

О.М. ЛИТВИНУкраїнська інженерно-педагогічна академія, Харків, Україна,
e-mail: *academ_mail@ukr.net*.**О.Г. ЛИТВИН**Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна,
e-mail: *litvinog@ukr.net*.**АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО
ЕКСПЕРИМЕНТУ ВІДНОВЛЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ
ДВОХ ЗМІННИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЄКЦІЙ. II¹**

Анотація. Ця стаття є продовженням серії публікацій під однойменною назвою. У ній виконано подальше вдосконалення методу відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій для підвищення точності наближення без явища Гіббса. Запропоновано будувати розривний сплайн у такий спосіб, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була диференційовною функцією. Цю функцію відновлюють за допомогою скінченних сум Фур'є, коефіцієнти Фур'є в яких знаходять за допомогою проєкцій. Запропоновано метод обчислення цих коефіцієнтів. Виконано обчислювальний експеримент за припущення, що наближувана функція має розриви першого роду на заданій системі вкладених один в одний кругів або еліпсів. Аналіз результатів обчислень підтвердив їхню відповідність теоретичним твердженням роботи. Запропонований метод надає змогу отримувати задану точність наближення за меншої кількості проєкцій, тобто за меншого опромінювання.

Ключові слова: комп'ютерна томографія, розривна функція, розривний сплайн, клас диференційовності, явище Гіббса, сума Фур'є.

ВСТУП

У першій частині цього циклу статей [1] наведено аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса. Його виконано за припущення, що лінії розриву наближуваної функції є відомими. Також запропоновано такий спосіб побудови розривного сплайна, що різниця між наближуваною функцією і цим сплайном є неперервною функцією. Наближення цієї неперервної функції здійснено за допомогою скінченних сум Фур'є з використанням проєкцій [2–4].

У цій статті запропоновано узагальнити метод побудови розривного сплайна у такий спосіб, щоб різниця між наближуваною функцією і цим сплайном була диференційовною функцією. Це надає змогу наближувати розривну функцію з більш високою точністю без явища Гіббса для заданої кількості проєкцій. Тут описано метод побудови такого сплайна та метод знаходження проєкцій для вказаної диференційовної функції.

ЗАГАЛЬНА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Будемо виходити з припущення, що область, в якій задано розривну функцію $f(x, y)$, належить квадрату $D = [0, 1]^2$ і відомі лінії розриву першого роду $\Gamma_k: w_k(x, y) = 0$ функції $f(x, y)$, які є границями областей D_k , $k = 1, M + 1$. Тут

$$D_1 = \{(x, y): w_1(x, y) \geq 0\}, \quad D_k = \{(x, y): w_{k-1}(x, y) \leq 0 \wedge w_k(x, y) \geq 0\}, \quad k = 2, M + 1.$$

Розглянемо випадок, коли лініями розриву є кола з центром у точці $(0.5; 0.5)$ з радіусами R_k , $k = 1, M$, $R_1 < R_2 < \dots < R_M$.

¹ Початок див. у № 5, 2021.

Тоді функції $w_k(x, y)$ мають вигляд

$$w_k(x, y) = R_k - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$w_{M+1}(x, y) = x(1-x)y(1-y).$$

Рівняння $w_{M+1}(x, y) = 0$, $(x, y) \in \overline{D}$, є рівнянням границі Γ_{M+1} квадрата D .

Вважаємо, що тестова розривна функція $f(x, y)$ задана відомими виразами в кожній області, на які розбивається квадрат:

$$f(x, y) = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1}.$$

Вважаємо також, що функції $f_k(x, y)$, $k = \overline{1, M+1}$, є диференційовними в областях задання, включаючи їхні границі.

Зауваження 1. У тому разі, коли границі Γ_k областей D_k є еліпсами з центром у точці $(0.5; 0.5)$, з півосями a_k , b_k , функції $w_k(u, v)$ мають вигляд

$$w_k(u, v) = R_k - \sqrt{\frac{(u-0.5)^2}{a^2} + \frac{(v-0.5)^2}{b^2}}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$a \geq b, \quad R_k a = a_k, \quad R_k b = b_k, \quad k = \overline{1, M}.$$

Шляхом заміни змінних

$$\frac{u-0.5}{a} = x-0.5, \quad \frac{v-0.5}{b} = y-0.5; \quad u = (x-0.5)a + 0.5, \quad v = (y-0.5)b + 0.5$$

цю задачу можна звести до аналогічної задачі для системи концентричних кіл, а саме:

$$w_k(x, y) = R_k - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}, \quad k = \overline{1, M},$$

$$x = \frac{u-0.5}{a} + 0.5, \quad y = \frac{v-0.5}{b} + 0.5.$$

Зауважимо, що у випадку еліпсів розривна функція теж задається як функція змінних u, v у вигляді $ff(u, v)$, яка в разі заміни змінних $u = (x-0.5)a + 0.5$, $v = (y-0.5)b + 0.5$ перетворюється у функцію

$$ff((x-0.5)a + 0.5, (y-0.5)b + 0.5) = f(x, y).$$

Розв'язавши отриману задачу у змінних x, y для системи концентричних кіл за допомогою формул $x = \frac{u-0.5}{a} + 0.5$, $y = \frac{v-0.5}{b} + 0.5$, перейдемо до представлення результатів з використанням змінних u, v .

