СИСТЕМНИЙ
АНАЛІЗ

УДК 519.1

Г.П. ДОНЕЦЬ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *georgdone@gmail.com*.
В.І. БІЛЕЦЬКИЙ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *bilvassa@ukr.net*.

ПРО ЗАДАЧУ ОПТИМАЛЬНОГО ПОШУКУ ЛОКАЛЬНО-ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

Анотація. Розглянуто задачу оптимального пошуку локально-допустимих розв'язків лінійної функції на перестановках, на яких лінійна функція набуває значень із заданого інтервалу. Запропоновано новий метод розв'язання такої задачі з використанням цілеспрямованого пошуку перестановок, які дають локально-допустимі розв'язки з найменшою кількістю переборів варіантів.

Ключові слова: лінійна функція, перестановка, транспозиція, баланс, позиція, операція.

Дослідженню задач комбінаторної оптимізації та методів їхнього розв'язування присвячено чимало робіт, у яких розглянуто підходи та описано методи оптимізації з лінійними, дробово-лінійними функціями цілі на множині перестановок [1–4], а також на множині розміщень [5–8].

У запропонованій роботі описано метод розв'язання задачі оптимального пошуку розв'язків лінійної функції на перестановках, на яких лінійна функція приймає значення із заданого інтервалу значень.

Розглянемо лінійну функцію $f(x) = pX$, де p — довільна перестановка із множини перестановок P, при цьому P — множина перестановок чисел $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $X = (1, 2, \ldots, n)$. Необхідно розв'язати задачу.

Задача. На множині перестановок P знайти такі перестановки p, на яких лінійна функція $f(x) = pX$ приймає значення, що задовольняють умову

$$|pX - A| \le \Delta, \qquad (1)$$

де A — задана величина між мінімальним і максимальним значеннями функції $f(x)$, Δ — допустиме відхилення від значення A.

Перестановки, що задовольняють умову (1), назвемо локально-допустимими розв'язками.

Відомо [1], що максимальне значення функції $f(x) = pX$ приймає на перестановці $p_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, у якій c_i, $1 \le i \le n$, розташовані в порядку зростання, а мінімальне значення — для перестановки, в якій c_i розташовані по спаданню.

Метод оптимального пошуку локально-допустимих розв'язків базується на методі розв'язування задачі локалізації лінійної функції на перестановках [2].

Опишемо метод оптимального пошуку локально-допустимих розв'язків для функції $f(x) = pX$, у якої c_i, $1 \le i \le n$, розташовані у порядку зростання. Суть методу полягає в цілеспрямованій побудові перестановок і їхньої оцінки без обчислення безпосередньо значення функції. Оцінка перестановок складається з двох частин: перша стосується зменшення значення функції внаслідок транспозиції чисел із останніх трьох у перші $n-3$ позиції, а друга — для отриманих останніх трьох чисел.

Наведемо спочатку оцінки для перестановок із трьох чисел. Розглянемо функцію $f(x)$ для $n=3$, тобто $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$.

Позначимо $c_2 - c_1 = \alpha$, $c_3 - c_2 = \beta$, $\delta_j = p_1X - p_jX$, $j = 2,3,\ldots,6$, p_1 — початкова перестановка (c_1, c_2, c_3).

Нехай $\alpha \le \beta$. Тоді перестановки, що дають спадну послідовність значень функції, будуть розташовані в такому порядку:

$$p_2 = (c_2, c_1, c_3), \delta_2 = \alpha;\ p_3 = (c_1, c_3, c_2), \delta_3 = \beta;\ p_4 = (c_2, c_3, c_1), \delta_4 = 2\alpha + \beta;$$

$$p_5 = (c_3, c_1, c_2), \delta_5 = \alpha + 2\beta;\ p_6 = (c_3, c_2, c_1), \delta_6 = 2\alpha + 2\beta. \qquad (2)$$

Якщо $\alpha \ge \beta$, тоді в (2) поміняються місцями p_2 з p_3 і p_4 з p_5.

