УДК 517.9

Н.В. ГОРБАНЬ
Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, Україна, Київ,
e-mail: *nataliia.v.gorban@gmail.com.*

О.А. КАПУСТЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ,
e-mail: *olena.kap@gmail.com.*

О.В. КАПУСТЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна, Київ,
e-mail: *kapustyanav@gmail.com.*

НАБЛИЖЕНИЙ ОПТИМАЛЬНИЙ РЕГУЛЯТОР ДЛЯ СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ[1]

Анотація. Розглянуто задачу оптимального керування розв’язками параболічного рівняння з правою частиною виду $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, з коерцитивним цільовим функціоналом та обмеженим керуванням. Використавши формулу оптимального регулятора незбуреної задачі, обґрунтовано форму наближеного регулятора з перемиканнями для вихідної задачі.

Ключові слова: оптимальне керування, нелінійне параболічне рівняння, оптимальний регулятор.

ВСТУП

У широкому спектрі задач, пов’язаних з оптимізацією еволюційних керованих процесів [1, 2], велике значення має проблема синтезу оптимального керування, тобто знаходження оптимального керування у формі зворотного зв’язку. Для нескінченновимірних систем як на скінченному проміжку часу, так і на півосі (задача оптимальної стабілізації) відповідні результати одержано в роботах [3–8]. Одним із способів розв’язання цієї проблеми є редукція до скінченновимірної задачі та аналіз відповідного функціонального рівняння Беллмана, яке для деяких класів лінійно-квадратичних задач допускає розв’язання, і потім граничний перехід [4]. Як наслідок, можна довести існування оптимального синтезу і записати для нього диференціально-операторне або операторне рівняння Ріккаті. В окремих випадках можна скористатися спектром диференціального оператора і звести початкову задачу до нескінченної сукупності задач оптимального керування малої розмірності. Такий підхід виявляється ефективним за наявності обмежень на керування, коли з’являється точка перемикання і, як наслідок, формула зворотного зв’язку містить додаткове функціональне рівняння (формула параметричного синтезу) [8]. У цій статті використано підхід для пошуку і обґрунтування форми наближеного регулятора в задачі оптимального керування, що складається з параболічного рівняння з правою частиною вигляду $\varepsilon F(y)$, де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, для розв’язків якого потрібно мінімізувати коерцитивний цільовий функціонал за наявності обмежень на керування. Обґрунтуванню наближених методів для дослідження різних класів керованих процесів присвячено роботи [1–3, 9–19]. Зокрема, за відсутності обмежень на керування наближений синтез для еволюційних рівнянь параболічного типу обґрунтовано в [14, 15]. Відмінність представлених у цій роботі результатів полягає у врахуванні точки перемикання, коли наближене керування виходить на обмеження. Шляхом використання формули оптимального параметричного синтезу з пере-

[1]Публікація містить результати досліджень, проведених за грантовою підтримкою НФДУ, проєкт Ф81/41743.

миканням для незбуреної задачі $(\varepsilon = 0)$ обгрунтовано форму наближеного оптимального регулятора з перемиканням для вихідної задачі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Задано трійку Ґільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними та щільними вкладеннями. Позначимо $\|\cdot\|$ та $(\cdot\,,\cdot)$ норму та скалярний добуток у просторі H відповідно. Позначимо $\|\cdot\|_V$ норму в просторі V. Нехай при цьому

$$\forall u \in V \quad \|u\| \le c\|u\|_V .$$

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = \varepsilon F(y) + u(t), \quad t \in [0, T], \\ \quad y\big|_{t=0} = y_0 \in H, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(t) \in U = \{v \in H \,|\, |(v, X)| \le \xi\} \subset H, \tag{2}$$

$$J(y, u) = \|y(T)\|^2 + \gamma \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \to \inf. \tag{3}$$