ПОБУДОВА РОЗРИВНОГО СПЛАЙНА

У роботі [5] введено поняття розривного інтерполяційного та інтерлінаційного сплайнів для функції двох змінних у випадку, коли лінії розриву є відрізками прямих — сторонами прямокутників або трикутників, на які розбивається область задання наближуваної функції.

Означення 1. Розривним інтерлінаційним сплайном лагранжевого типу для заданої системи кривих Γ_k будемо називати кусково-аналітичну функцію

$$Sp(x, y) = \phi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1},$$

з такими інтерлінаційними властивостями:

- 1) має такі самі лінії розриву, як і функція $f(x, y)$;
- 2) має такі самі односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву, як і функція $f(x, y)$.

Розривні інтерлінаційні сплайни лагранжевого типу використано в роботі [1].

Означення 2. Розривним інтерлінаційним сплайном ермітового типу для заданої системи кривих Γ_k будемо називати кусково-аналітичну функцію

$$Sp(x, y) = \phi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1},$$

з такими інтерлінаційними властивостями:

- 1) має такі самі лінії розриву, що й функція $f(x, y)$;
- 2) має такі самі односторонні границі (а отже, і стрибки) на лініях розриву, що й функція $f(x, y)$;
- 3) похідна сплайна за нормаллю до ліній розриву має такі самі односторонні границі (стрибки), як і похідна за нормаллю до ліній розриву від наближуваної функції. Інакше кажучи,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_1 \\ (x,y) \in D_1}} \frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial n_1^s} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_1 \\ (x,y) \in D_1}} \frac{\partial^s f_1(x, y)}{\partial n_1^s},$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_1 \\ (x,y) \in w_1(x,y) \leq 0 \wedge w_2(x,y) > 0}} \frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial n_1^s} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_1 \\ (x,y) \in w_1(x,y) \leq 0 \wedge w_2(x,y) > 0}} \frac{\partial^s f_2(x, y)}{\partial n_1^s},$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_2 \\ (x,y) \in w_1(x,y) < 0 \wedge w_2(x,y) \geq 0}} \frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial n_1^s} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_2 \\ (x,y) \in w_1(x,y) < 0 \wedge w_2(x,y) \geq 0}} \frac{\partial^s f_2(x, y)}{\partial n_1^s},$$

.....

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_M \\ (x,y) \in w_{M-1}(x,y) < 0 \wedge w_M(x,y) \geq 0}} \frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial n_1^s} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_M \\ (x,y) \in w_{M-1}(x,y) < 0 \wedge w_M(x,y) \geq 0}} \frac{\partial^s f_M(x, y)}{\partial n_1^s},$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_M \\ (x,y) \in D_{M+1}}} \frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial n_1^s} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow \Gamma_M \\ (x,y) \in D_{M+1}}} \frac{\partial^s f_{M+1}(x, y)}{\partial n_1^s},$$

$$\frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial x^s} = \frac{\partial^s f_{M+1}(x, y)}{\partial x^s}, \quad x=0, \quad x=1,$$

$$\frac{\partial^s Sp(x, y)}{\partial y^s} = \frac{\partial^s f_{M+1}(x, y)}{\partial y^s}, \quad y=0, \quad y=1, \quad s = \overline{0, 1}.$$

Тут $n_1 = \left(\frac{x-0.5}{-R_1}, \frac{y-0.5}{-R_1} \right)$ — нормаль у точці (x, y) до кола $\Gamma_1: w_1(x, y) = 0$.

Уведемо позначення $Dg(x, y)$ для похідної за нормаллю n_1 до функції $g(x, y)$:

$$Dg(x, y) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \frac{x-0.5}{R_1} + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y) \frac{y-0.5}{R_1} \right).$$

Побудуємо розривний сплайн $Sp(x, y)$ ермітового типу у такому вигляді:

$$Sp(x, y) = \phi_k(x, y), \quad (x, y) \in \overline{D}_k, \quad k = \overline{1, M+1},$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) = & (f_{1,0,1}(x, y) - Df_{1,0,1}(x, y)w_1(x, y))H_{1,0}\left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1}\right) + \\ & + f_{1,1,1}(x, y)H_{1,1}\left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1}\right)(-R_1), \end{aligned}$$

$$\phi_k(x, y) = \phi_{k1}(x, y) + \phi_{k2}(x, y),$$

$$\begin{aligned} \phi_{k1}(x, y) = & \left(f_{k,0,k-1}(x, y) - Df_{k,0,k-1}(x, y)w_{k-1}(x, y) \frac{R_1}{R_{k-1}} \right) H_{0,0}\left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) + \\ & + f_{k,1,k-1}(x, y)H_{0,1}\left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{k2}(x, y) = & \left(f_{k,0,k}(x, y) - Df_{k,0,k}(x, y)w_k(x, y) \frac{R_1}{R_k} \right) H_{1,0}\left(\frac{w_k}{R_{k-1} - R_k} + 1 \right) + \\ & + f_{k,1,k}(x, y)H_{1,1}\left(\frac{w_k}{R_{k-1} - R_k} + 1 \right) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_k}, \quad k = \overline{2, M}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{M+1}(x, y) = & \left(f_{M+1,0,M}(x, y) - Df_{M+1,0,M}(x, y)w_M(x, y) \frac{R_1}{R_M} + \right. \\ & \left. + f_{M+1,1,M}(x, y)w_M(x, y) \frac{R_1}{R_M} \right) h_{M+1,1}(x, y) + Of_{M+1}(x, y)h_{M+1,2}(x, y), \end{aligned}$$