Знаючи δ_j, $j = \overline{2,6}$, можна отримати значення функції на відповідній перестановці, не обчислюючи її безпосередньо. Нехай, наприклад, $p = (1,3,7)$. Тоді $\alpha = 2$, $\beta = 4$. Максимальним значенням функції є $1\cdot 1 + 3\cdot 2 + 7\cdot 3 = 28$. Оскільки $\alpha < \beta$, то маємо такі значення спадання функції: $28 - \delta_2 = 26$, $28 - \delta_3 = 24$, $28 - \delta_4 = 20$, $28 - \delta_5 = 18$, $28 - \delta_6 = 16$.

Розглянемо довільну перестановку $(c_1, \ldots, c_i, \ldots, c_j, \ldots, c_n)$, де c_i розташовано на k-му місці, а c_j — на l-му, $c_i < c_j$. З'ясуємо, як зміниться значення функції, якщо c_i і c_j поміняти місцями. Нехай f_1 — значення функції для вихідної перестановки, а f_2 — для трансформованої. Обчисливши їхню різницю, отримаємо

$$\delta = f_1 - f_2 = kc_i + lc_j - kc_j - lc_i = (c_j - c_i)(l - k). \qquad (3)$$

Зауваження. З формули (3) випливає, що заміна в перестановці c_i більшим значенням c_j зменшує значення функції.

Позначимо $c_i \leftrightarrow c_j$ операцію зміни місць розташованих поруч чисел c_i і c_j. З формули (3) очевидно, що для чисел c_i і c_{i+1}, які розташовані поруч, операція $c_i \leftrightarrow c_{i+1}$ приводить до зменшення значення функції на величину

$$\alpha_i = c_{i+1} - c_i, i = 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (4)$$

Для чисел c_i і c_k, що розташовані поруч, операція $c_i \leftrightarrow c_k$ приводить до зменшення значення функції (з урахуванням (4)) на величину

$$\delta = (c_k - c_i) = (c_{i+1} - c_i) + (c_{i+2} - c_{i+1}) + \cdots + (c_k - c_{k-1}) =$$

$$= \alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_{k-1}. \qquad (5)$$

Опишемо метод на прикладі оптимального пошуку локально-допустимих розв'язків функції $f(x) = pX$ для $n = 6$. Нехай задано $p = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6) = (1, 2, 4, 7, 14, 19)$, $X = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$, $A = 201$, $\Delta = 2$. Максимальне значення заданої функції $f(x) = 229$. Величини $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 5$, (4) набудуть значень: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$, $\alpha_4 = 7$, $\alpha_5 = 5$.

Нехай f^* — максимальне значення функції після встановлення в перестановці перших трьох чисел. Для решти трьох чисел (c_i, c_j, c_k) позначимо

$$\alpha = c_j - c_i, \ \beta = c_k - c_j. \qquad (6)$$

Назвемо ситуацію, представлену числами $(f^* - A, \alpha, \beta)$, балансом. Останній назвемо розв'язуваним, якщо існує таке δ_j із (2), для якого виконується рівність

$$\delta_j = f^* - A. \qquad (7)$$

Вочевидь розв'язуваний баланс рівносильний існуванню розв'язку задачі, оскільки тоді за виразом δ_j через α і δ знаходимо з (2) відповідне p_j щодо чисел c_1, c_2, c_3. Підставивши на їхні місця відповідно числа із останньої трійки перестановки і приєднавши до першої трійки чисел, отримаємо шукану перестановку як розв'язок задачі зі значенням функції $f(x) = A$. Якщо рівність (7) не виконується, то баланс нерозв'язуваний. Це означає, що така перестановка не є розв'язком зі значенням функції $f(x) = A$.

Оцінка кожної перестановки буде складатися з оцінки зменшення функції за рахунок транспозиції чисел у перші три позиції і оцінки приєднаної перестановки із трьох останніх чисел за допомогою δ_j, $j = 2, 3, \ldots, 6$, визначених у (2).

