

В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: v_bulav@ukr.net.

ДЕЯКІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ, ВІДПОВІДНІ МОДЕЛЯМ ДРОБОВОЇ ДИФУЗІЇ РОЗПОДІЛЕНОГО ПОРЯДКУ

Анотація. На основі моделей дробової дифузії розподіленого порядку виконано постановки та одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач аномальної геофільтраційної динаміки, зокрема задачі про притік до галереї, розміщеної між двома контурами живлення в тришаровому геопористому середовищі. Для спрощеного варіанту фільтраційної моделі розподіленого порядку одержано розв'язки прямої та оберненої крайових задач фільтраційної динаміки, а також задачі фільтрації з нелокальними граничними умовами.

Ключові слова: математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, геопористі середовища, неklasичні моделі, модель фільтрації з похідною розподіленого порядку, крайові задачі, замкнені розв'язки.

ВСТУП

Дослідження в галузі математичного моделювання процесів підземної гідродинаміки (зокрема, руху ґрунтових вод, газів та газових сумішей, розчинів тощо) важливі насамперед для задач гідротехнічного та іригаційного будівництва, охорони навколишнього природного середовища та водних ресурсів, гірничодобувної промисловості, а також цивільного будівництва. Зокрема, теорія фільтрації в ґрунтових середовищах дає змогу прогнозувати зміни, які можуть відбуватися в природних ґрунтових потоках у районах будівництва водосховищ, каналів та меліоративних систем, що важливо для оцінки можливих втрат під час фільтрації з водосховищ і каналів, а також в процесі проєктування різноманітних дренажних споруд, створюваних для боротьби з підтопленням певних територій [1, 2].

Для розв'язання задач ефективного прогнозування динаміки фільтраційних процесів у геопористих середовищах важливою є наявність надійних теоретичних моделей та розвинутих ефективних методів математичного моделювання цих процесів. До того ж зазначимо, що реальне водоносне пористе середовище за геологічною будовою переважно неоднорідне і в процесі побудови відповідних математичних моделей фільтрації часто зводиться до деякої шаруватої структури, що складається з сильнопроникних шарів та слабкопроникних прошарків, що чергуються. Теоретичний опис динаміки фільтраційних процесів у таких багатошарових ґрунтах знерідка необхідний для правильного розуміння особливостей притоку ґрунтових вод у різноманітних схемах фільтрації до дренажних систем та вертикальних свердловин [3, 4]. Окремо зазначимо, що наразі актуальні дослідження в галузі математичного моделювання динаміки аномальних фільтраційних процесів у геопористих середовищах, зокрема моделювання динаміки фільтраційно-консолідаційних процесів у рамках дробово-фрактального підходу [5–12].

Запропонована робота присвячена розв'язанню деяких крайових задач дробово-диференційної фільтраційної динаміки в тришаровому пласті (який складається з двох водоносних горизонтів, розділених слабкопроникним прошарком) за припущення, що фільтраційні процеси у цих водоносних горизонтах можна адекватно описувати на основі моделі дробової дифузії розподіленого

порядку [7, 13, 14]. Розглядаються дві дробово-диференціальні математичні моделі фільтраційного процесу: вихідна та спрощена. З використанням припущень спрощеної математичної моделі в роботі одержано розв'язки прямої та оберненої крайових задач фільтраційної динаміки, а також задачі з нелокальними граничними умовами. За припущень вихідної математичної моделі одержано замкнений розв'язок задачі про притік до галереї, розміщеної між двома контурами живлення в тришаровому геопористому середовищі.

МОДЕЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ З ПОХІДНИМИ РОЗПОДІЛЕНОГО ПОРЯДКУ

Розглянемо задачу неусталеної фільтрації ґрунтових вод у тришаровому пласті, верхній і нижній шари якого розділені слабкопроникним прошарком потужності m_0 з коефіцієнтом фільтрації k_0 . Нехай верхній (потужності m_1) і нижній (потужності m_2) шари ґрунту характеризуються коефіцієнтами фільтрації k_1, k_2 відповідно. Припустимо також, що фільтрація відбувається з двох водойм з заданими рівнями ґрунтових вод на їхніх межах і на вільну поверхню ґрунтового масиву діє інфільтраційне живлення відомої інтенсивності g . Позначимо $h_1(x, t), h_2(x, t)$ — напірні функції в верхньому і нижньому основних шарах розглядуваного ґрунтового масиву.

Тоді, як відомо [3, 4], динаміка неусталеного руху ґрунтових вод у цьому тришаровому пласті за жорсткого режиму фільтрації в слабкопроникному прошарку моделюється такою системою рівнянь:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = \kappa_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \tau_1 (h_1 - h_2) + g, \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \tau_2 (h_1 - h_2), \quad (2)$$

де $\kappa_i = \frac{k_i m_i}{\beta_i^*}$, $\tau_i = \frac{k_0}{m_0 \beta_i^*}$ ($i=1,2$), β_i^* — коефіцієнти водовіддачі верхнього

($i=1$) та нижнього ($i=2$) шарів, g — функція інтенсивності джерел. Для математичного опису багатьох процесів переносу з аномальною динамікою сьогодні достатньо широке розповсюдження набуло використання моделей дробової дифузії з похідними розподіленого порядку [7, 13–19]. Відповідний підхід застосовано далі для математичного моделювання фільтраційних процесів з аномальною (зокрема, «надповільною») динамікою в шаруватих пластах, які складаються з двох водоносних горизонтів, розділених слабкопроникним прошарком. З використанням зазначеної методики, будемо описувати динаміку фільтраційного процесу системою рівнянь, що узагальнює систему (1), (2):

$${}_0 D_t^{[\mu]} h_1(x, t) = \kappa_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \tau_1 (h_1 - h_2) + g, \quad (3)$$

$${}_0 D_t^{[\mu]} h_2(x, t) = \kappa_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} + \tau_2 (h_1 - h_2), \quad (4)$$

де ${}_0 D_t^{[\mu]}$ — оператор дробової похідної розподіленого порядку, що визначається співвідношенням [15–19]

$${}_0 D_t^{[\mu]} u(t) = \int_0^1 \mu(\beta) {}_0^C D_t^\beta u(t) d\beta,$$

${}_0^C D_t^\beta u(t)$ — дробова похідна Капуто–Герасимова за змінною t порядку β ($0 < \beta \leq 1$) [20], $\mu(\beta)$ — задана вагова функція ($\mu(\beta) \neq 0$, $0 < \int_0^1 \mu(\beta) d\beta < \infty$).

