УДК 519.217

О.А. ЯРОВА
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *oksanayarova93@gmail.com; oksana.yarova@lnu.edu.ua*.

Я.І. ЄЛЕЙКО
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *yikts@yahoo.com*.

ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ДЛЯ БАГАТОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ВІДНОВЛЕННЯ

Анотація. Розглянуто багатовимірне рівняння відновлення в матричній формі. Знайдено рівняння відновлення для процесу з незалежними приростами та станами марковського процесу. Досліджено функцію відновлення. Доведено граничну теорему для рівняння відновлення.

Ключові слова: рівняння відновлення, функція відновлення, марковський процес, процес з незалежними приростами, слабка збіжність.

Розглянемо рівняння відновлення в матричній формі

$$X^{\varepsilon}(t) = A^{\varepsilon}(t) + \int_0^t F^{\varepsilon}(du) X^{\varepsilon}(t-u),$$

де $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $X^{\varepsilon}(t)$, $A^{\varepsilon}(t)$ — сім'ї невід'ємних матричнозначних функцій; $F^{\varepsilon}(dt)$ — сім'я заданих невід'ємних матричнозначних мір. Основним припущенням щодо цієї функції є слабка збіжність $F^{\varepsilon}(dt)$ до $F(dt)$ для $\varepsilon \to 0$, причому матриця $F(dt)$ є розкладною блочно-діагонального вигляду.

Функцію $F^{\varepsilon}(dt)$ можна представити в такому вигляді:

$$F^{\varepsilon} = F + g_1(\varepsilon)B + g_2(\varepsilon)B^2 + \ldots + g_n(\varepsilon)B^n + o(g_n(\varepsilon)),$$

де $B, \ldots, B^n$ — матриці, $g_1(\varepsilon) \to 0, \ldots, g_n(\varepsilon) \to 0$ для $\varepsilon \to 0$.

Уведемо ще одну функцію

$$L_{ij}^{\varepsilon} = F_{ij}^{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{r} \sum_{n \in E_k \setminus w_k} F_{in}(\varepsilon) \cdot L_{nj}(\varepsilon),$$

де $w_1 \in E_1, \ldots, w_r \in E_r$ — деякі фіксовані індекси, причому $E_1, \ldots, E_r$ — неперетинні множини.

Функція $L^{\varepsilon}(t)$ слабко збігається до функції $L(t)$ для $\varepsilon \to 0$. Крім того, $L_{ij} = L_{ij}(\infty) = 0$, $i \in E_s$, $j \in E_k$, $s \neq k$,

$$L_{ij} = F_{ij} + \sum_{n \in E_s \setminus w_k} F_{in} \cdot L_{nj}.$$

Позначимо функцію

$$\pi_s = \sum_{i,\, j \in E_s} p_i^{(s)} \cdot a_{ij},$$

де p^s — лівий власний вектор матриці F^s.

Нехай $X^{\varepsilon}(t)$ — сім'я марковських процесів з неперервним часом та скінченною кількістю станів $1, 2, .., n$, $X^{\varepsilon}(t) \to X(t)$ для $\varepsilon \to 0$, і $\xi_i^{\varepsilon}(t)$ — процес з незалежними приростами, $t \ge 0$, $\xi_i^\varepsilon(t) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Розглянемо процес

$$\zeta^\varepsilon(t) = \begin{cases} \xi_{i(1)}^\varepsilon(t) & \text{для} \quad t < \tau, \quad X^\varepsilon(0) = i, \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t-\tau) & \text{для} \quad \tau \le t < \tau_1, \quad X^\varepsilon(\tau) = j, \\ \xi_{i(1)}^\varepsilon(\tau) + \xi_{j(2)}^\varepsilon(t-\tau) + \xi_{s(3)}^\varepsilon(t-\tau_1) & \text{для} \quad \tau_1 \le t < \tau_2, \quad X^\varepsilon(\tau_1) = s. \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Для цього процесу багатовимірне рівняння відновлення має вигляд

$$E_i(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(t)}) =$$

$$= E_i(e^{-\lambda\xi_i^\varepsilon(t)}) \cdot P\{\tau < t \mid X^\varepsilon(0) = i\} + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t (E_i(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(u)})) p_{ij}(du) \cdot E_j(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(t-u)})$$

та виконуються умови:

1) $0 \le E_i(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) < \infty$,

2) $E_i(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du)$ — нерозкладна матриця,

3) має місце слабка збіжність $E_i(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon(u)}) p_{ij}^\varepsilon(du) \to E_i(e^{-\lambda\varsigma(u)}) p_{ij}(du)$,

4) $E_i(e^{-\lambda\varsigma(u)}) p_{ij}(du)$ — блочно-розкладна матриця,

5) $E_i(e^{-\lambda\varsigma(u)}) p_{ij}(du)$ — рівномірно інтегровна матриця.