Оцінимо перестановку p. Для цієї перестановки $f^* = 229$. Для трійки чисел (c_4, c_5, c_6) знаходимо $\alpha = 7$, $\beta = 5$ (6) і $\delta_j = f^* - A = 229 - 201 = 28$ (7). Це призводить до нерозв'язуваного балансу (28, 7, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (24, 7, 5) для $\delta_5 = 2\alpha + 2\beta$ і розв'язок $(c_1, c_2, c_3, c_6, c_5, c_4) =$ (1, 2, 4, 19, 14, 7) зі значенням функції $f(x) = 205$, який не задовольняє умові (1). Те саме дає і його оцінка ($f^* - 24 = 229 - 24 = 205$).

Далі будемо утворювати перестановки, у яких перші три числа змінюються за рахунок транспозиції останніх трьох чисел перестановки. Розглянемо ці перестановки.

Перестановки з числом c_1 на першому місці. Початковою буде перестановка p.

1. Проведемо в перестановці p операцію $c_3 \leftrightarrow c_4$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_2, c_4, c_3, c_5, c_6)$. Для неї $f^* = 229 - \alpha_3 = 229 - 3 = 226$ і $\delta_j = 226 - 201 = 25$. Для трійки (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$. Отримуємо розв'язуваний баланс (25, 10, 5), для якого $25 = 2\alpha + \beta = \delta_4$ і згідно з (2) $p_4 = (c_2, c_3, c_1)$. Для розглянутого випадку це є (c_5, c_6, c_3). Повна перестановка набуде вигляду $(c_1, c_2, c_4, c_5, c_6, c_3) =$ (1, 2, 7, 14, 19, 4), яка є розв'язком задачі зі значенням функції $f(x) = 201$.

2. У перестановці $(c_1, c_2, c_4, c_3, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_2 і c_4. Отримаємо перестановку $(c_1, c_4, c_2, c_3, c_5, c_6)$. Значення функції у цьому разі зменшиться на величину $\alpha_2 + \alpha_3 = 5$ (5). Отже, $f^* = 226 - 5 = 221$ і $\delta_j = 221 - 201 = 20$. Для трійки чисел (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$, що приводить до розв'язуваного балансу (20, 10, 5), для якого $\delta_5 = \alpha + 2\beta$ і згідно з (2) $p_5 = (c_3, c_1, c_2)$. Для розглянутого випадку це є (c_6, c_3, c_5). Повна перестановка набуде вигляду $(c_1, c_4, c_2, c_6, c_3, c_5) =$ (1, 7, 2, 19, 4, 14), яка є розв'язком задачі зі значенням функції $f(x) = 201$.

3. Проведемо в перестановці p послідовно операції $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_3$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_2, c_5, c_3, c_4, c_6)$ і зменшення значення функції послідовно на α_4 і $\alpha_3 + \alpha_4$. У результаті отримаємо $f^* = 229 - (\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_4) = 212$, $\delta_j = 212 - 201 = 11$. Для трійки чисел (c_3, c_4, c_6) маємо $\alpha = 3$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (11, 3. 12). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (12, 3, 12), для якого $\delta_3 = \beta$ і $p_3 = (c_1, c_3, c_2)$. Для розглянутого випадку це є (c_3, c_6, c_4). Повна перестановка набуде вигляду $(c_1, c_2, c_5, c_3, c_6, c_4) =$ (1, 2, 14, 4, 19, 7), яка є розв'язком задачі зі значенням функції $f(x) = 200$.

4. У перестановці $(c_1, c_2, c_5, c_3, c_4, c_6)$ перемістимо число c_5 на другу позицію за допомогою операції $c_5 \leftrightarrow c_2$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_5, c_2, c_3, c_4, c_6)$. Це приведе до зменшення значення функції на $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, що в сумі дає число 12. Отже, $f^* = 212 - 12 = 200$ і $\delta_j = 200 - 201 = -1$. Для трійки чисел (c_3, c_4, c_6) маємо $\alpha = 3$, $\beta = 12$. Для цих значень α і β існує розв'язуваний баланс (3, 3, 12). З його оцінки $(f^* - 3 = 200 - 3 = 197)$ випливає, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 197$, який не задовольняє (1).

З огляду на зауваження робимо висновок, що розташування числа c_5 на першому та другому місцях не дає позитивного результату.