Припускаючи, що проникність ґрунтового середовища нижнього шару є набагато меншою за проникність середовища верхнього, та нехтуючи в рівняннях (3), (4) (аналогічно випадку тріщинуватого середовища з подвійною пористістю [1, 21]) доданками ${}_0 D_t^{[\mu]} h_1$, $\kappa_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2}$, одержуємо спрощену модельну систему рівнянь динаміки фільтраційного процесу у вигляді

$$\kappa_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - \tau_1 (h_1 - h_2) + g = 0, \quad (5)$$

$${}_0 D_t^{[\mu]} h_2(x, t) - \tau_2 (h_1 - h_2) = 0. \quad (6)$$

Система рівнянь (5), (6) легко зводиться до одного рівняння, яке має для кожної з невідомих функцій h_1, h_2 однаковий вигляд

$${}_0 D_t^{[\mu]} h(x, t) = \kappa (1 + \tau_r) {}_0 D_t^{[\mu]} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + f(x), \quad (7)$$

де $\kappa = \kappa_1 \frac{\tau_2}{\tau_1}$, $\tau_r = \frac{1}{\tau_2}$, $f(x)$ — функція інтенсивності джерел, $h(x, t)$ — шукана напірна функція.

Математичну модель розглядуваного фільтраційного процесу, що базується на модельному рівнянні (7), надалі будемо називати спрощеною моделлю відносно вихідної моделі, яка визначається співвідношеннями (3), (4).

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРЯМОЇ ТА ОБЕРНЕНОЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ НА ОСНОВІ СПРОЩЕНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

Найпростіша модельна пряма фільтраційна задача, поставлена за припущень спрощеної математичної моделі, зводиться до розв'язання в області $\Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t < +\infty\}$ крайової задачі для рівняння (7) за виконання умов

$$h(0, t) = u_1, \quad h(1, t) = u_2 \quad (t \geq 0), \quad (8)$$

$$h(x, 0) = h_0(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad (9)$$

де $h_0(x)$ — заданий початковий розподіл напорів у масиві, u_1, u_2 — задані величини напорів на межах водойм, що живлять тришаровий пласт одиначної потужності.

Зазначимо, що розглядувана крайова задача (7)–(9) стандартним чином зводиться до відповідної крайової задачі з однорідними граничними умовами застосуванням підстановки $u(x, t) = h(x, t) - u_1(1-x) - u_2x$. У результаті одержуємо задачу

$${}_0 D_t^{[\mu]} u(x, t) = \kappa (1 + \tau_r) {}_0 D_t^{[\mu]} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (10)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (11)$$

$$u(x, 0) = \zeta(x) \quad (x \in [0, 1]), \quad (12)$$

де $\zeta(x) = h_0(x) - u_1(1-x) - u_2x$.

Припустимо, що існує скінченне інтегральне синус-перетворення Фур'є функції $u(x, t)$ за геометричною змінною x [22]

$$u_n(t) = \int_0^1 u(x, t) \varphi_n(x) dx, \quad (13)$$

де

$$\varphi_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad \lambda_n = n^2 \pi^2, \quad n \in N. \quad (14)$$

Тоді, застосовуючи перетворення (13) до задачі (10)–(12), одержуємо таку задачу Коші для рівняння з похідною розподіленого порядку:

$${}_0 D_t^{[\mu]} u_n(t) + \omega_n u_n(t) = \frac{\omega_n}{\kappa \lambda_n} f_n \quad (n \in N), \quad (15)$$

$$u_n(0) = \zeta_n \quad (n \in N), \quad (16)$$

де

$$\omega_n = \frac{\kappa \lambda_n}{1 + \tau_r \kappa \lambda_n}, \quad f_n = (f, \varphi_n), \quad \zeta_n = (\zeta, \varphi_n) \quad (n \in N), \quad (17)$$

(\cdot, \cdot) — скалярний добуток у $L^2[0, 1]$.

З урахуванням результатів [16–19] розв'язок задачі (15), (16) одержимо у вигляді

$$u_n(t) = (\zeta_n - \frac{f_n}{\kappa \lambda_n}) S_n(t) + \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \quad (n \in N), \quad (18)$$

де

$$S_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{r} G_n(r) dr, \quad G_n(r) = \frac{\omega_n B(r)}{[A(r) + \omega_n]^2 + B^2(r)} \quad (n \in N),$$

$$A(r) = \int_0^1 \mu(\beta) r^\beta \cos(\pi \beta) d\beta, \quad B(r) = \int_0^1 \mu(\beta) r^\beta \sin(\pi \beta) d\beta, \quad (19)$$

а величина ω_n визначається співвідношенням (17).

Знаходячи оригінал за зображенням синус-перетворення Фур'є, розв'язок розглядуваної крайової задачі записуємо у вигляді

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=1}^\infty \left[\left(\zeta_n - \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \right) S_n(t) + \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \right] \varphi_n(x), \quad (20)$$

де $\varphi_n(x), S_n(t)$ визначаються згідно з співвідношеннями (14), (19).

