УДК 355.41

О.І. ХАЗАНОВИЧ
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *alexhaz55@gmail.com*.

О.М. МОВЧАН
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *alex-717@ukr.net*.

В.П. ХАРЧЕНКО
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ, Україна,
e-mail: *vasaxar@ukr.net*.

ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ДОСЯГНЕННЯ МЕТИ ФУНКЦІОНУВАННЯ ПРОСТОРОВО-РОЗПОДІЛЕНОЮ СИСТЕМОЮ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОКАЗНИКА ЇЇ ДІЇ

Анотація. Уведено поняття дії системи, визначено її показник та отримано рівності, що надають змогу визначити та розрахувати ймовірність досягнення мети функціонування просторово-розподіленою системою з використанням показника дії цієї системи. Із застосуванням одержаних математичних співвідношень досліджено систему матеріального забезпечення. Визначено її дію та розраховано ймовірність досягнення мети функціонування цією системою.

Ключові слова: дія системи, імовірність досягнення мети системою, просторово-розподілена система.

ВСТУП

У сучасному світі багато задач розв’язують, використовуючи поняття «просторово-розподілені системи». Під просторово-розподіленою системою [1] будемо розуміти систему, що має у своєму складі підсистеми (елементи), розташовані у різних ділянках (точках) простору, які впливають на об’єкти, що розміщені в інших ділянках (точках) простору. Зупинимося лише на системах, що здійснюють пересування матеріальних засобів. Для просторово-розподіленої системи можна розглянути задачу визначення ймовірності досягнення мети її функціонування (або виконання завдання) із застосуванням показників, що характеризують процес функціонування системи, тобто без проведення експерименту або використання даних результатів спостереження її реального функціонування, що здебільшого неможливо. Саме розв’язанню зазначеної задачі й присвячено статтю.

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКА ДІЇ ТА ЙМОВІРНОСТІ ДОСЯГНЕННЯ МЕТИ ПРОСТОРОВО-РОЗПОДІЛЕНОЮ СИСТЕМОЮ

Наведемо низку понять та термінів стосовно просторово-розподіленої системи, що дадуть можливість її детального опису.

Дія системи — за змістом може означати: варіант функціонування системи, спрямований на досягнення нею заданої мети; бажаний результат функціонування системи; показник, який характеризує ймовірний результат функціонування (можливості) системи. Уведення поняття дії системи дає змогу здійснити оцінювання можливостей або мети функціонування системи.

Мета функціонування системи — досягнення бажаного кінцевого результату внаслідок реалізації дії системою. Мета може визначатися через установлену (допустиму) величину дії системи.

Потенціал системи — відображає максимальні можливості системи стосовно досягнення мети її функціонування і є детермінованою величиною.

Потенціал дії системи — визначає здатність системи реалізовувати певну усереднену дію, спрямовану на досягнення мети її функціонування з урахуванням імовірнісного характеру процесу.

Між наведеними характеристиками існує залежність, яку наочно показують такі співвідношення:

$$\Phi = a\Pi_{\text{с}}, \tag{1}$$

$$\Pi_{\text{д}} = aP^0\Pi_{\text{с}} = M[\widetilde{\Phi}] = P^0\Phi,$$

де Φ — показник дії системи, що відповідає можливостям системи, які реалізуються, певна частка потенціалу системи; $\Pi_{\text{с}}$ — потенціал системи, який характеризує її максимальні можливості; a — коефіцієнт використання потенціалу системи, який дорівнює 0...1, а за розмірністю є питомою величиною дії системи (одиниця виміру дії системи на одиницю виміру потенціалу системи); $\Pi_{\text{д}}$ — потенціал дії системи; $\widetilde{\Phi}$ — дія системи, що відбулася, яка є випадковою величиною; P^0 — імовірність досягнення мети системою (ймовірність реалізації дії системою або виконання завдання системою); $M[\widetilde{\Phi}]$ — математичне сподівання дії системи.