$$h_{M+1,1}(x, y) = \frac{(w_{M+1}(x, y))^2}{(w_{M+1}(x, y))^2 + (w_M(x, y))^2},$$

$$h_{M+1,2}(x, y) = \frac{(w_M(x, y))^2}{(w_{M+1}(x, y))^2 + (w_M(x, y))^2}.$$

Зауважимо, що у побудові сплайна використано такі функції:

1) задані функції $w_k(x, y)$, $k = \overline{1, M+1}$;

$$2) Df_k(x, y) = - \left(\frac{\partial}{\partial x} f_k(x, y) \frac{x-0.5}{R_1} + \frac{\partial}{\partial y} f_k(x, y) \frac{y-0.5}{R_1} \right),$$

$$f_{k,s}(x, y) = D^s f_k(x, y), \quad s = \overline{0, 1}, \quad k = \overline{1, M+1},$$

$$f_{k,s,p}(x, y) = f_{k,s} \left(x + w_p(x, y) \frac{x-0.5}{R_p}, y + w_p(x, y) \frac{y-0.5}{R_p} \right), \quad s = \overline{0, 1}, \quad p = k-1, k.$$

Якщо $f_{k,s}(x, y) \Big|_{\Gamma_p} = f_{k,s,p} = \text{const}$, то $f_{k,s,p}(x, y) \equiv f_{k,s,p} = \text{const}$;

$$3) H_{0,0}(t) = (t-1)^2(1+2t), H_{0,1}(t) = t(t-1)^2, H_{1,0}(t) = t^2(3-2t), H_{1,1}(t) = (t-1)t^2$$

— базисні поліноми третього степеня двоточкової ермітової інтерполяції функцій однієї змінної та її першої похідної в точках $t=0, t=1$, з властивостями:

$$H_{k,s}^{(p)}(q) = \delta_{k,q} \delta_{p,s}, \quad k, s, p, q \in \{0, 1\}, \quad H_{k,s}^{(p)}(t) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} H_{k,s}(t);$$

$$\begin{aligned}
4) \quad O_1 f_{M+1}(x, y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 H_{i,p}(x) \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_{M+1}(i, y), \\
O_2 f_{M+1}(x, y) &= \sum_{j=0}^1 \sum_{q=0}^1 H_{j,q}(y) \frac{\partial^q}{\partial y^q} f_{M+1}(x, j), \\
O_1 O_2 f_{M+1}(x, y) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{p=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{q=0}^1 H_{i,p}(x) H_{j,q}(y) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f_{M+1}(i, j), \\
O f_{M+1}(x, y) &= O_1 f_{M+1}(x, y) + O_2 f_{M+1}(x, y) - O_1 O_2 f_{M+1}(x, y).
\end{aligned}$$

Остання формула є формулою поліноміальної інтерпліації функції $f_{M+1}(x, y)$ на чотирьох сторонах квадрата D [6, гл. 3, приклади]. Іншими словами,

$$\begin{aligned}
O f_{M+1}(x, y) \Big|_{\Gamma_{M+1}} &= f_{M+1}(x, y) \Big|_{\Gamma_{M+1}}, \\
\frac{\partial^p}{\partial x^p} O f_{M+1}(x, y) &= \frac{\partial^p}{\partial x^p} f_{M+1}(x, y), \quad x=0, \quad x=1; \quad p=\overline{0,1}, \\
\frac{\partial^s}{\partial y^s} O f_{M+1}(x, y) &= \frac{\partial^s}{\partial y^s} f_{M+1}(x, y), \quad y=0, \quad y=1; \quad s=\overline{0,1}.
\end{aligned}$$

Наведемо деякі додаткові твердження.

Твердження А. Виконується рівність $Dw_k(x, y) \Big|_{\Gamma_k} = \frac{R_k}{R_1}$, $k=\overline{1, M}$.

Дійсно,

$$\begin{aligned}
Dw_k(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} (R_k - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}) \frac{x-0.5}{R_1} - \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial y} (R_k - \sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}) \frac{y-0.5}{R_1} = \\
&= \frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} R_1}; \quad Dw_k(x, y) \Big|_{\Gamma_k} = \frac{R_k^2}{R_k R_1} = \frac{R_k}{R_1},
\end{aligned}$$

бо $\sqrt{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2} \Big|_{\Gamma_k} = R_k$, $k=\overline{1, M}$.

Зокрема, $Dw_k(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 1$, $k=\overline{1, M}$.