Щодо визначення умов збіжності ряду (20) зазначимо, що оскільки для функцій $S_n(t)$ ($n \in N$) згідно з [19, 23] мають місце нерівності $0 \leq S_n(t) \leq 1$ ($t \geq 0, n \in N$), то з (18) знаходимо

$$|u_n(t)| \leq C_1 |\zeta_n| + \frac{C_2}{\lambda_n} |f_n| \quad (C_1, C_2 > 0, n \in N). \quad (21)$$

Підпорядковуючи функції f_n, ζ_n умовам вигляду $f, \zeta \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $\zeta(0) = \zeta(1) = 0$, інтегруванням частинами в рівностях $f_n = (f, \varphi_n)$, $\zeta_n = (\zeta, \varphi_n)$ можна показати справедливість співвідношень $f_n, \zeta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ($n \rightarrow \infty$).

З урахуванням цього та співвідношень (21) на основі мажорантної ознаки Вейерштраса робимо висновок, що ряд (20) рівномірно збігається в області $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, \infty)$. Звідси випливає, що $u \in C(\bar{\Omega})$. Аналогічно можна встановити рівномірну збіжність у випадку $t \geq \bar{t} > 0$ відповідних рядів для функцій $u_{xx}(x, t)$,

${}_0D_t^{[\mu]}u_{xx}(x,t)$, ${}_0D_t^{[\mu]}u(x,t)$. Таким чином, функція $u(x,t)$ яка визначається згідно з (20), (19), є регулярним розв'язком задачі (10)–(12). Розв'язок вихідної задачі (7)–(9) у цьому разі запишемо у вигляді

$$h(x,t) = u_1(1-x) + u_2x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\xi_n - \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \right) S_n(t) + \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \right] \varphi_n(x),$$

де $\varphi_n(x)$, $S_n(t)$ ($n \in N$) визначаються співвідношеннями (14), (19).

Обернену крайову задачу фільтрації сформулюємо як задачу відшукування пари функцій $\{u(x,t), f(x)\}$ на основі розв'язання задачі (10)–(12) за виконання додаткової (кінцевої) умови $u(x,T) = \eta(x)$ ($T > 0$). Таким чином, вихідна задача має вигляд

$${}_0D_t^{[\mu]}u(x,t) = \kappa(1 + \tau_r {}_0D_t^{[\mu]}) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad (22)$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad (23)$$

$$u(x,0) = \zeta(x), \quad u(x,T) = \eta(x), \quad x \in [0,1], \quad (24)$$

де $\zeta(x)$, $\eta(x)$ — задані на відрізку $[0,1]$ функції.

Оскільки в зображеннях скінченного синус-перетворення Фур'є (13) остання з умов (24) приймає вигляд $u_n(T) = \eta_n$, де $\eta_n = (\eta(x), \varphi_n(x))$, звідси з урахуванням співвідношення (18) одержуємо

$$f_n = \kappa \lambda_n \frac{\eta_n - \xi_n S_n(T)}{1 - S_n(T)} \quad (n \in N). \quad (25)$$

Зі співвідношення (25) з урахуванням нерівностей [19, 23] $S_n(t) < S_1(t)$ ($t > 0, n = 2, 3, \dots$) одержуємо

$$|f_n| \leq \lambda_n (M_1 |\xi_n| + M_2 |\eta_n|) \quad (M_1, M_2 > 0, n \in N). \quad (26)$$

Нехай для функцій $\zeta(x), \eta(x)$ виконуються умови $\zeta, \eta \in C^4[0,1], \zeta^{(i)}(0) = \zeta^{(i)}(1) = 0, \eta^{(i)}(0) = \eta^{(i)}(1) = 0$ ($i = 0, 2$). Оскільки за цих умов мають місце співвідношення $\zeta_n, \eta_n = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$ ($n \rightarrow \infty$), приймаючи

до уваги (26), робимо висновок, що відповідний ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається рівномірно на відрізку $[0,1]$ і що $f \in C[0,1]$. Таким чином, умовами існування класичного розв'язку задачі (22)–(24) є такі: $\zeta(x), \eta(x) \in C^4[0,1], \zeta^{(i)}(0) = \zeta^{(i)}(1) = \eta^{(i)}(0) = \eta^{(i)}(1) = 0$ ($i = 0, 2$).

Стосовно єдиності розв'язку задачі (22)–(24) зазначимо наступне. Припустимо існування двох її розв'язків: $\{u_1(x,t), f_1(x)\}$ та $\{u_2(x,t), f_2(x)\}$. Тоді функції $u = u_1 - u_2, f = f_1 - f_2$ є розв'язками такої крайової задачі:

$${}_0D_t^{[\mu]}u(x,t) = \kappa(1 + \tau_r {}_0D_t^{[\mu]}) u''_{xx} + f(x),$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0,$$

або в образах перетворення Фур'є (13), (14)

$${}_0D_t^{[\mu]}u_n(t) + \omega_n u_n(t) = \frac{\omega_n}{\kappa \lambda_n} f_n \quad (n \in N),$$

$$u_n(0) = 0, \quad u_n(T) = 0 \quad (n \in N).$$

Звідси на основі співвідношень (18), (25) маємо $u_n(t) \equiv 0, f_n = 0$ ($n \in N$). З урахуванням повноти системи $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ у $L^2[0,1]$ остаточно одержуємо $u(x,t) \equiv 0, f(x) \equiv 0$.