Розмірності цих величин визначаються тим, яку конкретну систему (підсистему), відповідно до фізичної сутності її функціонування, розглядають. Проведена формалізація процесу функціонування просторово-розподіленої системи надає змогу надалі перейти до її параметричного аналізу. При цьому для будь-якої підсистеми забезпечення може бути визначений певний домінантний показник ефективності її функціонування. Можна довести, що таким показником є дія системи.

Позначимо: $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_s)$ — дія системи, що залежить від параметрів x_s; $\Phi_0(x_1, x_2, \dots, x_s)$ — дія системи, що залежить від параметрів x_s та є мінімальною; $x_1, x_2, \dots, x_s$ — параметри, де s — номер параметра.

Отже, ймовірність досягнення мети функціонування просторово-розподіленою системою визначимо за формулою:

$$P^0(x_1, x_2, \dots, x_s) = \frac{\Phi_0(x_1, x_2, \dots, x_s)}{\Phi(x_1, x_2, \dots, x_s)}. \tag{2}$$

Імовірність (2) умовно назвемо «параметричною ймовірністю», а саме ймовірністю, яка визначається через показники (параметри) системи. Далі покажемо, що «параметричну ймовірність» стосовно конкретної просторово-розподіленої системи можна визначити через імовірність, що відповідає «частотному» підходу [2], або через «геометричну ймовірність» [3]. Це доводить коректність використання формули (2) для визначення ймовірності досягнення мети функціонування просторово-розподіленою системою.

Процес зміни районів розташування засобів забезпечення (постачальника) опишемо із застосуванням напівмарковського процесу (НМП), який дає змогу відобразити порядок зміни районів розташування засобів забезпечення (постачальника) та час їхнього знаходження там. Але більший інтерес становить процес, супутній (супровідний) зазначеному вище, а саме — процес виконання завдання постачальником, який теж є НМП. Ці два процеси пов'язані між собою, тобто можна говорити про певний їхній «тандем». Граф станів для процесу виконання завдання постачальником наведено на рис. 1, де позначено: D, L — відстані: від опорної лінії $(0, L)$ у глибину $(0, D)$; вздовж цієї лінії до району розташування постачальника (з відповідними індексами: нижніми 0 — для початкової точки, звідки процес стартує; ij, lk — для довільних точок, які процес досягає на відповідному кроці; верхніми 0 — для точок, які досягаються на першому кроці; (ij), (lk) — для напрямків розвитку процесу, які виходять із зазначених точок, що досягнуті на першому кроці; $0(ij)$, $0(lk)$ — для точок, які досягаються на другому кроці під час виходу процесу з точок (ij), (lk), що досягнуті на першому кроці; $i=0, \ldots, n$; $j=0, \ldots, m$; $l=0, \ldots, n$; $k=0, \ldots, m$; P_0 — імовірність виконання завдання постачальником у початковій точці, звідки процес стартує; P'_{ij}, P'_{lk} — перехідні ймовірності процесу від початкової точки до точок ij, lk, які досягаються на першому кроці; P_{ij}^{0}, P_{lk}^{0} — імовірності виконання завдання постачальником під час розгортання його сил та засобів у точках ij, lk, які досягаються на першому кроці; $P_{ij}^{(ij)}$, $P_{lk}^{(ij)}$ — перехідні ймовірності процесу від точки ij, яка досягається на першому кроці, до точок ij, lk, які досягаються на другому кроці; $P_{ij}^{(lk)}$, $P_{lk}^{(lk)}$ — перехідні ймовірності процесу від точки lk, яка досягається на першому кроці, до точок ij, lk, які досягаються на другому кроці; $P_{ij}^{0(ij)}$, $P_{lk}^{0(ij)}$ — імовірності виконання завдання постачальником під час розгортання його сил та засобів у точках ij, lk, які досягаються на другому кроці, у момент виходу процесу з точки ij, що досягнута на першому кроці; $P_{ij}^{0(lk)}$, $P_{lk}^{0(lk)}$ — імовірності виконання завдання постачальником під час розгортання його сил та засобів у точках ij, lk, які досягаються на другому кроці, у момент виходу процесу з точки lk, що досягнута на першому кроці.