Теорема 1. Нехай виконуються умови 1–5, тоді

$$g(\varepsilon) E_i\left(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) p_{ij}^\varepsilon(dt) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left(\int_0^t e^{yC} dy\right)_{sk} \cdot \frac{p_{ij}^{(k)}}{\pi_k},$$

де $g(\varepsilon) \to 0$ для $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Позначимо

$$H_{ij}^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) = E_i\left(e^{-\lambda\varsigma^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right) p_{ij}^\varepsilon(dt).$$

Достатньо довести, що

$$g(\varepsilon) H^\varepsilon\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \left(\int_0^t e^{yC} dy\right) M^{-1}.$$

Матриця M визначається із співвідношення

$$L^\varepsilon(\infty) = I + g(\varepsilon) MC + o(g(\varepsilon)), \quad \varepsilon \to 0.$$

Розглянемо рівняння

$$dH^\varepsilon(t) = L^\varepsilon(dt) + \int_0^t L^\varepsilon(du) H^\varepsilon(t-u).$$

Покладемо

$$\hat{H}^\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dH^\varepsilon(t), \quad \hat{L}^\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dL^\varepsilon(t), \quad t \ge 0.$$

Скориставшись перетворенням Лапласа, отримаємо

$$\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda)=\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)+\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda).$$

Звідси матимемо

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda)=(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda))\hat{H}^{\varepsilon}(\lambda).$$

Отже,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right)=g(\varepsilon)(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))^{-1}\cdot\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon)).$$

Розглянемо праву частину цієї рівності

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))=\int_0^\infty e^{-\lambda g(\varepsilon)t}L^{\varepsilon}(dt)=$$

$$=L^{\varepsilon}(\infty)-\lambda g(\varepsilon)\int_0^\infty tL^{\varepsilon}(dt)+\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)=$$

$$=I+g(\varepsilon)MC+o(g(\varepsilon))-\lambda g(\varepsilon)(M+o(1))+\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt).$$

Розглянемо отриманий інтеграл $\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)$.

Підінтегральна функція є неспадною та невід'ємною, тому

$$\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)\ge 0.$$

Тоді

$$\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)=\int_0^T (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)+$$

$$+\int_T^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)\le$$

$$\le (e^{-\lambda g(\varepsilon)T}-1+\lambda g(\varepsilon)T)L^{\varepsilon}(\infty)+\lambda g(\varepsilon)\int_T^\infty tL^{\varepsilon}(dt).$$

Отже,

$$0\le\frac{1}{g(\varepsilon)}\int_0^\infty (e^{-\lambda g(\varepsilon)t}-1+\lambda g(\varepsilon)t)L^{\varepsilon}(dt)\le$$

$$\le\left(\lambda T-\frac{1-e^{-\lambda g(\varepsilon)T}}{g(\varepsilon)}\right)L^{\varepsilon}(\infty)+\lambda\int_T^\infty tL^{\varepsilon}(dt).$$

Тоді отримаємо вираз

$$\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))=I-g(\varepsilon)[M(\lambda I-C)+o(1)],$$

де $o(1)\to 0$ для $\varepsilon\to 0$.

Розглянемо співвідношення

$$g(\varepsilon)(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))^{-1}=[M(\lambda I-C)+o(1)]^{-1}.$$

Тоді
$$g(\varepsilon)(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))^{-1}\cdot\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon)=[M(\lambda I-C)+o(1)]^{-1}-g(\varepsilon)\,.$$

Перейдемо до границі у співвідношені
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right)=g(\varepsilon)(I-\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon)))^{-1}\cdot\hat{L}^{\varepsilon}(\lambda g(\varepsilon))\,.$$

В результаті отримаємо
$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\left(g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}(\lambda I-C)^{-1}\cdot M^{-1}=\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\left[\int_0^t e^{yC}dy\cdot M^{-1}\right].$$

Згідно з теоремою неперервності для перетворень Лапласа
$$g(\varepsilon)H^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\left(\int_0^t e^{yC}dy\right)M^{-1}.$$

З урахуванням того, що
$$H_{ij}^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)=E_i\left(e^{-\lambda\varsigma^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right)p_{ij}^{\varepsilon}(dt)\,,$$

остаточно отримуємо твердження теореми
$$g(\varepsilon)E_i\left(e^{-\lambda\varsigma^{\varepsilon}\left(\frac{t}{g(\varepsilon)}\right)}\right)p_{ij}^{\varepsilon}(dt)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\left(\int_0^t e^{yC}dy\right)_{sk}\cdot\frac{p_{ij}^{(k)}}{\pi_k}\,.$$

Теорему доведено.

Отже, отримано граничну теорему для багатовимірного рівняння відновлення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Yeleyko Ya.I., Nishchenko I.I. A limit theorem for a matrix-valued evolution. *Вісник ЛНУ.* Сер мех.-мат. 1993. № 53. С. 102–107
2. Yeleyko Ya.I., Nishchenko I.I. On an asymptotic representation of the Perror root of a matrix-valued evolution. *Ukrain. Mat. Zh.* 1996. Vol. 48, N 1. P. 35–43.
3 Feller W. A simple proof for renewal theorems. *Communs Pure and Appl. Math*. 1961. N 14. P. 285–293.
4. Koroliuk V.S., Limnios N. Stochastic systems in merging phase space. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2005. 348 p.
5. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковские процессы и их приложения. Київ: Наукова думка, 1976. 184 с.

O.A. Yarova, Ya.I. Yeleyko

LIMIT THEOREM FOR MULTIDIMENSIONAL RENEWAL EQUATION

Abstract. In the paper, we consider the multidimensional renewal equation in matrix form. The renewal equation for the process with independent increments and states of the Markov process is found. The renewal function is investigated. The limit theorem for the renewal equation is proved.

Keywords: renewal equation, renewal function, Markov process, process with independent increments, weak convergence.

Надійшла до редакції 09.06.2021