Розглянемо важливий окремий випадок, коли рівняння моделі є дифузійним рівнянням фіксованого порядку. Покладаючи в (10) $\mu(\beta) = \delta(\beta - \alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), де $\delta(x)$ — δ -функція Дірака [24], перетворюємо задачу (15), (16) у відповідну задачу Коші для рівняння з дробовою похідною Капуто–Герасимова порядку α

$${}_0^C D_t^\alpha u_n(t) + \omega_n u_n(t) = \frac{\omega_n}{\kappa \lambda_n} f_n, \quad u_n(0) = \xi_n \quad (n \in N). \quad (27)$$

Оскільки в розглядуваному випадку має місце співвідношення [17]

$$S_n(t) = \omega_n \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty e^{-rt} \frac{r^{\alpha-1}}{r^{2\alpha} + 2\omega_n r^\alpha \cos(\pi\alpha) + \omega_n^2} dr \equiv E_\alpha(-\omega_n t^\alpha), \quad (28)$$

де $E_\alpha(\cdot)$ — однопараметрична функція Міттаг-Леффлера [25], то з (27) на основі (20), (28) одержуємо розв'язок відповідної крайової задачі в рамках фільтраційної моделі з похідними Капуто–Герасимова у вигляді

$$u(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \varphi_n(x), \quad u_n(t) = \left(\xi_n - \frac{f_n}{\kappa \lambda_n} \right) E_\alpha(-\omega_n t^\alpha) + \frac{f_n}{\kappa \lambda_n}.$$

Аналогічно зі співвідношення (25) з урахуванням (28) одержуємо

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x), \quad f_n = \kappa \lambda_n \frac{\eta_n - \xi_n E_\alpha(-\omega_n T^\alpha)}{1 - E_\alpha(-\omega_n T^\alpha)}.$$

ЗАДАЧА ФІЛЬТРАЦІЇ З НЕЛОКАЛЬНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

На основі фільтраційної математичної моделі з похідними розподіленого порядку розглянемо задачу моделювання дробово-диференційної динаміки поля напорів для раніше наведеної фільтраційної схеми за припущення, що відома величина напору на лівій $x=0$ грані масиву та має місце рівність витрат рідини через обидві його грані: $x=0, x=1$. У математичній постановці розглядувана задача зводиться до розв'язання в області $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < +\infty\}$ такої крайової задачі:

$${}_0 D_t^{[\mu]} h(x,t) = \kappa (1 + \tau_r) {}_0 D_t^{[\mu]} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (29)$$

$$h(0,t) = 0, \quad \frac{\partial h(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial h(1,t)}{\partial x}, \quad (30)$$

$$h(x,0) = h_0(x), \quad (31)$$

де $h_0(x)$ — задана функція початкового розподілу напорів у масиві. До того ж зазначимо, що неklasична (нелокальна) гранична умова, визначена згідно з (30), є добре відомою умовою Самарського–Іонкіна [26], яка виражає рівність потоків рідини через грані розглядуваного масиву.

Аналогічно [26, 27] шукатимемо розв'язок задачі (29)–(31) у вигляді біортогонального розкладу

$$h(x,t) = v_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [u_k(t) X_{2k-1}(x) + v_k(t) X_{2k}(x)], \quad (32)$$

де

$$u_k(t) = (h(x, t), Y_{2k-1}(x)) \quad (k=1, 2, \dots), \quad v_k(t) = (h(x, t), Y_{2k}(x)) \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

$$X_0(x) = x, \quad X_{2k}(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \text{ — власні функції спектральної задачі}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (0 < x < 1), \quad (33)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(0) = X'(1), \quad (34)$$

що відповідають власним значенням $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) [26].

Відповідні власним значенням λ_k приєднані функції $X_{2k-1}(x)$ мають вигляд [27] $X_{2k-1}(x) = x \cos(\sqrt{\lambda_n} x)$ ($k=1, 2, \dots$). У цьому разі, як показано в [27, 28], система власних та приєднаних функцій спряженої до (33), (34) задачі записується у вигляді

$$Y_0(x) = 2, \quad Y_{2k-1}(x) = 4 \cos(\sqrt{\lambda_k} x), \quad Y_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(\sqrt{\lambda_k} x) \quad (k \in N).$$

Розкладаючи в біортогональний ряд початкову функцію

$$h_0(x) = \varphi_0^{(2)} X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k^{(1)} X_{2k-1}(x) + \varphi_k^{(2)} X_{2k}(x)],$$

$$\varphi_k^{(1)} = (h_0(x), Y_{2k-1}(x)) \quad (k=1, 2, \dots), \quad \varphi_k^{(2)} = (h_0(x), Y_{2k}(x)) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (35)$$

на основі (29)–(31) одержуємо для визначення функцій $u_k(t)$ ($k=1, 2, \dots$), $v_k(t)$ ($k=0, 1, 2, \dots$) такі послідовності задач Коші для рівнянь з дробовими похідними розподіленого порядку:

$${}_0 D_t^{[\mu]} v_0(t) = 0, \quad v_0(0) = \varphi_0^{(2)}, \quad (36)$$

$${}_0 D_t^{[\mu]} u_k(t) + \omega_k u_k(t) = 0, \quad u_k(0) = \varphi_k^{(1)} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (37)$$

$${}_0 D_t^{[\mu]} v_k(t) + \omega_k v_k(t) = f_k(t), \quad v_k(0) = \varphi_k^{(2)} \quad (k=1, 2, \dots), \quad (38)$$

де

$$f_k(t) = -\zeta_k \omega_k u_k(t), \quad \zeta_k = \frac{2\omega_k}{\kappa \lambda_k^{3/2}}, \quad \omega_k = \frac{\kappa \lambda_k}{1 + \tau_r \kappa \lambda_k} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (39)$$

Зі співвідношень (36) одержуємо $v_0(t) = \varphi_0^{(2)}$. Розв'язки задач (37) на основі [15–19, 23] запишемо у вигляді

$$u_k(t) = \varphi_k^{(1)} S_k(t) \quad (k \in N), \quad (40)$$

де $S_k(t)$ ($k \in N$) визначаються згідно з (19), (17).