5. Проведемо в перестановці p послідовно операції $c_6 \leftrightarrow c_5$, $c_6 \leftrightarrow c_4$, $c_6 \leftrightarrow c_3$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_2, c_6, c_3, c_4, c_5)$. Значення функції послідовно зменшиться на α_5, $\alpha_4 + \alpha_5$, $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$, що в сумі буде 32, тобто $f^* = 229 - 32 = 197$. Розв'язку, що задовольняє (1), немає.

У цьому разі також приходимо до висновку, що розташування числа c_6 на першій, другій і третій позиціях призводить до негативного результату.

Далі, виходячи з цих висновків, варіанти перестановок з числом c_5 на першому та другому місцях і з числом c_6 на першому, другому та третьому місцях розглядати не будемо.

6. У перестановці p поміняємо місцями числа c_3 і c_2. Отримаємо перестановку $(c_1, c_3, c_2, c_4, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_2 = 2$, тобто $f^* = 229 - \alpha_2 = 227$ і $\delta_j = 227 - 20 = 26$. Для трійки (c_4, c_5, c_6) маємо $\alpha = 7$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (26, 7, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (24, 7, 5) для $\delta_6 = 2\alpha + 2\beta$ і розв'язок $(c_1, c_3, c_2, c_6, c_5, c_4)$ = (1, 4, 2, 19, 14, 7) зі значенням функції $f(x) = 203$.

7. У перестановці $(c_1, c_3, c_2, c_4, c_5, c_6)$ проведемо операцію $c_4 \leftrightarrow c_2$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_3, c_4, c_2, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_2 + \alpha_3 = 5$. Отже, $f^* = 227 - 5 = 222$ і $\delta_j = 222 - 201 = 21$. Для трійки (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 12$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (21, 12, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (22, 12, 5) для $\delta_5 = \alpha + 2\beta$ і розв'язок $(c_1, c_3, c_4, c_6, c_2, c_5) = (1, 4, 7, 19, 2, 14)$ зі значенням функції $f(x) = 200$.

8. У перестановці $(c_1, c_3, c_4, c_2, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_4 і c_3. Отримаємо перестановку $(c_1, c_4, c_3, c_2, c_5, c_6)$, що приведе до зменшення значення функції на $\alpha_3 = 3$, тобто $f^* = 222 - 3 = 219$ і $\delta_j = 219 - 201 = 18$. Для трійки чисел (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 12$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (18, 12, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (22, 12, 5). Оцінивши його $(f^* - 22 = 219 - 22 = 197)$, дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значеннями функції $f(x) = 197$, який не задовольняє умові (1).

9. У перестановці $(c_1, c_3, c_2, c_4, c_5, c_6)$ послідовно проведемо операції $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_2$. Отримаємо перестановку $(c_1, c_3, c_5, c_2, c_4, c_6)$. Це приведе до зменшення значення функції послідовно на α_4 і $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, тобто на 19. Отже, $f^* = 227 - 19 = 208$ і $\delta_j = 208 - 201 = 7$. Для трійки чисел (c_2, c_4, c_6) маємо $\alpha = 5$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (7, 5, 12). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (5, 5, 12) для $\delta_1 = \alpha$ і розв'язок $(c_1, c_3, c_5, c_4, c_2, c_6) = (1, 4, 14, 7, 2, 19)$ зі значенням функції $f(x) = 203$.

Перестановки з числом c_2 на першому місці. Початковою буде перестановка $(c_2, c_1, c_3, c_4, c_5, c_6)$. Це приводить до зменшення значення функції на

$\alpha_1 = 1$ за допомогою операції $c_2 \leftrightarrow c_1$ у перестановці *p*. Отже, $f^* = 229 - 1 = 228$ і $\delta_j = 228 - 201 = 27$. Для трійки чисел (c_4, c_5, c_6) маємо $\alpha = 7$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (27, 7, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (24, 7, 5). З його оцінки $(f^* - 24 = 228 - 24 = 204)$ випливає, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 204$, який не задовольняє умові (1).