Твердження Б. Виходячи з позначення для $Dg(x, y)$, можна довести справедливність таких співвідношень:

$$\begin{aligned}
DH_{1,0} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) \Big|_{w_1(x, y)=0} &= DH_{1,1} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) \Big|_{w_1(x, y)=0} = -\frac{1}{R_1}, \\
DH_{0,0} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) \Big|_{w_{k-1}(x, y)=0} &= 0, \\
DH_{0,1} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) \Big|_{w_{k-1}(x, y)=0} &= \frac{1}{R_{k-1} - R_k} \frac{R_1}{R_{k-1}},
\end{aligned}$$

$$DH_{1,0} \left(\frac{w_k}{R_{k-1} - R_k} + 1 \right) \Big|_{w_k(x,y)=0} = DH_{1,1} \left(\frac{w_k}{R_{k-1} - R_k} + 1 \right) \Big|_{w_k(x,y)=0} = \\ = \frac{1}{R_{k-1} - R_k} \frac{R_1}{R_k}, \quad k = \overline{2, M}.$$

ФОРМУЛЮВАННЯ ТА ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМ ПРО ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ $\varphi(x, y)$

Уведемо до розгляду функцію

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - Sp(x, y).$$

Подамо функцію $\varphi(x, y)$ у вигляді

$$\varphi(x, y) = \varphi_k(x, y), \quad \varphi_k(x, y) = f_k(x, y) - \phi_k(x, y), \quad (x, y) \in D_k, \quad k = \overline{1, M+1}.$$

Теорема 1. Функція $\varphi(x, y)$ має такі властивості:

$$D^s \varphi(x, y) \Big|_{\Gamma_k} = 0, \quad k = \overline{1, M+1}, \quad s = \overline{0, 1}.$$

Доведення. Виконаємо безпосередню послідовну перевірку твердження теорему для таких випадків:

- 1) $k = 1, s = \overline{0, 1}$;
- 2) $k = \overline{2, M}, s = \overline{0, 1}$;
- 3) $k = M + 1, s = \overline{0, 1}$.

Розглянемо перший випадок. Покладемо $k = 1, s = 0$.

Доведемо, що $\varphi_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} &= (f_1(x, y) - \phi_1(x, y)) \Big|_{\Gamma_1} = \\ &= \left(f_1(x, y) - (f_{1,0,1}(x, y) - Df_{1,0,1}(x, y) w_1(x, y)) H_{1,0} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - f_{1,1,1}(x, y) H_{1,1} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) (-R_1) \right) \Big|_{\Gamma_1} = \\ &= f_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} - (f_{1,0,1}(x, y) \Big|_{\Gamma_1} - Df_{1,0,1}(x, y) \cdot 0) H_{1,0}(1) - f_{1,1,1}(x, y) H_{1,1}(1) \cdot (-R_1) = \\ &= f_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} - f_{1,0,1}(x, y) \Big|_{\Gamma_1} \cdot 1 - f_{1,1,1}(x, y) \cdot 0 \cdot (-R_1) = f_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} - f_{1,0,1}(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 0. \end{aligned}$$

Тепер покладемо $k = 1, s = 1$.

Доведемо, що $D\varphi_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 0$:

$$\begin{aligned} D\varphi_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} &= D(f_1(x, y) - \phi_1(x, y)) \Big|_{\Gamma_1} = \\ &= D \left(f_1(x, y) - (f_{1,0,1}(x, y) - Df_{1,0,1}(x, y) w_1(x, y)) H_{1,0} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) (-R_1) - \right. \\ &\quad \left. - f_{1,1,1}(x, y) H_{1,1} \left(1 - \frac{w_1(x, y)}{R_1} \right) (-R_1) \right) \Big|_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Далі, враховуючи додаткові твердження А та Б, отримаємо:

$$D\varphi_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = Df_1(x, y) \Big|_{\Gamma_1} - f_{1,1,1}(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = 0.$$

Розглянемо другий випадок. Покладемо $k = \overline{2, M}, s = 0$. Тоді

$$\varphi_k(x, y) = f_k(x, y) - \phi_k(x, y); \quad \phi_k(x, y) = \phi_{k1}(x, y) + \phi_{k2}(x, y),$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{k1}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = (f_k(x, y) - \phi_{k1}(x, y))|_{\Gamma_{k-1}} = \\
& = \left(f_k(x, y) - \left(f_{k,0,k-1}(x, y) - Df_{k,0,k-1}(x, y)w_{k-1}(x, y) \frac{R_1}{R_{k-1}} \right) H_{0,0} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) - \right. \\
& \quad \left. - f_{k,1,k-1}(x, y) H_{0,1} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}} \right) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = \\
& = f_k(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} - (f_k(x, y))|_{\Gamma_{k-1}} - Df_{k,0,k-1}(x, y) \cdot 0 \cdot H_{0,0}(0) - \\
& \quad - f_{k,1,k-1}(x, y) H_{0,1}(0) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}} = \\
& = f_k(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} - (f_k(x, y))|_{\Gamma_{k-1}} - Df_{k,0,k-1}(x, y) \cdot 0 \cdot 1 - \\
& \quad - f_{k,1,k-1}(x, y) \cdot 0 \cdot (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}} = f_k(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} - f_k(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = 0.
\end{aligned}$$

Врахуємо, що $H_{0,p}(1) = 0$, $p = \overline{0,1} \Rightarrow \varphi_{k1}(x, y)|_{\Gamma_k} = 0$, $H_{1,p}(0) = 0$, $p = \overline{0,1} \Rightarrow \Rightarrow \varphi_{k2}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = 0$.