Зазначимо, що на рис. 1 показано пересування постачальника у напрямку початку координат, але можливе його пересування й у протилежному напрямку. Запишемо математичні вирази, що характеризують залежності між імовірностями відповідно до рис. 1, на прикладі одного напрямку:

$$P_{ij}^{0}=P'_{ij}P_0;\; P_{lk}^{0(ij)}=P_{lk}^{(ij)}P_{ij}^{0}. \tag{3}$$

Використовуючи запропоновані показники «дія системи» та «потенціал дії системи», отримуємо вирази для розрахунку P'_{ij}, P_{ij}^{0}.

Для визначення ймовірності виконання завдання просторово-розподіленою системою може бути застосований метод потенціалу дії складної (великої) системи.

Схематично цей метод представлено на рис. 2. Обчислення результатів функціонування просторово-розподіленої системи здійснюються залежно від координат розташування на місцевості засобів забезпечення (постачальника). Показниками ефективності функціонування цієї системи є відповідні ймовірності виконання визначеного для неї завдання.

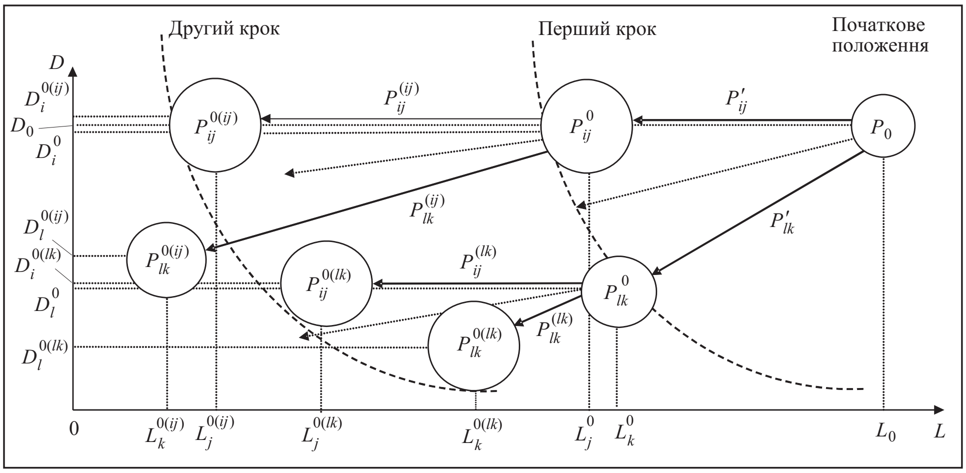

Рис. 1. Граф станів НМП зміни положення районів розташування засобів забезпечення (постачальника) та результатів виконання завдання (перший та другий кроки процесу)