Тут $\varepsilon \in (0,1)$ — малий параметр, $X \in H$ — фіксований елемент, $\xi > 0$ та $\gamma > 0$ — константи, $A: V \to V^*$ — лінійний неперервний самоспряжений оператор,

$$\langle Au, u \rangle \ge \upsilon_1 \|u\|_V^2 , \tag{4}$$

нелінійне відображення $F: H \to H$ — неперервне нелінійне відображення таке, що задача (1) для кожного $u(t) \in U$ має єдиний розв'язок, наприклад, якщо $F: H \to H$ локально ліпшицеве, тобто $\forall R > 0 \ \exists C(R) > 0$ таке, що $\forall\, y, z \in H$, $\|y\| \le R$, $\|z\| \le R$, справедлива нерівність

$$\|F(y) - F(z)\| \le C(R)\|y - z\|. \tag{5}$$

За виконання умов (4), (5) відомо [9], що задача оптимального керування (1)–(3) для всіх $\varepsilon \in (0,1)$ має розв'язок. При цьому для незбуреної задачі $(\varepsilon = 0)$ для широкого класу початкових даних і параметрів можна знайти формулу оптимального керування у формі зворотного зв'язку [8, 14]. Тоді формула оптимального параметричного синтезу має вигляд

$$u(t, y) = \begin{cases} -\alpha(t)(y, x), \ \ t \in [0, \tau], \\ \quad -\xi, \ [\tau, T], \end{cases} \tag{6}$$

де τ — корінь рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), x) = \xi, \tag{7}$$

$y(\cdot)$ — розв'язок (1) для $\varepsilon = 0$ з керуванням $u = -\alpha(t)(y, x)$.

Зауважимо, що точка τ визначена як момент досягнення керуванням обмеження (2).

Основна мета цієї роботи — показати, що формула (6), (7) визначає керування у формі зворотного зв'язку, яке, з одного боку, є близьким до оптимального для достатньо малих значеннь параметра ε, а з іншого — враховує можливе досягнення наближеним керуванням обмеження (2).

ОПТИМАЛЬНИЙ РЕГУЛЯТОР НЕЗБУРЕНОЇ ЗАДАЧІ

Розглянемо задачу (1)–(3) для $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = u(t), \ \ t \in [0, T], \\ \quad y\big|_{t=0} = y_0 \in H, \end{cases} \tag{8}$$

$$u(t) \in U = \{v \in H \,|\, |(v, X)| \le \xi\}, \tag{9}$$

$$J(y,u) = \| y(T) \|^2 + \gamma \int_0^T \| u(t) \|^2 dt \to \inf. \tag{10}$$

Вважатимемо, що $X = X_1$. Надалі $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty} \subset (0, +\infty)$, $\{X_i\}_{i=1}^{\infty} \subset V$ — розв'язки спектральної задачі $Ax = \lambda x$, $x \in V$. Тоді задача (8)–(10) розкладається на скінченну кількість одновимірних лінійно квадратичних задач вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dt} + \lambda_i y_i = u_i(t), \\ y_i \big|_{t=0} = (y_0, X_i), \\ \| y_i(T) \|^2 + \gamma \displaystyle\int_0^T u_i^2(t) dt \to \inf, \end{cases} \tag{11}$$

причому перша з задач (11) має обмеження на керування:

$$| u_1(t) | \le \xi. \tag{12}$$

З урахуванням необхідних і достатніх умов оптимальності [16] та обмеження (12) покажемо, що за виконання умов

$$\frac{|(y_0, X_1)| e^{-2\lambda_1 T}}{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{2\lambda_1}(1 - e^{-2\lambda_1 T})} < \xi, \qquad \frac{|(y_0, X_1)| e^{-\lambda_1 T}}{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{2\lambda_1}(1 - e^{-2\lambda_1 T})} > \xi \tag{13}$$

оптимальний регулятор задачі (8)–(10) має вигляд

$$u(t, y) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i) X_i - \alpha(t)(y, X_1) X_1, & t \in [0, \tau], \\ -\displaystyle\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i) X_i - \xi X_1, & t \in [\tau, T], \end{cases} \tag{14}$$

де $\tau = \tau_0$ — корінь рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), X_1) = \xi, \tag{15}$$

функції $\alpha_i(t)$, $i \ge 2$, та $\alpha(t) = \alpha_1(t)$ з формули (14) визначаються рівністю

$$\alpha_i(t) = \frac{e^{2\lambda_i (t-T)}}{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{2\lambda_i}(1 - e^{2\lambda_i (t-T)})}, \; i \ge 1. \tag{16}$$

Для прикладу розглянемо тепловий процес $A = -\Delta$, $V = H_0^1(0, \pi)$, $H = L^2(0, \pi)$. У цьому випадку обмеження (9) набувають вигляду

$$U = \left\{ v \in L^2(0, \pi) \,|\, \left| \int_0^{\pi} v(x) \sin x \, dx \right| \le \xi \right\},$$