Для задач (38), (39) на основі [23, 29] одержуємо такі співвідношення:

$$v_k(t) = \varphi_k^{(2)} S_k(t) - \zeta_k \omega_k \int_0^t u_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} S_k(t - \tau) d\tau \quad (k \in N). \quad (41)$$

Отже, розв'язок розглядуваної задачі (29)–(31) визначається співвідношенням (32), причому функції $u_k(t)$, $v_k(t)$ ($k \in N$) визначаються співвідношеннями (40) і (41) відповідно. Щодо умов збіжності ряду в співвідношенні (32) необхідно зазначити наступне. Нехай $h_0(x) \in C^4[0, 1]$ та виконуються додаткові

умови $h_0^{(i)}(0) = 0$ ($i = 0, 2$), $h_0^{(j)}(0) = h_0^{(j)}(1)$ ($j = 1, 3$). Тоді чотириразовим інтегруванням частинами в рівностях (35) з урахуванням накладених обмежень на $h_0(x)$ ($x \in [0, 1]$) можна показати справедливості співвідношень $\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)} = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$ ($k \rightarrow \infty$). Зважаючи на те, що у випадку $t \geq 0$ мають місце нерівності [19] $0 \leq S_k(t) \leq 1$ ($k \in N$), одержуємо зі співвідношення (40) оцінку

$$|u_k(t)| \leq C_1 \left| \varphi_k^{(1)} \right| \quad (C_1 > 0, k \in N). \quad (42)$$

Оскільки для ζ_k, ω_k , визначених згідно з (39), мають місце нерівності

$$|\omega_k| = \left| \frac{\kappa \lambda_k}{1 + \tau_r \kappa \lambda_k} \right| \leq \frac{1}{\tau}, \quad |\zeta_k| = 2 \left| \frac{\omega_k}{\tau_r \kappa \lambda_k^{3/2}} \right| \leq \frac{2}{\tau_r \kappa \lambda_k^{3/2}} = \frac{1}{4\pi^3 \tau_r \kappa} \quad (k \in N),$$

то для $t \geq 0$ одержуємо з (41) з урахуванням (42)

$$|v_k(t)| \leq \left| \varphi_k^{(2)} \right| + C_2 \left| \varphi_k^{(1)} \right| |1 - S_k(t)| \leq \left| \varphi_k^{(2)} \right| + C_2 \left| \varphi_k^{(1)} \right| \quad (C_2 > 0, k \in N). \quad (43)$$

Таким чином, для $x \in [0, 1], t \geq 0$, з урахуванням (42), (43) очевидно маємо оцінку

$$|u_k(t) X_{2k-1}(x) + v_k(t) X_{2k}(x)| \leq M \left(\left| \varphi_k^{(1)} \right| + \left| \varphi_k^{(2)} \right| \right) \quad (M = \text{const} > 0). \quad (44)$$

Із співвідношення (44) з урахуванням оцінок для $\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}$ безпосередньо випливає, що мажорантним для ряду в (32) є абсолютно збіжний ряд. Отже, ряд у (32) збігається рівномірно для $(x, t) \in \bar{\Omega}_T := [0, 1] \times [0, T]$ ($T > 0$) і маємо $h(x, t) \in C_{x,t}(\bar{\Omega}_T)$. Аналогічно встановлюється рівномірна збіжність, якщо $x \in [0, 1], t \geq \bar{t} \geq 0$, відповідних рядів для функцій $h_{xx}(x, t), {}_0 D_t^{[\mu]} h(x, t), {}_0 D_t^{[\mu]} h_{xx}(x, t)$. Таким чином, функція $h(x, t)$, яка визначається співвідношеннями (32), (40), (41), становить регулярний розв'язок задачі (29)–(31).

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ПРИТІК ДО ГАЛЕРЕЇ (РОЗМІЩЕНОЇ МІЖ ДВОМА КОНТУРАМИ ЖИВЛЕННЯ) НА ОСНОВІ ВИХІДНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ

За припущень вихідної математичної моделі, що базується на системі рівнянь (3), (4), одержимо розв'язок задачі моделювання динаміки процесу фільтрації до галереї, розміщеної між двома контурами живлення (водоймами, які розташовані від неї на однакових віддальх l і на межах яких підтримуються однакові величини тиску). Припускаємо також, що фільтрація відбувається в тришаровому геопористому масиві зі слабопроникним прошарком і пласт розроблюється прямолінійною батареєю свердловин, які приймаються за прямолінійну галерею. Остання має дебіт Q на одиницю своєї довжини, а на вільну поверхню масиву діє інфільтраційне живлення інтенсивності $\varepsilon = \varepsilon(x)$. Тоді за припущень вихідної математичної моделі розглядувана фільтраційна задача (робота галереї між двома контурами живлення) зводиться до розв'язання в області $(0, l) \times (0, \infty)$ такої крайової задачі:

$${}_0 D_t^{[\mu]} h_1(x, t) = \kappa_1 \frac{\partial^2 h_1(x, t)}{\partial x^2} - \tau_1 (h_1 - h_2) + \varepsilon(x), \quad (45)$$

$${}_0 D_t^{[\mu]} h_2(x, t) = \kappa_2 \frac{\partial^2 h_2(x, t)}{\partial x^2} + \tau_2 (h_1 - h_2), \quad (46)$$

$$\frac{\partial h_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial h_2(0,t)}{\partial x} = Q, \quad h_1(l,t) = h_2(l,t) = H \quad (t \geq 0), \quad (47)$$

$$h_1(x,0) = h_2(x,0) = h_0(x) \quad (0 \leq x \leq l), \quad (48)$$

де H — величина напору на контурах живлення, $h_0(x)$ — задана початкова напірна функція.