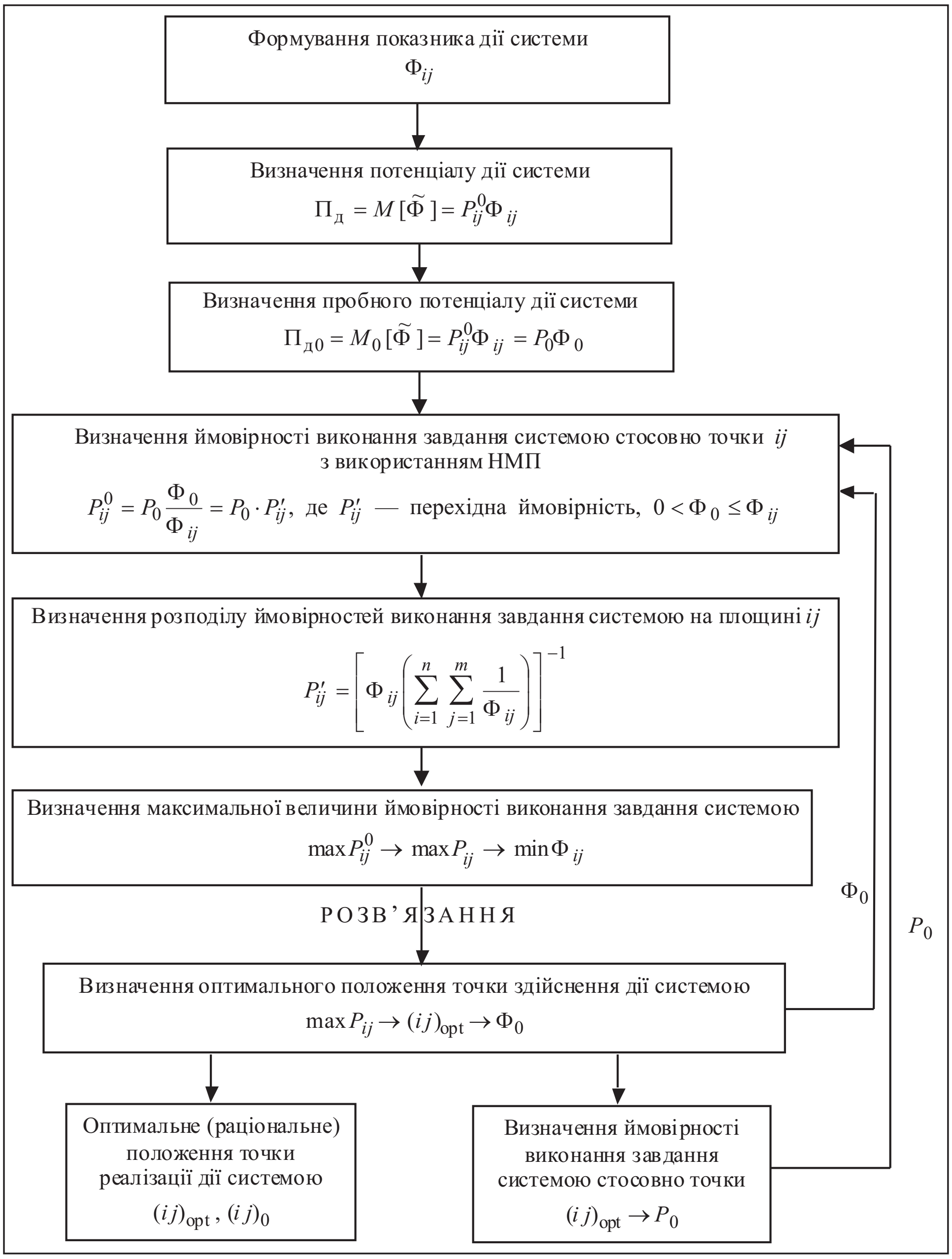

Рис. 2. Схема методу потенціалу дії складної (великої) системи для визначення $(ij)_{opt}$, $(ij)_0$, P_0, P_{ij}^0

Оскільки розглядувана система діє на поверхні, доцільно прив'язати її дію до певної точки саме на поверхні (площині). Нагадаємо, що положення точки на площині позначається прямокутними координатами i та j, де $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$. Показник «дія системи» характеризує дію просторово-розподіленої системи в заданих умовах у точці ij. Позначимо його найбільше детерміноване значення у точці ij як Φ_{ij}, а випадкове — $\widetilde{\Phi}_{ij}$. Середнє значення цього показника або математичне сподівання дії системи запишеться як рівність, яку назвемо моделювальною:

$$M[\widetilde{\Phi}_{ij}] = P_{ij}^{0}\Phi_{ij}. \tag{4}$$

Середнє значення $M[\widetilde{\Phi}_{ij}]$ визначає потенційні можливості просторово-розподіленої системи здійснювати певну дію («потенціал дії системи»), що відповідає фізичній сутності її функціонування. Наведену далі теорему доведено в [1].

Теорема 1. Процес виконання завдання просторово-розподіленою системою на певній площині ij має еквіпотенціальну поверхню стосовно потенціалу дії системи, що описується рівністю

$$\Pi_{\text{д}} = P_{ij}^0 \Phi_{ij} = \text{const},$$

де Φ_{ij} — дія системи, що відповідає її можливостям, які використовуються, певна частка потенціалу системи стосовно точки ij; P_{ij}^0 — імовірність виконання завдання засобами забезпечення (постачальником) під час їхнього розгортання у точці ij, яка досягається на першому кроці процесу; $\Pi_{\text{д}}$ — потенціал дії системи (засобів) матеріального забезпечення, який є постійним для будь-якої точки на площині ij; він має також назву «пробного потенціалу дії системи», тобто потенціал, відповідно до якого оцінюється дія системи.