1. Проведемо в початковій перестановці $(c_2, c_1, c_3, c_4, c_5, c_6)$ операцію $c_4 \leftrightarrow c_3$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_1, c_4, c_3, c_5, c_6)$. Це приведе до зменшення функції на $\alpha_3 = 3$. Отримаємо $f^* = 228 - 3 = 225$ і $\delta_j = 225 - 201 = 24$. Для чисел (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$. Це теж призводить до нерозв'язуваного балансу (24, 10, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (25, 10, 5) для $\delta_4 = 2\alpha + \beta$ і розв'язок $(c_2, c_1, c_4, c_5, c_6, c_3)$ = (2, 1, 7, 14, 19, 4) зі значенням функції $f(x) = 200$.

2. У перестановці $(c_2, c_1, c_4, c_3, c_5, c_6)$ проведемо операцію $c_4 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_4, c_1, c_3, c_5, c_6)$. Це приведе до зменшення функції на $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$. Отже, $f^* = 225 - 6 = 219$ і $\delta_j = 219 - 201 = 18$. Для трійки чисел (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (18, 10, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (20, 10, 5) для $\delta_5 = \alpha + 2\beta$ і розв'язок $(c_2, c_4, c_1, c_6, c_3, c_5)$ = (2, 7, 1, 19, 4, 14) зі значенням функції $f(x) = 199$.

3. У початковій перестановці перемістимо число c_5 на третє місце за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_3$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_1, c_5, c_3, c_4, c_6)$. Це приведе до зменшення функції послідовно на $\alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4$, що в сумі дає число 17. Отже, $f^* = 228 - 17 = 211$ і $\delta_j = 211 - 201 = 10$. Для чисел (c_3, c_4, c_6) маємо $\alpha = 3$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (10, 3, 12). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (12, 3, 12) для $\delta_3 = \beta$ і розв'язок $(c_2, c_1, c_5, c_3, c_6, c_4)$ = (2, 1, 14, 4, 19, 7) зі значенням функції $f(x) = 199$.

4. Проведемо в початковій перестановці операцію $c_3 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_3, c_1, c_4, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Отримаємо $f^* = 228 - 3 = 225$ і $\delta_j = 225 - 201 = 24$. Для чисел (c_4, c_5, c_6) маємо $\alpha = 7$, $\beta = 5$. Це приводить до розв'язуваного балансу (24, 7, 5) для $\delta_6 = 2\alpha + 2\beta$ і відповідно $p_6 = (c_3, c_2, c_1)$. Для розглянутого випадку це є (c_6, c_5, c_4). Повна перестановка набуде вигляду $(c_2, c_3, c_1, c_6, c_5, c_4)$ = (2, 4, 1, 19, 14, 7), яка є розв'язком задачі зі значенням функції $f(x) = 201$.

5. У перестановці $(c_2, c_3, c_1, c_4, c_5, c_6)$ проведемо операцію $c_4 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_3, c_4, c_1, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$. Отже, $f^* = 225 - 6 = 219$ і $\delta_j = 219 - 201 = 18$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (18, 13, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5). Оцінивши його $(f^* - 13 = 219 - 13 = 206)$, дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 206$, який не задовольняє умові (1).

6. У перестановці $(c_2, c_3, c_4, c_1, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_4 і c_3. Отримаємо перестановку $(c_2, c_4, c_3, c_1, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на величину $\alpha_3 = 3$. Отже, $f^* = 219 - 3 = 216$ і $\delta_j = 216 - 201 = 15$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (15, 13, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5) для $\delta_2 = \alpha$ і розв'язок $(c_2, c_4, c_3, c_5, c_1, c_6)$ = (2, 7, 4, 14, 1, 19) зі значенням функції $f(x) = 203$.

7. У перестановці $(c_2, c_3, c_1, c_4, c_5, c_6)$ перемістимо число c_5 на третє місце за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_2, c_3, c_5, c_1, c_4, c_6)$. Це приведе до зменшення функції послідовно на α_4 і $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, що в сумі дає число 20. Отже, $f^* = 225 - 20 = 205$ і $\delta_j = 205 - 201 = 4$. Для чисел (c_1, c_4, c_6) маємо $\alpha = 6$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (4, 6, 12). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (6, 6, 12) для $\delta_2 = \alpha$ і розв'язок $(c_2, c_3, c_5, c_4, c_1, c_6)$ = (2, 4, 14, 7, 1, 19) зі значенням функції $f(x) = 199$.