$X_i(x) = \sin ix,\ \lambda_i = i^2$ і умови (13) ґарантовано виконуються для множини початкових даних $T > 0,\ \xi > 0,\ \gamma > 0,\quad y_0 \in L^2(0,\pi)$:

$$\xi\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\right)e^T \le \int_0^\pi y_0(x)\sin x\, dx \le \frac{\xi e^{2T}}{\gamma}.$$

Отже, для такої задачі можемо отримати оптимальний регулятор вигляду (14) з коефіцієнтами, що визначаються формулою (16), коли $X_i(x) = \sin ix,\ \lambda_i = i^2$.

ОБҐРУНТУВАННЯ НАБЛИЖЕНОГО РЕГУЛЯТОРА

Відомо [9], що умови (4) та (5) забезпечують для задачі (1)–(3) існування розв'язку

$$\{\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon\} \in W(0,T) \times L^2(0,T,H),$$

де $W(0,T) = \{y \in L^2(0,T;V) | \frac{dy}{dt} \in L^2(0,T;V^*)\}$.

Розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = \varepsilon F(y) - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i)X_i, \\ y\big|_{t=0} = y_0. \end{cases} \tag{17}$$

Зазначимо, що для довільного $i \ge 1$ функції $\alpha_i(\cdot)$ монотонно зростають та задовольняють нерівностям $0 \le \alpha_i(t) \le \gamma$. Тоді відображення $F_1 : [0,T] \times H \to H$, визначене формулою

$$F_1(t, y) = -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)(y, X_i)X_i,$$

є неперервним відносно t і глобально Ліпшицевим відносно y. Тоді задача (17) є однозначно розв'язною в $W(0,T)$, тобто існує єдиний розв'язок задачі (17): $y^\varepsilon \in W(0,T)$.

Теорема 1. Нехай початкові дані задовольняють умови (13). Тоді для достатньо малих $\varepsilon > 0$ рівняння

$$\alpha(\tau)(y^\varepsilon(\tau), X) = \xi$$

має корінь $\tau = \tau_\varepsilon$. До того ж має місце нерівність

$$|\tau_\varepsilon - \tau_0| \le K\varepsilon$$

для деякої сталої $K > 0$, що не залежить від ε.

Доведення. Оскільки

$$\varepsilon F(y) \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

то відповідно до результатів [9] отримуємо

$$y^\varepsilon \to y \text{ в } C([0,T]; H), \tag{18}$$

де $y \in W(0,T)$ — єдиний розв'язок задачі:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} + Ay = F_1(t, y), \\ y\big|_{t=0} = y_0 \in H. \end{cases} \tag{19}$$

Розглянемо тепер відображення G, визначене таким чином:

$$G(\varepsilon, \tau) = \alpha(\tau)(y^\varepsilon(\tau), X) - \xi.$$

Внаслідок (18) відображення G є неперервним за сукупністю змінних, до того ж $G(0, \tau_0) = 0$, де τ_0 — корінь рівняння

$$\alpha(\tau)(y(\tau), X) = \xi, \tag{20}$$

$y(\cdot)$ — розв'язок задачі (19). З (20) отримуємо

$$G'_\tau|_{\{\varepsilon=0,\tau=\tau_0\}} = \alpha'(\tau)(y^\varepsilon(\tau), X)|_{\{\varepsilon=0,\tau=\tau_0\}} + \alpha(\tau)(-\lambda(y^\varepsilon(\tau), X) +$$

$$+\varepsilon(F(y^\varepsilon(\tau)), X) + (F_1(\tau, y^\varepsilon(\tau)), X))|_{\{\varepsilon=0,\tau=\tau_0\}} = \alpha'(\tau_0)\frac{\xi}{\alpha(\tau_0)} - \lambda\xi +$$

$$+\varepsilon\alpha(\tau_0)(F(y(\tau_0)), X) - \xi\alpha(\tau_0) = \lambda + \varepsilon\alpha(\tau_0)(F(y(\tau_0)), X). \tag{21}$$

Оскільки для довільного $t \in [0, \tau_0]$ внаслідок (15) справедлива нерівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 + v_1\|y(t)\|_V^2 \le \gamma\|y(t)\|^2,$$

то з (21) отримуємо, що для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$G'_\tau|_{\{\varepsilon=0,\tau=\tau_0\}} > \frac{\lambda}{2}.$$

Тоді за теоремою про неявну функцію отримуємо твердження теореми 1.