Отже, якщо позначити пробний (заданий постійним) потенціал дії системи на певному рівні як $\Pi_{\text{д}}$, то можна записати рівняння для довільної точки ij та визначеної точки 0, що характеризується максимальним значенням імовірності виконання завдання системою P_0 та мінімальним значенням узагальненого показника дії Φ_0:

$$\Pi_{\text{д}} = P_{ij}^0 \cdot \Phi_{ij} = P_0 \cdot \Phi_0, \tag{5}$$

при цьому

$$P_{ij}^0 \le P_0, \; 0 < \Phi_0 \le \Phi_{ij},$$

звідси

$$P_{ij}^0 = P_0 \frac{\Phi_0}{\Phi_{ij}}. \tag{6}$$

Ця залежність відображує сутність запропонованого методу потенціалу дії складної (великої) системи, який надає можливість визначити максимальне значення P_{ij}^0 (стосовно координат i, j точки здійснення дії системою) з усієї множини значень, що задаються виразом (6).

Виведемо залежність для визначення ймовірності виконання завдання системою стосовно дії цієї системи на всій площині ij, а саме, P_{ij}. Використовуючи (6), у матричному вигляді можна записати:

$$\| P^0 \| = \begin{Vmatrix} P_{00}^0 & \dots & P_{0j}^0 & \dots & P_{0m}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i0}^0 & \dots & P_{ij}^0 & \dots & P_{im}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n0}^0 & \dots & P_{nj}^0 & \dots & P_{nm}^0 \end{Vmatrix} = P_0 \begin{Vmatrix} \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{00}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{0j}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{0m}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{i0}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{ij}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{im}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{n0}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{nj}} & \dots & \dfrac{\Phi_0}{\Phi_{nm}} \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

при цьому ймовірність виконання завдання системою $0 \le P_{ij}^0 \le 1$ відповідає повній групі несумісних подій у разі дії системи стосовно довільної точки на площині ij.

Для того щоб мати повну групу несумісних подій на всій площині ij, потрібно здійснити нормування елементів матриці (7). Значення P_{ij}^0 після нормування відповідає повній групі несумісних подій на площині D, L і дорівнює перехідній імовірності P'_{ij} (див. (3)). Звідси маємо

$$\| P' \| = \begin{Vmatrix} P'_{00} & \dots & P'_{0j} & \dots & P'_{0m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P'_{i0} & \dots & P'_{ij} & \dots & P'_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P'_{n0} & \dots & P'_{nj} & \dots & P'_{nm} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

при цьому

$$\sum_i \sum_j P'_{ij} = 1, \tag{9}$$

де

$$P'_{ij} = \left[\Phi_{ij} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\Phi_{ij}} \right) \right]^{-1}. \tag{10}$$

Важливою особливістю матриці (8) є те, що її елементи не залежать від P_0 та Φ_0, які скоротили під час нормування, а визначаються лише величиною Φ_{ij}. Враховуючи властивість (9), матрицю (8), на відміну від стохастичної матриці, можна назвати повною стохастичною матрицею. Із проведених перетворень видно, що матриці (7), (8) відрізняються лише на величину постійних коефіцієнтів при їхніх елементах. Очевидно, що максимуми ймовірностей, які відповідають матрицям (7), (8), мають однакові координати *i*, *j*, тому пошук значень цих координат можна здійснити за будь-якою із зазначених матриць, а саме:

$$\max P_{ij}^0 \to \max P'_{ij}. \tag{11}$$

Цьому максимуму відповідає $\min \Phi_{ij}$.

Таким чином, прийняття гіпотези щодо постійного значення потенціалу дії системи стосовно довільної точки на площині дало змогу записати рівність (4), з використанням якої у кінцевому результаті отримано (10).