Перестановки з числом c_3 на першому місці. Початковою буде перестановка $(c_3, c_1, c_2, c_4, c_5, c_6)$. Вона витікає з перестановки p за допомогою операцій $c_3 \leftrightarrow c_2$ і $c_3 \leftrightarrow c_1$, що приведе до зменшення функції на $\alpha_2 + \alpha_1 + \alpha_2 = 5$. Отримаємо $f^* = 229 - 5 = 224$ і $\delta_j = 224 - 201 = 23$. Для трійки (c_4, c_5, c_6) маємо $\alpha = 7$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (23, 7, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (24, 7, 5) для $\delta_6 = 2\alpha + 2\beta$ і розв'язок $(c_3, c_1, c_2, c_6, c_5, c_4)$ = (4, 1, 2, 19, 14, 7) зі значенням функції $f(x) = 200$.

1. Проведемо в початковій перестановці операцію $c_4 \leftrightarrow c_2$. Отримаємо перестановку $(c_3, c_1, c_4, c_2, c_5, c_6)$. Для неї значення функції зменшиться на $\alpha_2 + \alpha_3 = 5$. Отже, $f^* = 224 - 5 = 219$ і $\delta_j = 219 - 201 = 18$. Для трійки (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 12$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (18, 12, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (22, 12, 5). Оцінивши його ($f^* - 22 = 219 - 22 = 197$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 197$, який не задовольняє (1).

2. Перемістимо в перестановці $(c_3, c_1, c_4, c_2, c_5, c_6)$ число c_4 на другу позицію за допомогою операції $c_4 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_3, c_4, c_1, c_2, c_5, c_6)$. Це приведе до зменшення функції на $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, тобто на 6. Отже, $f^* = 219 - 6 = 213$ і $\delta_j = 213 - 201 = 12$. Для трійки (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 12$, $\beta = 5$, що приводить до розв'язуваного балансу (12, 12, 5) для $\delta_2 = \alpha$ і відповідно $p_2 = (c_2, c_1, c_3)$. Для розглянутого випадку це є (c_5, c_2, c_6). Повна перестановка набуде вигляду $(c_3, c_4, c_1, c_5, c_2, c_6)$ = (4, 7, 1, 14, 2, 19), для якої $f(x) = 201$.

3. У перестановці $(c_3, c_1, c_2, c_4, c_5, c_6)$ перемістимо число c_5 на третю позицію за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_2$. Отримаємо перестановку $(c_3, c_1, c_5, c_2, c_4, c_6)$. Значення функції послідовно зменшиться на α_4 і $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, тобто на 19. Отже, $f^* = 224 - 19 = 205$ і $\delta_j = 205 - 201 = 4$. Для трійки (c_2, c_4, c_6) маємо $\alpha = 5$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (4, 5, 12). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (5, 5, 12) для $\delta_2 = \alpha$ і розв'язок $(c_3, c_1, c_5, c_4, c_2, c_6)$ = (4, 1, 14, 7, 2, 19) зі значенням функції $f(x) = 200$.

4. У початковій перестановці $(c_3, c_1, c_2, c_4, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_2 і c_1. Отримаємо перестановку $(c_3, c_2, c_1, c_4, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_1 = 1$, тобто $f^* = 224 - 1 = 223$ і $\delta_j = 22$. Для трійки (c_4, c_5, c_6) маємо $\alpha = 7$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (22, 7, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (24, 7, 5) і розв'язок $(c_3, c_2, c_1, c_6, c_5, c_4)$ = (4, 2, 1, 19, 14, 7) зі значенням функції $f(x) = 199$.

5. У перестановці $(c_3, c_2, c_1, c_4, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_4 і c_1. Отримаємо перестановку $(c_3, c_2, c_4, c_1, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6$, тобто $f^* = 223 - 6 = 217$ і $\delta_j = 16$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (16, 13, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5). Оцінивши його ($f^* - 13 = 217 - 13 = 204$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 204$, який не задовольняє умові (1).