Теорема 2. Регулятор, визначений формулою (15), з точкою перемикання $\tau = \tau_\varepsilon$ з теореми 1 є наближеним до оптимального в такому сенсі: для будь-якого $\delta > 0$ існує таке значення $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива нерівність

$$|J(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) - J(y^\varepsilon, u^\varepsilon(t, y^\varepsilon))| < \delta,$$

де y^ε — розв'язок задачі (1) з керуванням $u^\varepsilon(t, y^\varepsilon)$.

Доведення. Для доведення теореми достатньо показати, що

$$J(\bar{y}^\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon) \to J(\bar{y}, \bar{u}), \varepsilon \to 0, \tag{22}$$

$$J(y^\varepsilon, u^\varepsilon(t, y^\varepsilon)) \to J(\bar{y}, \bar{u}), \varepsilon \to 0, \tag{23}$$

де $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — оптимальний процес незбуреної задачі (8)–(10). Зазначимо, що збіжність (23) випливає з того, що для задачі (8)–(10) для всіх $t \in [0, T]$

$$\bar{u}(t) = u(t, \bar{y}(t)) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t)(\bar{y}(t), x_i)x_i, & t \in [0, \tau_0], \\ \sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i(t)(\bar{y}(t), x_i)x_i - \xi x_1, & t \in [\tau_0, T], \end{cases}$$

де τ_0 — корінь рівняння $\alpha(\tau)(\bar{y}(\tau), x) = \xi$. Оскільки $\tau_\varepsilon \to \tau_0$ для $\varepsilon \to 0$, то внаслідок (18) справедливо, що $y^\varepsilon(\tau_\varepsilon) \to y(\tau_0)$ для $\varepsilon \to 0$, де y — єдиний розв'язок задачі (19). Тоді отримуємо, що $y = \bar{y}$. Отже, $u^\varepsilon(t, y^\varepsilon(t)) \to u(t, \bar{y}(t))$ у просторі $L^2(0, T; H)$ для $\varepsilon \to 0$, звідки й отримуємо (23).

Доведемо тепер збіжність (22). З коерцитивності функціоналу J випливає, що з точністю до підпослідовності справедлива слабка збіжність $\bar{u}^\varepsilon \to \hat{u}$ для

$\varepsilon \to 0$ в просторі $L^2(0,T;H)$. Тоді з [10] отримуємо, що $\bar{y}^{\varepsilon} \to \hat{y}$ для $\varepsilon \to 0$ слабко в просторі $C([0,T];H)$, де $\hat{y}$ — розв'язок незбуреної задачі (8) з керуванням $\hat{u}$. При цьому для всіх $u \in U$ $J(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}) \leq J(y^{\varepsilon}, u)$.

Аналогічно до попередніх міркувань отримаємо, що $y^{\varepsilon} \to y$ для $\varepsilon \to 0$ слабко в просторі $C([0,T];H)$, де y — єдиний розв'язок задачі (8) з керуванням u. Тоді $\underline{\lim} J(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}) \geq J(\hat{y}, \hat{u})$. Крім того, $\overline{\lim} J(\bar{y}^{\varepsilon}, \bar{u}^{\varepsilon}) \leq J(y^{\varepsilon}, u) = J(y, u)$.

Отже, процес $(\hat{y}, \hat{u})$ — оптимальний для задачі (8)–(10). Теорему доведено.

