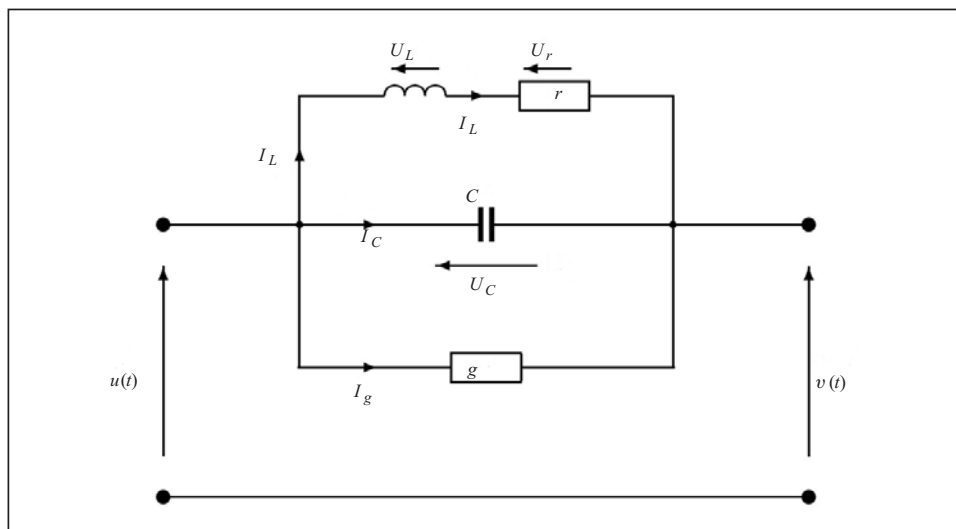


Рис. 2. Чотириполюсний фільтр 2

Із теореми 1 витікає, що гру в системі (28), (29) можна завершити у момент часу s тоді і тільки тоді, коли виконується нерівність

$$p(s, h) = (\rho_2 - \rho_1) |h_1| \frac{L}{r} \left(1 - e^{-\frac{rs}{L}}\right) + h_1 e^{-\frac{rs}{L}} q_1 \leq d \quad \forall h_1 \in \mathbf{R}: |h_1| \leq 1. \quad (30)$$

Виключимо тривіальний випадок закінчення гри в початковий момент часу, тобто виконується нерівність (11), а саме: $|q_1| > d$. Знаходимо функцію $p_0(s)$ (12)

як $p_0(s) = \max \left\{ 0, (\rho_2 - \rho_1) \frac{L}{r} \left(1 - e^{-\frac{rs}{L}}\right) + e^{-\frac{rs}{L}} |q_1| \right\}$. Якщо $L(\rho_2 - \rho_1) \geq dr$, то гру у системі (28), (29) не можна завершити за час $s \in (0, T]$, оскільки не виконується нерівність (30). Якщо $L(\rho_2 - \rho_1) < dr$, то в силу теореми 1 гру можна завершити за час

$$s \geq s_0 = \frac{L}{r} \ln \left[\frac{r|q_1| + L(\rho_1 - \rho_2)}{rd + L(\rho_1 - \rho_2)} \right]. \quad (31)$$

До того ж припускається, що відрізок часу $[0, T]$ є досить великим, так що $T \geq s_0$.

Побудову керування переслідувача $u(t)$, що забезпечує переведення динамічного вектора на тривіальну термінальну множину ($d=0$), здійснимо за схемою доведення теореми 2. Виберемо селектор $\gamma(t, \tau) = 0 \in \Omega(t, \tau)$ (16).

Знайдемо функцію $\alpha(t, \tau, v) = (\rho_1 \operatorname{sign} q_1 + v) q_1^{-1} e^{\frac{r}{L}\tau}$ (18). Умова (19) виконана для всіх s , що задовольняють (31), у випадку $d=0$. Якщо $v(t)$ — допустиме керування втікача, то керування переслідувача є

$$u(t) = \begin{cases} -\rho_1 \operatorname{sign} q_1, & 0 \leq t \leq t^*, \\ v(t), & t > t^*, \end{cases}$$

де t^* — момент часу, що задовольняє (22).