Доведення того, що $\varphi_{k2}(x, y)|_{\Gamma_k} = (f_k(x, y) - \phi_{k2}(x, y))|_{\Gamma_k} = 0$, є аналогічним доведенню для $\varphi_{k1}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = (f_k(x, y) - \phi_{k1}(x, y))|_{\Gamma_{k-1}} = 0$ з урахуванням того, що $w_k(x, y)|_{\Gamma_k} = 0$.

Отже,

$$\begin{aligned}
\varphi_k(x, y)|_{w_{k-1}(x,y)=0} &= (\varphi_{k1}(x, y) + \varphi_{k2}(x, y))|_{w_{k-1}(x,y)=0} = 0, \\
\varphi_k(x, y)|_{w_k(x,y)=0} &= (\varphi_{k1}(x, y) + \varphi_{k2}(x, y))|_{w_k(x,y)=0} = 0.
\end{aligned}$$

Покладемо $k = \overline{2, M}$, $s = 1$. Тоді

$$D\varphi_k(x, y) = D(f_k(x, y) - \phi_k(x, y)), \quad D\phi_k(x, y) = D(\phi_{k1}(x, y) + \phi_{k2}(x, y)),$$

$$\begin{aligned}
& D\varphi_{k1}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = D(f_k(x, y) - \phi_{k1}(x, y))|_{\Gamma_{k-1}} = \\
& \left(Df_k(x, y) - \left(Df_{k,0,k-1}(x, y) - D(Df_{k,0,k-1}(x, y))w_{k-1}(x, y) \frac{R_1}{R_{k-1}} - \right. \right. \\
& \quad \left. - D(f_{k,0,k-1}(x, y)) Dw_{k-1}(x, y) \frac{R_1}{R_{k-1}} \right) H_{0,0} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) - \\
& \quad - (f_{k,0,k-1}(x, y) - D(f_{k,0,k-1}(x, y))w_{k-1}(x, y)) DH_{0,0} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) - \\
& \quad - Df_{k,1,k-1}(x, y) H_{0,1} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}} - \\
& \quad \left. - f_{k,1,k-1}(x, y) DH_{0,1} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1} - R_k} \right) (R_{k-1} - R_k) \frac{R_1}{R_{k-1}} \right) \Big|_{\Gamma_{k-1}}.
\end{aligned}$$

Далі отримаємо $D\varphi_{k1}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = Df_k(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} - f_{k,1,k-1}(x, y)|_{\Gamma_{k-1}} = 0$.

Беручи до уваги, що $DH_{0,p} \left(\frac{w_k(x,y)}{R_{k-1}-R_k} + 1 \right) \Big|_{\Gamma_k} = 0$, $p = \overline{0,1}$, отримаємо $D\varphi_{k1}(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = 0$.

Враховуючи, що $DH_{1,p} \left(\frac{w_{k-1}}{R_{k-1}-R_k} \right) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = 0$, $p = \overline{0,1}$, отримаємо $D\varphi_{k2}(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = 0$.

Доведення того, що $D\varphi_{k2}(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = D(f_k(x,y) - \phi_{k2}(x,y)) \Big|_{\Gamma_k} = 0$, є аналогічним доведенню для $D\varphi_{k1}(x,y) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = D(f_k(x,y) - \phi_{k1}(x,y)) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = 0$ з урахуванням того, що $w_k(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = 0$.

Далі отримаємо

$$D\varphi_k(x,y) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = D(\varphi_{k1}(x,y) + \varphi_{k2}(x,y)) \Big|_{\Gamma_{k-1}} = 0,$$

$$D\varphi_k(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = D(\varphi_{k1}(x,y) + \varphi_{k2}(x,y)) \Big|_{\Gamma_k} = 0.$$

Розглянемо третій випадок: $k = M + 1$, $s = \overline{0,1}$. Тоді

$$\varphi_{M+1}(x,y) = f_{M+1}(x,y) - \phi_{M+1}(x,y).$$

Візьмемо до уваги вигляд $\phi_{M+1}(x,y)$ і те, що $h_{M+1,1}(x,y) + h_{M+1,2}(x,y) = 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \varphi_{M+1}(x,y) &= f_{M+1}(x,y) \cdot 1 - \phi_{M+1}(x,y) = f_{M+1}(x,y)(h_{M+1,1}(x,y) + h_{M+1,2}(x,y)) - \\ &\quad - \left(\left(f_{M+1,0,M}(x,y) - Df_{M+1,0,M}(x,y)w_M(x,y) \frac{R_1}{R_M} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_{M+1,1,M}(x,y)w_M(x,y) \frac{R_1}{R_M} \right) h_{M+1,1}(x,y) + Of_{M+1}(x,y)h_{M+1,2}(x,y) \right). \end{aligned}$$