Виконуючи перехід до відповідної крайової задачі з однорідними граничними умовами за допомогою підстановки

$$u_i(x,t) = h_i(x,t) - H + (l-x)Q \quad (i=1,2), \quad (49)$$

одержуємо задачу

$${}_0D_t^{[\mu]} u_1(x,t) = \kappa_1 \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \tau_1(u_1 - u_2) + \varepsilon(x), \quad (50)$$

$${}_0D_t^{[\mu]} u_2(x,t) = \kappa_2 \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} + \tau_2(u_1 - u_2), \quad (51)$$

$$\frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = 0, \quad u_1(l,t) = u_2(l,t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (52)$$

$$u_1(x,0) = u_2(x,0) = u_0(x) \equiv h_0 - H + (l-x)Q \quad (0 \leq x \leq l). \quad (53)$$

Застосовуючи до (50)–(53) скінченне косинус–перетворення Фур'є за змінною x вигляду [22]

$$\bar{u}_{i_n} = \int_0^l u_i(x,t) \cos(\lambda_n x) dx \quad (i=1,2, \lambda_n = (2n-1)\pi / (2l), n \in N),$$

одержуємо таку задачу Коші:

$${}_0D_t^{[\mu]} \bar{u}_{1_n}(t) = -(\tau_1 + \kappa_1 \lambda_n^2) \bar{u}_{1_n}(t) + \tau_1 \bar{u}_{2_n}(t) + q_n \quad (n \in N), \quad (54)$$

$${}_0D_t^{[\mu]} \bar{u}_{2_n}(t) = -(\tau_2 + \kappa_2 \lambda_n^2) \bar{u}_{2_n}(t) + \tau_2 \bar{u}_{1_n}(t) \quad (n \in N), \quad (55)$$

$$\bar{u}_{1_n}(0) = \bar{u}_{2_n}(0) = \eta_n \quad (n \in N), \quad (56)$$

де

$$\eta_n = \int_0^l u_0(x) \cos(\lambda_n x) dx, \quad q_n = \int_0^l \varepsilon(x) \cos(\lambda_n x) dx \quad (n \in N).$$

Домножуючи рівняння (55) на деякий дійсний множник $\theta \neq 0$ та додаючи одержаний результат до рівняння (54), маємо

$${}_0D_t^{[\mu]} [\bar{u}_{1_n}(t) + \theta \bar{u}_{2_n}(t)] \bar{u}_{1_n}(t) = [\tau_2 \theta - (\tau_1 + \kappa_1 \lambda_n^2)] \times \\ \times \left[\bar{u}_{1_n}(t) + \frac{\tau_1 - \theta(\tau_2 + \kappa_2 \lambda_n^2)}{\tau_2 \theta - (\tau_1 + \kappa_1 \lambda_n^2)} \bar{u}_{2_n}(t) \right] + q_n \quad (n \in N). \quad (57)$$

Покладаючи в останньому співвідношенні

$$\frac{\tau_1 - \theta(\tau_2 + \kappa_2 \lambda_n^2)}{\tau_2 \theta - (\tau_1 + \kappa_1 \lambda_n^2)} = \theta,$$

одержуємо для обчислення величини θ квадратне рівняння

$$\tau_2 \theta^2 + [\tau_2 - \tau_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \lambda_n^2] \theta - \tau_1 = 0 \quad (\tau_2 \neq 0).$$

Звідси маємо

$$\theta_n^{(1,2)} = \frac{1}{2\tau_2} [\tau_1 - \tau_2 + (\kappa_1 - \kappa_2) \lambda_n^2 \pm \sqrt{\Delta_n}], \quad (58)$$

$$\Delta_n = [\tau_2 - \tau_1 + (\kappa_2 - \kappa_1) \lambda_n^2]^2 + 4\tau_1 \tau_2 > 0.$$

Позначивши

$$\psi_n^{(1,2)}(t) = \bar{u}_{1_n}(t) + \theta_n^{(1,2)} \bar{u}_{2_n}(t) \quad (n \in N), \quad (59)$$

запишемо (57) у вигляді

$${}_0 D_t^{[\mu]} \psi_n^{(1,2)}(t) + \rho_n^{(1,2)} \psi_n^{(1,2)}(t) = q_n \quad (n \in N), \quad (60)$$

де $\rho_n^{(1,2)} = \tau_1 + \kappa_1 \lambda_n^2 - \tau_2 \theta_n^{(1,2)}$ ($\rho_n^{(1,2)} > 0 \forall n \in N$). Далі зі співвідношень (59) з урахуванням умов (56) знаходимо початкові умови для $\psi_n^{(1,2)}(t)$ у вигляді

$$\psi_n^{(1,2)}(0) = \eta_n (1 + \theta_n^{(1,2)}) \equiv \zeta_n^{(1,2)} \quad (n \in N). \quad (61)$$

Розв'язки задач (60), (61) на основі [23, 29] запишемо у вигляді

$$\psi_n^{(1,2)}(t) = \left(\zeta_n^{(1,2)} - \frac{q_n}{\rho_n^{(1,2)}} \right) S_n^{(1,2)}(t) + \frac{q_n}{\rho_n^{(1,2)}} \quad (n \in N), \quad (62)$$

де

$$S_n^{(1,2)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{r} G_n^{(1,2)}(r) dr, \quad G_n^{(1,2)}(r) = \frac{\rho_n^{(1,2)} B(r)}{[A(r) + \rho_n^{(1,2)}]^2 + B^2(r)} \quad (n \in N)$$