6. У перестановці $(c_3, c_2, c_4, c_1, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_4 і c_2. Отримаємо перестановку $(c_3, c_4, c_2, c_1, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_2 + \alpha_3 = 5$. Отже, $f^* = 217 - 5 = 212$ і $\delta_j = 11$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (11, 13, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5) для $\delta_2 = \alpha$ і розв'язок $(c_3, c_4, c_2, c_5, c_1, c_6) =$ (4, 7, 2, 14, 1, 19) зі значенням функції $f(x) = 199$.

7. У перестановці $(c_3, c_2, c_1, c_4, c_5, c_6)$ перемістимо число c_5 на третю позицію за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_4$, $c_5 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_3, c_2, c_5, c_1, c_4, c_6)$. Значення функції послідовно зменшиться на α_4 і $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, тобто на 20. Отже, $f^* = 223 - 20 = 203$ і $\delta_j = 2$. Для трійки (c_1, c_4, c_6) маємо $\alpha = 6$, $\beta = 12$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (2, 6,12). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (6, 6, 12). З його оцінки ($f^* - 6 = 203 - 6 = 197$) випливає, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 197$, який не задовольняє умові (1).

Перестановки з числом c_4 на першому місці. Початковою буде перестановка $(c_4, c_1, c_2, c_3, c_5, c_6)$. Вона витікає з перестановки p за допомогою операцій $c_4 \leftrightarrow c_3$, $c_4 \leftrightarrow c_2$ і $c_4 \leftrightarrow c_1$, що приведе до зменшення значення функції на $\alpha_3 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 14$. Отже, $f^* = 229 - 14 = 215$ і $\delta_j = 14$. Для трійки (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (14, 10, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (10, 10, 5). Оцінивши його ($f^* - 10 = 215 - 10 = 205$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 205$, який не задовольняє умові (1).

1. У перестановці $(c_4, c_1, c_2, c_3, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_2 і c_3. Отримаємо перестановку $(c_4, c_1, c_3, c_2, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_2 = 2$. Отже, $f^* = 215 - 2 = 213$ і $\delta_j = 12$. Для трійки (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 12$, $\beta = 5$, що приводить до розв'язуваного балансу (12, 12, 5) для $\delta_2 = \alpha$ і відповідно $p_2 = (c_2, c_1, c_3)$. Для розглянутого випадку це є (c_5, c_2, c_6). Повна перестановка набуде вигляду $(c_4, c_1, c_3, c_5, c_2, c_6) =$ (7, 1, 4, 14, 2, 19), для якої $f(x) = 201$.

2. Перемістимо в перестановці $(c_4, c_1, c_3, c_2, c_5, c_6)$ число c_3 на другу позицію за допомогою операції $c_3 \leftrightarrow c_1$. Отримаємо перестановку $(c_4, c_3, c_1, c_2, c_5, c_6)$. Це приведе до зменшення значення функції на $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Отже, $f^* = 213 - 3 = 210$ і $\delta_j = 9$. Для трійки (c_2, c_5, c_6) маємо $\alpha = 15$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (9, 12, 5). Неважко переконатися, що для даних α і β існує розв'язуваний баланс (12, 12, 5). З його оцінки ($f^* - 12 = 210 - 12 = 198$) випливає, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 198$, який не задовольняє умові (1).

3. Перемістимо в початковій перестановці $(c_4, c_1, c_2, c_3, c_5, c_6)$ число c_5 на третю позицію за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_3$ і $c_5 \leftrightarrow c_2$, що приведе до зменшення функції на $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 22$. Отже, $f^* = 215 - 22 = 193$. Розв'язку, який задовольняв би умову (1), немає.

4. У початковій перестановці поміняємо місцями c_2 і c_1. Отримаємо перестановку $(c_4, c_2, c_1, c_3, c_5, c_6)$. Значення функції зменшиться на $\alpha_1 = 1$. Отже, $f^* = 215 - 1 = 214$ і $\delta_j = 13$. Для трійки (c_3, c_5, c_6) маємо $\alpha = 10$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (13, 10, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (10, 10, 5). Оцінивши його ($f^* - 10 = 214 - 10 = 204$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 204$, який не задовольняє умові (1).