У результаті перетворень отримаємо

$$\varphi_{M+1}(x,y) = \varphi_{M+1,1}(x,y) + \varphi_{M+1,2}(x,y),$$

$$\begin{aligned} \varphi_{M+1,1}(x,y) &= \left(f_{M+1}(x,y) - \left(f_{M+1,0,M}(x,y) - Df_{M+1,0,M}(x,y)w_M(x,y) \frac{R_1}{R_M} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + f_{M+1,1,M}(x,y)w_M(x,y) \frac{R_1}{R_M} \right) \right) h_{M+1,1}(x,y), \end{aligned}$$

$$\varphi_{M+1,2}(x,y) = (f_{M+1}(x,y) - Of_{M+1}(x,y))h_{M+1,2}(x,y).$$

Безпосередньою перевіркою можна показати, що

$$D^s h_{M+1,1}(x,y) \Big|_{w_{M+1}(x,y)=0, (x,y) \in \overline{D}} = 0, \quad s = \overline{0,1},$$

$$h_{M+1,1}(x,y) \Big|_{w_M(x,y)=0} = 1, \quad Dh_{M+1,1}(x,y) \Big|_{w_M(x,y)=0} = 0,$$

$$D^s h_{M+1,2}(x,y) \Big|_{w_M(x,y)=0} = 0, \quad s = \overline{0,1},$$

$$h_{M+1,2}(x,y) \Big|_{w_{M+1}(x,y)=0, (x,y) \in \overline{D}} = 1, \quad Dh_{M+1,2}(x,y) \Big|_{w_{M+1}(x,y)=0, (x,y) \in \overline{D}} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& \left(f_{M+1,0,M}(x,y) - Df_{M+1,0,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} + \right. \\
& \left. + f_{M+1,1,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} \right) \Big|_{\Gamma_M} = f_{M+1,0,M}(x,y) \Big|_{\Gamma_M} = f_{M+1}(x,y) \Big|_{\Gamma_M}, \\
& D \left(f_{M+1,0,M}(x,y) - Df_{M+1,0,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} + \right. \\
& \left. + f_{M+1,1,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} \right) \Big|_{\Gamma_M} = f_{M+1,1,M}(x,y) \Big|_{\Gamma_M} = Df_{M+1}(x,y) \Big|_{\Gamma_M}, \\
D^s \varphi_{M+1,1}(x,y) &= D^s \left(f_{M+1}(x,y) - \left(f_{M+1,0,M}(x,y) - Df_{M+1,0,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} + \right. \right. \\
& \left. \left. + f_{M+1,1,M}(x,y)w_M(x,y)\frac{R_1}{R_M} \right) \right) h_{M+1,1}(x,y), \\
D^s \varphi_{M+1,1}(x,y) \Big|_{\Gamma_M} &= 0, \quad s = \overline{0,1}, \\
D^s \varphi_{M+1,1}(x,y) \Big|_{\Gamma_{M+1}} &= 0, \quad s = \overline{0,1}.
\end{aligned}$$

Беручи до уваги те, що $D^s(f_{M+1}(x,y) - Of_{M+1}(x,y)) \Big|_{\Gamma_{M+1}} = 0, s = \overline{0,1}$, отримаємо

$$\begin{aligned}
D^s \varphi_{M+1,2}(x,y) \Big|_{\Gamma_{M+1}} &= D^s((f_{M+1}(x,y) - Of_{M+1}(x,y))h_{M+1,2}(x,y)) \Big|_{\Gamma_{M+1}} = 0, \quad s = \overline{0,1}, \\
D^s \varphi_{M+1,2}(x,y) \Big|_{\Gamma_M} &= D^s((f_{M+1}(x,y) - Of_{M+1}(x,y))h_{M+1,2}(x,y)) \Big|_{\Gamma_M} = 0, \quad s = \overline{0,1}.
\end{aligned}$$

З урахуванням наведеного доведення для вказаних значень k, s маємо

$$D^s \varphi(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = 0, \quad k = \overline{1, M+1}, \quad s = \overline{0,1}.$$

Інакше кажучи, $\varphi(x,y) \in C^1(\overline{D})$, $f_k(x,y) \in C^r(\overline{D}_k)$, $r \geq 2$.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Якщо $f_k(x,y) \in C^r(\overline{D}_k)$, $r \geq 2$, і виконуються умови теореми 1 відносно функції $\varphi(x,y)$: $D^s \varphi(x,y) \Big|_{\Gamma_k} = 0, k = \overline{1, M+1}, s = \overline{0,1}$, то функція може бути періодично продовжена на всю площину Oxy зі збереженням класу $C^1(R^2)$.

Доведення випливає з того, що $\varphi^{(s,0)}(0,y) = 0, \varphi^{(s,0)}(1,y) = 0, \varphi^{(0,p)}(x,0) = 0, \varphi^{(0,p)}(x,1) = 0, s = \overline{0,1}, p = \overline{0,1}$.

Іншими словами, функція $\varphi(x,y) \in C^1(R^2)$, якщо її періодично продовжити з періодом одиниця за змінними x та y на всю площину Oxy . Це означає, що для цієї функції можна використати всі відомі твердження щодо наближення їх скінченними сумами Фур'є. Отже, функція $\varphi(x,y)$ має властивості, які нададуть змогу застосувати метод скінченних сум Фур'є з використанням проєкцій для її наближення без явища Гіббса.

Теоретичні положення методу обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій наведено в роботі [4], згідно з якою наближення для функції $\varphi(x, y)$ відшукують у вигляді скінченної суми Фур'є порядку N : $\varphi(x, y) \approx \varphi_N(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N \varphi_{k,l} e^{i2\pi(kx+ly)}$.

Коефіцієнти Фур'є обчислюють за формулою $\varphi_{k,l} = \iint_D \varphi(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$.