і $A(r), B(r)$ визначаються співвідношеннями (19). Враховуючи (59) та (62), маємо

$$\bar{u}_{1_n}(t) = \frac{\theta_n^{(2)} \psi_n^{(1)}(t) - \theta_n^{(1)} \psi_n^{(2)}(t)}{\theta_n^{(2)} - \theta_n^{(1)}}, \quad \bar{u}_{2_n}(t) = \frac{\psi_n^{(1)}(t) - \psi_n^{(2)}(t)}{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}} \quad (n \in N). \quad (63)$$

Знаходячі оригінали за зображеннями косинус-перетворення Фур'є за змінною x , з урахуванням (49) одержуємо розв'язок розглядуваної задачі у вигляді

$$h_i(x, t) = u_i(x, t) + H - (l - x) Q \quad (i = 1, 2), \quad (64)$$

$$u_1(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty \frac{\theta_n^{(1)} \psi_n^{(2)}(t) - \theta_n^{(2)} \psi_n^{(1)}(t)}{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}} \cos(\lambda_n x), \quad (65)$$

$$u_2(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^\infty \frac{\psi_n^{(1)}(t) - \psi_n^{(2)}(t)}{\theta_n^{(1)} - \theta_n^{(2)}} \cos(\lambda_n x), \quad (66)$$

де $\theta_n^{(1)}, \theta_n^{(2)}, \psi_n^{(1,2)}(t)$ визначаються співвідношеннями (58), (62).

Одержаний розв'язок (64)–(66) розглядуваної задачі перетворюється, зокрема, якщо $\mu(\beta) = \delta(\beta - \alpha)$ ($\delta(x)$ — δ -функція Дірака [24]), у розв'язок задачі вигляду (45)–(48) з операторами дробової похідної Капуто–Герасимова порядку α ($0 < \alpha < 1$). Розв'язок зазначеної задачі будуватиметься аналогічно викладеному раніше та зводиться до розв'язання задач Коші вигляду

$${}^C_0 D_t^\alpha \psi_n^{(1,2)}(t) + \rho_n^{(1,2)} \psi_n^{(1,2)}(t) = q_n \quad (0 < \alpha \leq 1, n \in N), \quad (67)$$

$$\psi_n^{(1,2)}(0) = \xi_n^{(1,2)} \quad (n \in N), \quad (68)$$

де величини $\xi_n^{(1,2)}$ обчислюються згідно з співвідношенням (61).

Розв'язки задач (67), (68) записуються у вигляді

$$\psi_n^{(1,2)}(t) = \left(\xi_n^{(1,2)} - \frac{q_n}{\rho_n^{(1,2)}} \right) E_\alpha(-\rho_n^{(1,2)} t^\alpha) + \frac{q_n}{\rho_n^{(1,2)}} \quad (n \in N),$$

де $E_\alpha(\cdot)$ — однопараметрична функція Міттаг-Леффлера [25].

Подальші викладки у розв'язанні цієї задачі повністю повторюють викладене раніше.

На рис.1 наведено графіки розрахункових кривих напірної функції у верхньому ($h = h_1(x, t)$) шарі тришарового геопористого масиву для різних моментів часу у разі дискретного значення порядку дробової похідної $\alpha = 0.9$. Ці графіки відповідають таким значенням часової змінної (доба): $t = 10$ (крива 1), $t = 25$ (крива 2), $t = 50$ (крива 3), та вхідним параметрам: $l = 50$ м, $H = h_0 = 10$ м, $k_1 = 5$ м/доба, $k_2 = 10$ м/доба, $m_1 = m_2 = 5$ м, $m_0 = 4$ м, $k_0 = 0.01$ м/доба, $\varepsilon = 0.02$ м/доба, $Q = 0.2$, $\beta_1^* = 0.1$, $\beta_2^* = 0.002$.

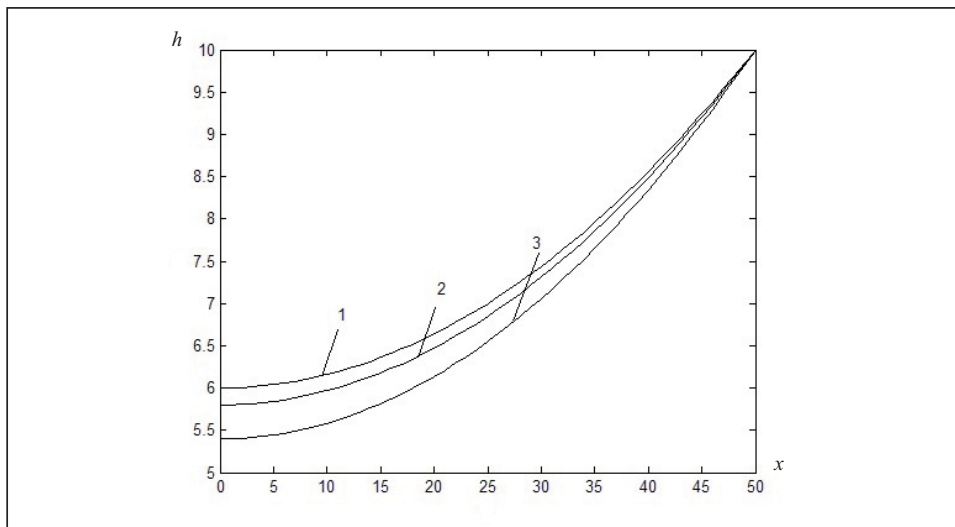


Рис. 1

Результати розрахунків дають змогу, зокрема, дійти висновку, що динаміка напірних кривих у разі опису фільтраційного процесу на основі неklasичної дробово-диференційної моделі в певному сенсі (якісно) узгоджується з результатами моделювання вказаної динаміки в рамках класичної математичної моделі [4].