ВИСНОВКИ

У роботі вирішується проблема конструювання та обгрунтування наближеного оптимального керування у формі зворотного зв'язку процесами, поведінка яких може бути описана рівняннями параболічного типу. Основним об'єктом дослідження є задача оптимального керування, що містить параболічне рівняння з обмеженим керуванням, права частина якого зазнає малих збурень порядку ε, та коерцитивний цільовий функціонал. У роботі також розглянуто незбурену задачу, для якої представлено формулу оптимального регулятора, що враховує точку перемикання, в якій керування досягає заданого обмеження. На основі цього встановлено теорему, що обгрунтовує формулу наближеного оптимального регулятора з перемиканням для вихідної збуреної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S. Nonlinear analysis and control of physical processes and fields. Berlin: Springer, 2004. 508 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-18770-4.
2. Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O. Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing. I. Berlin: Springer, 2011. 247 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13837-9.
3. Zgurovsky M.Z., Mel'nik V.S., Kasyanov P.O. Evolution inclusions and variational inequalities for Earth data processing. II. Berlin: Springer, 2011. 274 p. https://doi.org/10.1007/ 978-3-642-13878-2.
4. Curtain R.F., Pritchard A.J. Ininite-dimensional linear systems theory. Berlin: Springer, 1978. 298 p. https://doi.org/10.1007/BFb0006761.
5. Bensoussan A. Regular perturbations in optimal control. *Singular Perturbations in Systems and Control.* Berlin: Springer, 1983. P. 169–183. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2638-7_6.
6. Егоров А.И., Михайлова Т.Ф. Синтез оптимального управления тепловым процессом с ограниченным управлением. *Автоматика.* 1990. № 3. С. 57–61.
7. Бублик Б.Н., Невидомский А.И. Синтез оптимального сосредоточенного управления для уравнения теплопроводности. *Модели и системы обработки информации.* 1982. № 1. С. 78–87.
8. Белозеров В.Е., Капустян В.Е. Геометрические методы модального управления. Киев: Наук. думка, 1999. 260 с.
9. Denkowski Z., Mortola S. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 1993. Vol. 78, N 2. P. 365–391. https://doi.org/10.1007/BF00939675.
10. Lavrova O., Mogylova V., Stanzhytskyi O., Misiats O. Approximation of the optimal control problem on an interval with a family of optimization problems on time scales. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory.* 2017. Vol. 17, N 3. P. 303–314.

11. Pichkur V.V., Sasonkina M.S. Practical stabilization of discrete control systems. *International Journal of Pure and Applied Mathematics.* 2012. Vol. 81, N 6. P. 877–884.

12. Kapustian O.A., Nakonechnyi O.G., Chikrii A.O. Approximate guaranteed mean square estimates of functionals on solutions of parabolic problems with fast oscillating coefficients under nonlinear observations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55, N 5. P. 785–795. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00189-6.

13. Kapustyan O.V., Skkundin D.V. Global attractors of one nonlinear parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2003. Vol. 55, N 4. P. 446–455. https://doi.org/10.1023/B:UKMA.0000010155.48722.f2.

14. Kapustyan O.V., Kapustian O.A., Sukretna A.V. Approximate bounded synthesis for distributed systems. Saarbrucken: Lambert academic publishing, 2013. 236 p.

15. Kapustyan O.A., Sukretna A.V. Approximate averaged synthesis of the problem of optimal control for a parabolic equation. *Ukrainian Mathematical Journal.* 2004. Vol. 56, N 10. P. 1653–1664. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0141-7.

16. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. Київ: Вища школа, 1975. 328 с.

17. Gorban N.V., Kasyanov P.O. On regularity of all weak solutions and their attractors for reaction-diffusion inclusion in unbounded domain. Continuous and distributed systems. Berlin: Springer, 2014. P. 205–220. https://doi.org/10.1007/978-3-319-03146-015.

18. Kasyanov P.O., Toscano L., Zadoianchuk N.V. Long-time behaviour of solutions for autonomous evolution hemivariational inequality with multidimensional “reaction-displacement” law. *Abstract and Applied Analysis.* 2012. Vol. 2012, N 3. P. 1–21. https://doi.org/10.1155/2012/450984.

19. Zgurovsky M., Gluzman M., Gorban N., Kasyanov P., Paliichuk L., Khomenko O. Uniform global attractors for non-autonomous dissipative dynamical systems. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Ser. B.* 2017. Vol. 22, N 5. P. 2053–2065. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2017120.

N.V. Gorban, O.V. Kapustyan, O.A. Kapustian

APPROXIMATE OPTIMAL CONTROLLER FOR A WEAKLY NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATION OF PARABOLIC TYPE

Abstract. We consider the optimal control problem for solutions of a parabolic equation with the right-hand side of the form $\varepsilon F(y)$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, with a coercive cost functional and bounded control. Using the formula of the optimal controller of the undisturbed problem, the form of the approximate controller with switching for the initial problem is substantiated.

Keywords: optimal control, nonlinear parabolic equation, optimal controller.

Надійшла до редакції 01.03.2021