ВИСНОВКИ

Досліджено диференціальну гру зближення у дескрипторній системі. Динаміка подібних систем описується диференціально-алгебраїчними рівняннями, що не розв'язні відносно похідної. Основне припущення полягає у регулярності характеристичного жмутка матриць, що відповідає рівнянню. Це припущення дає змогу представити розв'язок диференціально-алгебраїчного рівняння у вигляді формули варіації сталих. Для отримання умов наближення динамічного вектора системи до циліндричної термінальної множини використано обмеження на опорні функціонали двох множин, що визначаються поведінками переслідувача і втікача. Для побудови керування переслідувача, що гарантує приведення динамічного вектора на термінальну множину, застосовано метод розв'язувальних функцій.

Результати ілюструються на прикладах дескрипторних систем, що описують перехідні режими у радіотехнічних фільтрах. Ці фільтри відносяться до класу чотириполосних схем заміщення хвилеводів. Подібні схеми можна використати для хвилеводу з [15] та коректно поставити для нього ігрову задачу переслідування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V. Sequential composition and decomposition of descriptor control systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 9. P. 60–75. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i9.50>.

2. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 5. P. 1–15. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10>.
3. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Stochastic optimal control of a descriptor system. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, Iss. 2. P. 204–212. <http://doi.org/10.1007/s10559-020-00236-7>.
4. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. Decomposition of descriptor control systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, Iss. 6. P. 924–933. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00312-y>.
5. Chikrii A.A. *Conflict-Controlled Processes*. Dordrecht: Springer Science and Business Media. 2013. 424 p. <http://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7>.
6. Yong, J. *Differential Games: A Concise Introduction*. New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai: World Scientific Publishing, 2015. 337 p. <https://doi.org/10.1142/9121>.
7. Wu H.A. A class of differential game problems for descriptor systems. *International journal of systems science*. 1992. Vol. 23, Iss. 10. P. 1731–1744. <https://doi.org/10.1080/00207729208949417>.
8. Xu H., Mizukami K. On the Isaacs equation of differential games for descriptor systems. *J. Optimization Theory and Applications*. 1994. Vol. 83, Iss. 2. P. 405–419. <https://doi.org/10.1007/BF02190065>.
9. Reddy P.V., Engwerda J.C. Feedback properties of descriptor systems using matrix projectors and applications to descriptor differential games. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2013. Vol. 34, Iss. 2. P. 686–708. <https://doi.org/10.1137/100819321>.
10. Vlasenko L.A., Chikrii A.A. The method of resolving functionals for a dynamic game in a Sobolev system. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2014. Vol. 46, Iss. 7. P. 1–11. <http://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v46.i7.10>.
11. Vlasenko L.A., Rutkas A.G. On a differential game in a system described by an implicit differential-operator equation. *Differential Equations*. 2015. Vol. 51, Iss. 6. P. 798–807. <http://doi.org/10.1134/S0012266115060117>.
12. Vlasenko L. Implicit linear time-dependent differential-difference equations and applications. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2000. Vol. 23, Iss. 10. P. 937–948. [https://doi.org/10.1002/1099-1476\(20000710\)23:10<937::AID-MMA144>3.0.CO;2-B](https://doi.org/10.1002/1099-1476(20000710)23:10<937::AID-MMA144>3.0.CO;2-B).
13. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271, Iss. 1. P. 69–85. <https://doi.org/10.1134/S0081543810040073>.
14. Aubin J.P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1990. 461 p.
15. Rutkas A., Vlasenko L. Implicit operator differential equations and applications to electrodynamics. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2000. Vol. 23, Iss. 1. P. 1–15. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1476\(2000110\)23:1<1::AID-MMA100>3.0.CO;2-5](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1476(2000110)23:1<1::AID-MMA100>3.0.CO;2-5).

L.A. Vlasenko, A.G. Rutkas, V.V. Semenets, A.O. Chikrii
ON A DESCRIPTOR PURSUIT GAME

Abstract. A pursuit differential game in a descriptor system is analyzed. The evolution of the system is described by a linear differential algebraic equation. Solutions of the equation are presented with the help of the formula of variation of constants by the initial data and the control block. We use the technique of set-valued mappings and their selectors, as well as constraints on the functionals defined by the behaviors of the pursuer and evader. The paper contains examples to illustrate the differential game in radio engineering systems. In particular, conflict-controlled transient states in forth-order filters are analyzed.

Keywords: descriptor system, differential algebraic equation, differential game, radio technical filter.

Надійшла до редакції 22.06.2021