ВИСНОВОК

У роботі наведено постановки та одержано замкнені розв'язки деяких крайових задач аномальної геофільтраційної динаміки в шаруватих пластах за припущень, що фільтраційні процеси в них адекватно описуються на основі моделей дробової дифузії розподіленого порядку. Для вихідної математичної

фільтраційної моделі з похідними розподіленого порядку одержано замкнений розв'язок задачі про притік до галереї, розміщеної між двома контурами живлення в тришаровому геопористому середовищі, а для спрощеного варіанту цієї моделі одержано розв'язки прямої та оберненої крайових задач фільтраційної динаміки і задачі з нелокальними граничними умовами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика. Москва: Недра, 1993. 416 с.
2. Пряжинская В.Г., Ярошевский Д.М., Левит-Гуревич Л.К. Компьютерное моделирование в управлении водными ресурсами. Москва: Физматгиз, 2002. 496 с.
3. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. Москва: Наука, 1969. 414 с.
4. Олейник А.Я. Геогидродинамика дренажа. Киев: Наукова думка, 1981. 283 с.
5. Allwright A., Atangana, A. Fractal advection-dispersion equation for groundwater transport in fractured aquifers with self-similarities. *The European Physical Journal Plus*. 2018. Vol. 133 (2). P. 1–14.
6. Su N. Mass-time and space-time fractional partial differential equations of water movement in soils: Theoretical framework and application to infiltration. *Journal of Hydrology*. 2014. Vol. 519. P. 1792–1803.
7. Su N., Nelson P.N., Connor S. The distributor-order fractional-wave equation of groundwater flow: theory and application to pumping and slug test. *Journal of Hydrology*. 2015. Vol. 529. P. 1263–1273.
8. Shumer R., Benson D.A., Meershaert M.M., Baeumer B. Fractal mobile immobile solute transport. *Water Resour. Res.* 2003. Vol. 39, N 10. P. 1296–1309.
9. Bogaenko V.A., Bulavatsky V.M., Kryvonos Yu.G. On mathematical modeling of fractional-differential dynamics of flushing process for saline soils with parallel algorithms usage. *Journ. Autom. and Informat. Sci.* 2014. Vol. 48, N 1. P. 1–12.
10. Bogaenko V., Bulavatsky V. Fractional-fractal modeling of filtration-consolidation processes in saline saturated soils. *Fractal and fractional*. 2020. Vol. 4, Iss. 4. P. 2–12. <https://doi.org/10.3390/fractalfract4040059>.
11. Bulavatsky V.M. Mathematical modeling of fractional differential filtration dynamics based on models with Hilfer-Prabhakar derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 2. P. 204–216.
12. Bulavatsky V.M., Bohaienko V.O. Some boundary-value problems of fractional-differential mobil/immobile migration dynamics in a profile filtration flow. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 3. P. 410–425.
13. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG. 2019. 344 p.
14. Ding W., Patnaik S., Sidhardh S., Semperlotti F. Applications of distributed-order fractional operators: a review. *Entropy*. 2021. Vol. 23, Iss. 1. <https://doi.org/10.3390/e23010110>.
15. Chechkin A.V., Gorenflo R., Sokolov I.M., Gonchar V.Y. Distributed order time fractional diffusion equation. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 2003. N 6. P. 259–257.
16. Naber M. Distributed order fractional sub-diffusion. *Fractals*. 2004. N 12. P. 23–32.
17. Mainardi F., Pagnini G. The role of the Fox–Wright functions in fractional sub-diffusion of distributed order. *Journ. Comput. Appl. Math.* 2007. Vol. 207. P. 245–257.

18. Kochubei A.N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion. *Journ. Math. Anal. Appl.* 2008. Vol. 340. P. 252–281.
19. Bazhlekova E., Bazhlekov I. Application of Dimovski's conolutional calculus to distributed-order time-fractional diffusion equation on a bounded domain. *Journal Inequalities and Special Functions.* 2017. Vol. 8, Iss. 1. P. 68–83.
20. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
21. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. Москва: Недра, 1984. 211 с.
22. Sneddon I. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1973. 539 p.
23. Rundell W., Zhang Z. Fractional diffusion: recovering the distributed fractional derivative from overposed data. *Inverse problems.* 2017. Vol. 33, N 3. P. 1–24.
24. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1967. 436 с.
25. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer Verlag. 2014. 454 p.
26. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием. *Дифференциальные уравнения.* 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
27. Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двуточечными краевыми условиями. *Дифференциальные уравнения.* 1979. Т. 15, № 7. С. 1284–1295.
28. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи. *Дифференциальные уравнения.* 1999. Т. 35, № 8. С. 1094–1100.
29. Cheng X., Yuan C., Liang K. Inverse source problem for a distributed-order time fractional diffusion equation. *J. Inverse ill-Posed Probl.* 2020. Vol. 28(1). P. 17–32.

V.M. Bulavatsky

**SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF FILTRATION DYNAMICS
CORRESPONDING TO FRACTIONAL DIFFUSION MODELS OF DISTRIBUTED ORDER**

Abstract. On the basis of distributed-order fractional diffusion models, statements are made and closed solutions are obtained for some boundary-value problems of anomalous geofiltration dynamics, in particular, the problem of inflow to a gallery located between two supply lines in a three-layer geoporos medium. For a simplified version of the filtration model of distributed order, solutions are obtained for the direct and inverse boundary-value problems of filtration dynamics, as well as for the filtration problem with nonlocal boundary conditions.

Keywords: mathematical modeling, fractional-differential dynamics of filtration processes, geoporos media, non-classical models, model of filtration with distributed order derivative, boundary-value problem, closed-form solution.

Надійшла до редакції 05.04.2021