Зауважимо, що за умовою задачі відомі лише проєкції функції $f(x, y)$ вздовж відомих прямих. Тому для знаходження проєкцій функції $\varphi(x, y)$ віднімаємо від проєкцій функції $f(x, y)$ проєкції функції $Sp(x, y)$, які не надходять з комп'ютерного томографа. Але ці проєкції обчислюють, бо сплайн конструюють у вигляді формул, наведених вище.

Скористаємося для аналізу наближення функції $f(x, y)$ сумою наближення функції $\varphi(x, y)$ сумами Фур'є та побудованого вище сплайна, тобто

$$f(x, y) \approx \tilde{f}(x, y) = \varphi_N(x, y) + Sp(x, y).$$

ПРИКЛАДИ

У чисельному експерименті розглянуто приклади для однієї лінії розриву ($M=1$) та двох ($M=2$). Лініями розриву є кола. Функцію $f(x, y)$ подано у вигляді $f(x, y) \approx \tilde{f}(x, y) = \varphi_N(x, y) + Sp(x, y)$.

Порядок диференційовності r функції $\varphi(x, y)$ дорівнює одиниці ($r=1$).

Для порівняння результатів наведено випадок $r=0$, що відповідає неперервності цієї функції (табл. 1, 2). Результати його дослідження описано у першій частині цієї роботи.

Для порівняння також наведено наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$ методом скінченних сум Фур'є: $f(x, y) \approx f^*(x, y) = f_N(x, y)$.

Проєкційні дані для функції $f(x, y)$ вважаються відомими.

До того ж представлено (див. табл. 1 і табл. 2) кількісні характеристики похибки наближення функції $f(x, y)$, яку було подано у вигляді $\tilde{f}(x, y) = \varphi_N(x, y) + Sp(x, y)$ та у вигляді $f^*(x, y) = f_N(x, y)$, де N — порядок суми Фур'є. У наведених розрахунках для всіх випадків покладено $N=32$. Результати, наведені для функції $\tilde{f}(x, y)$ для $r=0$, $r=1$, відповідають відсутності явища Гіббса, а для функції $f^*(x, y)$ — наявності явища Гіббса.

Наведено також графічну ілюстрацію отриманих результатів, а саме, зображення заданої функції $f(x, y)$ та її наближення $\tilde{f}(x, y)$, а також зображення функції $f^*(x, y)$ (див. рис. 1 і рис. 2). В останньому випадку при зображенні функції $f^*(x, y)$ спостерігається осциляція, що відповідає наявності явища Гіббса.

Приклад 1. Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$ для $M=1$, $r=1$. Лінія розриву — коло радіуса R_1 з центром у точці $(0.5; 0.5)$;

$$f_1(x, y) = k_1 e^{-((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2)}, \quad f_2(x, y) = k_2 \sin((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2),$$

де k_1, k_2 — задані числа.

Задання функцій $w_1(x, y)$, $f(x, y)$, $Sp(x, y)$ відповідає наведеній теорії для $M=1$.

Таблиця 1. Результати наближення функції $f(x, y)$ для прикладу 1

Вигляд наближення функції $f(x, y)$	Порядок диференційовності функції $\varphi(x, y)$	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 0$	0.00104	0.000531
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 1$	0.000425	0.000635
$f^*(x, y)$, з явищем Гіббса	—	0.479	0.443

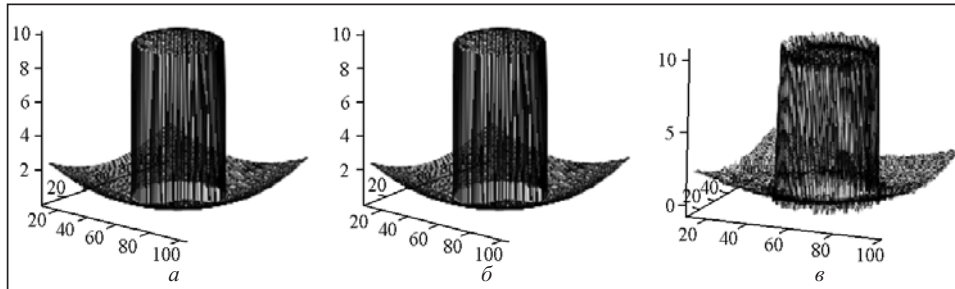


Рис. 1. Зображення (для прикладу 1) заданої функції $f(x, y)$ (а), її наближення $\tilde{f}(x, y)$ без явища Гіббса (б), її наближення $f^*(x, y)$ з явищем Гіббса (в) відповідно

Приклад 2. Наближене відновлення розривної функції $f(x, y)$ для $M = 2$, $r = 1$. Лінії розриву — кола радіусів R_1 та R_2 з центром у точці $(0.5; 0.5)$;

$$f_1(x, y) = k_1 e^{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}, \quad f_2(x, y) = k_2 \cos((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2),$$

$$f_3(x, y) = k_3 \sin(-(x-0.5)^2 - (y-0.5)^2),$$

де k_1, k_2, k_3 — задані числа.

Задання функцій $w_1(x, y)$, $w_2(x, y)$, $f(x, y)$, $Sp(x, y)$ відповідає теоретичним твердженням для $M = 2$.