Отже, метод потенціалу дії складної (великої) системи надає можливість згідно з (4)–(10) визначити ймовірність виконання завдання системою в довільній точці P_{ij}^0, якщо відомі значення P_0, Φ_0 та Φ_{ij}, а також за максимумом P'_{ij} (11) або мінімумом Φ_{ij} (6) визначити оптимальне (раціональне) положення району розташування засобів, що реалізують дію системи. Стосовно цієї точки досягається максимум імовірності виконання завдання відповідною просторово-розподіленою системою.

ВИВЕДЕННЯ РІВНЯНЬ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПОКАЗНИКА ДІЇ ТА ЙМОВІРНОСТІ ДОСЯГНЕННЯ МЕТИ СИСТЕМОЮ МАТЕРІАЛЬНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Дія системи як показник її можливостей для системи матеріального забезпечення відображає можливості цієї системи (або результат виконання нею завдання) з пересування певної кількості матеріальних засобів на визначену відстань у задану точку простору.

Далі зупинимося на визначенні ймовірності P^0 розв’язання завдання системою матеріального забезпечення, коли її засоби розміщені у довільній точці на площині, зокрема ймовірності P_0 у разі розміщення цих засобів у початковій точці (див. рис. 1).

Конкретизуємо цю задачу на прикладі визначення ймовірності виконання завдання системою матеріального забезпечення (або постачальником), яку позначимо $P_{\text{МЗ}} = P^0$.

Визначимо цю ймовірність з використанням частотного методу [2]. Під час виконання завдання постачальником, коли перевезення матеріальних засобів здійснюється автомобільними колонами (для спрощення — однотипних автомобілів), слід ураховувати ймовірнісний характер цього процесу, а саме: доставлення вантажу колоною може бути здійснене не напевне, а лише з деякою ймовірністю.

Знайдемо вираз для узагальненого показника дії системи забезпечення матеріальними засобами Ф. Наведену далі теорему доведено в [1].

Теорема 2. Узагальнений показник дії системи забезпечення матеріальними засобами («дія системи забезпечення матеріальними засобами») можна записати у вигляді

$$\Phi = Q\ell, \tag{12}$$

де Q — загальна вага матеріальних засобів, що доставляються; ℓ — загальна довжина шляху підвезення матеріальних засобів.

З використанням отриманої залежності (12) покажемо, що у разі підвезення матеріальних засобів величина, яка визначається за рівністю (2), становить саме ймовірність (параметричну ймовірність) виконання завдання системою (засобами) матеріального забезпечення. Можна записати:

$$P_{\text{МЗ}} = \frac{\Phi_0}{\Phi} = \frac{Q^* \ell}{Q\ell} = \frac{\delta \bar{n}}{\delta n} = \frac{\bar{n}}{n}, \tag{13}$$

де Q^* — середнє значення ваги матеріальних засобів (МЗ), що надходять у пункт розташування споживача з імовірністю $P_{\text{МЗ}}$; Q — вага матеріальних засобів, що доставляються постачальником отримувачу на ту саму відстань ℓ (відвантажуються з пункту розташування постачальника); ℓ — загальна довжина шляху підвезення матеріальних засобів; δ — вантажопідіймальність одного транспортного засобу; n — кількість транспортних засобів, що відправляються з вантажем до отримувача (споживача), $n = 1, 2, \ldots, n_{\max}$, $n > 0$; $\bar{n}$ — середня кількість транспортних засобів, що прибувають до отримувача (споживача) з імовірністю $P_{\text{МЗ}}$, $\bar{n} = n \cdot P_{\text{МЗ}}$, $\bar{n} \le n$.

Отже, формула (13) уможливлює визначення ймовірності виконання завдання системою матеріального забезпечення. Це підтверджується тим, що, як показують проведені перетворення, значення ймовірності (2), отримані з використанням параметричного та частотного підходів, збігаються (див. (13)).