Таблиця 2. Результати наближення функції $f(x, y)$ для прикладу 2

Вигляд наближення функції $f(x, y)$	Порядок диференційовності функції $\varphi(x, y)$	Відносна похибка	Середньоквадратична похибка
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 0$	0.001078	0.000649
$\tilde{f}(x, y)$, без явища Гіббса	$r = 1$	0.0003511	0.000601
$f^*(x, y)$, з явищем Гіббса	—	0.283	0.464

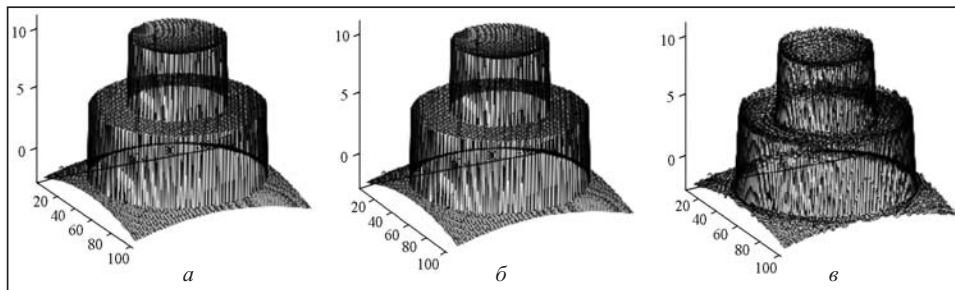


Рис. 2. Зображення (для прикладу 2) заданої функції $f(x, y)$ (а), її наближення $\tilde{f}(x, y)$ без явища Гіббса (б), її наближення $f^*(x, y)$ з явищем Гіббса (в) відповідно

Порівняння похибок, наведених у табл. 1 та табл. 2, а також зображень, наведених на рис. 1 та рис. 2, свідчить про переваги запропонованого методу для наближеного відновлення розривних функцій.

ВИСНОВКИ

1. У запропонованому методі теоретично обґрунтовано та підтверджено обчислювальним експериментом можливість наближення розривних функцій двох змінних з використанням проєкцій та скінченних сум Фур'є без явища Гіббса.

2. У цьому методі розривний сплайн $S_p(x, y)$ побудовано так, щоб різниця між ним і наближуваною розривною функцією $f(x, y)$ була неперервно диференційовною функцією. Це надає змогу підвищити точність наближення.

3. У вигляді відповідних теорем сформульовано і доведено теоретичні твердження для випадку, коли лінії розриву наближуваної функції є системами концентричних кіл. Також описано метод для випадку, коли лініями розриву є система вкладених еліпсів шляхом зведення до попереднього випадку.

4. У наступній частині (III) аналізу результатів обчислювального експерименту буде розглянуто побудову обчислювальної схеми методу, яка забезпечує диференційовність функції $\varphi(x, y)$ на системі вкладених один в одній квадратів, рівняння границь яких описується недиференційовними в кутових точках функціями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М., Литвин О.Г. Аналіз результатів обчислювального експерименту відновлення розривних функцій двох змінних за допомогою проєкцій. I. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 5. С. 98–107.
2. Lytvyn O.M., Lytvyn O.G., Lytvyn O.O., Mezhyuev V.I. The method of reconstructing discontinuous functions using projections data and finite Fourier sums. *Proc. IX Intern. Sci. and Pract. Conf. "Information Control Systems & Technologies" (ICST-2020)* (24–26 September 2020, Odessa, Ukraine). Odessa, 2020. P. 661–673.
3. Литвин О.М., Литвин О.Г. Про один підхід до наближення розривних функцій з використанням проєкцій і скінченних сум Фур'є. *Обчислювані методи і системи перетворення інформації: зб. пр. В наук.-техн. конф.* (Львів, 4–5 жовтня 2018 р). Львів: ФМІ НАНУ, 2018. С. 8–11.
4. Литвин О.М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгеновської комп'ютерної томографії. *Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Сер. Системний аналіз, управління і інформаційні технології*. Вип. 125. Харків: ХДПУ, 2000. С. 27–35.
5. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Першина Ю.І. Теорія розривних сплайнів та її застосування в комп'ютерній томографії. Київ: Наук. думка, 2017. 320 с.
6. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування, Харків: Основа, 2002. 544 с.

O.M. Lytvyn, O.G. Lytvyn

ANALYSIS OF THE RESULTS OF A COMPUTING EXPERIMENT TO RESTORE THE DISCONTINUOUS FUNCTIONS OF TWO VARIABLES USING PROJECTIONS. II

Abstract. This article continues a series of publication under the same name. It performs further improvement of the method for recovering discontinuous functions of two variables using projections in order to improve the accuracy of approximation without the Gibbs phenomenon. To this end, it is proposed to construct a discontinuous spline so that the difference between the function being approximated and this spline is a differentiable function. This function is restored using finite Fourier sums whose Fourier coefficients are found using projections. A method for calculating these coefficients is proposed. In the computing experiment, it was assumed that the approximated function has discontinuities of the first kind on a given system of circles or ellipses nested into each other. Analysis of the calculation results confirmed the theoretical statement of the study. The method makes it possible to obtain a prescribed approximation accuracy with a smaller number of projections, i.e., with less irradiation.

Keywords: computed tomography, discontinuous function, discontinuous spline, differentiability class, Gibbs phenomenon, Fourier sum.

Надійшла до редакції 22.06.2021