Порівняємо підходи до визначення імовірності виконання завдання системою матеріального забезпечення з використанням як параметричної, так і геометричної ймовірностей. Імовірність виконання завдання системою матеріального забезпечення, а саме ймовірність прибуття колони у призначений район, визначається з виразу, що відображає підвезення матеріальних засобів споживачу постачальником, місце розташування якого може бути як у точці 0, так і у довільній точці ij. Ураховуючи (13), можна записати:

$$P_{\text{МЗ}} = P_0 \frac{\Phi_0}{\Phi_{ij}} = P_0 \frac{Q_0 \ell_0}{Q_{ij} \ell_{ij}}, \; 0 < \Phi_0 \le \Phi_{ij}, \tag{14}$$

де Q_0 — загальна вага матеріальних засобів, що доставляються споживачу з району розгортання постачальника, відповідно до якої реалізується максимальна ймовірність підвезення цих засобів P_0; ℓ_0 — довжина шляху підвезення матеріальних засобів, що відвантажуються відповідному споживачу з району розгортання постачальника, відповідно до якого реалізується максимальна ймовірність підвезення цих засобів P_0; очевидно, що P_0 буде реалізована для визначеного Q_0 за певного мінімального значення ℓ_0, а саме, $0 < \ell_0 \le \ell_{ij}$; Q_{ij} — загальна вага матеріальних засобів, що доставляються споживачу від постачальника, який розташований у районі з координатами i, j та відповідно до якого реалізується ймовірність доставлення цих засобів $P_{\text{МЗ}} = P_{ij}^0$; ℓ_{ij} — довжина шляху підвезення матеріальних засобів, що відвантажуються споживачу від постачальника, який розташований у районі з координатами i, j та відповідно до якого реалізується ймовірність підвезення цих засобів $P_{МЗ} = P_{ij}^0$.

Якщо покласти $Q_0 = Q_{ij}$, то з (14) отримаємо

$$P_{МЗ} = P_0 \frac{\ell_0}{\ell_{ij}}, \; 0 < \ell_0 \le \ell_{ij}. \tag{15}$$

Порівнюючи (14) та (15), маємо, що ймовірність $P_{МЗ}$ з використанням формули (14) визначається як параметрична ймовірність, а формули (15) — як геометрична ймовірність, при цьому вони збігаються. Це дає змогу стверджувати, що з використанням формули (14) визначається саме ймовірність виконання завдання (досягнення мети функціонування) системою матеріального забезпечення (або ймовірність підвезення матеріальних засобів).

ВИСНОВКИ

У роботі уведено поняття дії системи, визначено її показник (1) та отримано рівності, що надають змогу визначити та розрахувати ймовірність досягнення мети просторово-розподіленою системою (див. (6)) із застосуванням показника дії цієї системи.

З використанням отриманих математичних співвідношень досліджено систему матеріального забезпечення. Визначено її дію (12) та розраховано ймовірність досягнення мети функціонування системою (14), (15). Також показано доцільність уведення поняття параметричної імовірності (2), яка для системи матеріального забезпечення збігається з імовірністю, визначеною із застосуванням частотного підходу (13), та геометричною ймовірністю (15).

Використання параметричної ймовірності дає змогу визначити ймовірність досягнення мети функціонування просторово-розподіленої системи без проведення експерименту або використання даних, які є результатом спостереження реального функціонування цієї системи, що здебільшого неможливо.

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямі пов’язані з визначенням та розрахунком конкретних значень показників дії та ймовірностей досягнення мети іншими просторово-розподіленими системами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Романченко І.С., Шуєнкін В.О., Хазанович О.І., Марко І.Ю. Теоретичні основи аналізу, моделювання та синтезу системи матеріально-технічного забезпечення як просторово-розподіленої системи. К.: ЦНДІ ЗС України, 2013. 221 с.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. Москва: Наука, 1988. 480 с.
3. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. Москва: Наука, 1972. 192 с.

O.I. Khazanovych, O.M. Movchan, V.P. Kharchenko

DETERMINATION OF THE PROBABILITY OF ACHIEVING THE PURPOSE OF SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEM FUNCTIONING USING ITS ACTION INDICATOR

Abstract. The article introduces the concept of system operation, defines its indicator and obtained equations that allow to determine and calculate the probability of achieving the purpose of a spatially distributed functioning system using the indicator of this system. In the future, using the obtained mathematical relations, it was studied the material support system. Its action is determined and the probability of achieving the goal of functioning of this system is calculated.

Keywords: system operation, probability of achieving the purpose by system, spatially distributed system.

Надійшла до редакції 08.06.2021