5. У перестановці $(c_4, c_2, c_1, c_3, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_3 і c_1. Отримаємо перестановку $(c_4, c_2, c_3, c_1, c_5, c_6)$, при цьому значення функції змен-

шиться на $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$. Отже, $f^* = 214 - 3 = 211$ і $\delta_j = 10$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (10, 13, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5). Оцінивши його ($f^* - 13 = 211 - 13 = 198$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 198$, який теж не задовольняє умові (1).

6. У перестановці $(c_4, c_2, c_3, c_1, c_5, c_6)$ поміняємо місцями c_3 і c_2. Отримаємо перестановку $(c_4, c_3, c_2, c_1, c_5, c_6)$, при цьому значення функції зменшиться на $\alpha_2 = 2$. Отже, $f^* = 211 - 2 = 209$ і $\delta_j = 8$. Для трійки (c_1, c_5, c_6) маємо $\alpha = 13$, $\beta = 5$, що призводить до нерозв'язуваного балансу (8, 13, 5). Для даних α і β існує розв'язуваний баланс (13, 13, 5). Оцінивши його ($f^* - 13 = 211 - 13 = 198$), дійдемо висновку, що розв'язок існує зі значенням функції $f(x) = 198$, який теж не задовольняє умові (1).

7. У перестановці $(c_4, c_2, c_1, c_3, c_5, c_6)$ переміщаємо число на c_5 третю позицію за допомогою операцій $c_5 \leftrightarrow c_3$ і $c_5 \leftrightarrow c_1$. Це приведе до зменшення функції на $\alpha_3 + \alpha_4$ і $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, що в сумі дає 23. Отже, $f^* = 214 - 23 = 191$. Допустимого розв'язку немає.

На цьому завершується аналіз усіх перестановок. Отримано всі розв'язки, що задовольняють умову (1), за допомогою невеликої кількості обчислень (приблизно 30), що значно менше кількості всіх варіантів 6! = 720. Це досягнуто за використання методу, який можна назвати методом спрямованого структурування. Цим методом можна скористатися і для $n > 6$. Усі необхідні операції будуть виконуватися аналогічно, як і для $n = 6$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Донець Г.П., Колєчкіна Л.М. Екстремальні задачі на комбінаторних конфігураціях. Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. 309 с.
2. Донец Г.А., Билецкий В.И. О задаче локализации линейной функции на перестановках. *Кібернетика та комп'ютерні технології*. 2020. № 2. С. 14–18.
3. Донец Г.А., Колечкина Л.Н. Об одной задачи оптимизации дробно-линейной функции цели на перестановках. *Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информации»*. 2010. № 2. С. 31–41.
4. Семенова Н.В., Колечкина Л.Н., Нагорная А.Н. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. № 3. С. 158–172.
5. Ємець О.О., Колєчкіна Л.М. Задачі комбінаторної оптимізації з дробово-лінійними цільовими функціями. (За ред. І.В. Сергієнка). Київ: Наук. думка, 2005. 117 с.
6. Емец О.А., Барболина Т.Н. Комбинаторная оптимизация на размещениях. (Под ред. И.В. Сергиенко). Киев: Наук. думка, 2008. 159 с.
7. Емец О.А., Черненко О.А. Оптимизация дробно-линейных функций на размещениях. (Под ред. И.В. Сергиенко). Киев: Наук. думка, 2011. 139 с.
8. Сергиенко И.В., Емец О.А., Черненко О.А. Решение условной задачи оптимизации дробно-линейной целевой функции на множестве размещений методом ветвей и границ. *Кибернетика и системный анализ.* 2012. № 6. С. 30–35.

G.P. Donets, V.I. Biletskyi

ON THE PROBLEM OF OPTIMAL SEARCH FOR LOCALLY FEASIBLE SOLUTIONS OF A LINEAR FUNCTION ON PERMUTATIONS

Abstract. We consider the problem of optimal search for locally feasible solutions of a linear function on those permutations where the linear function takes the values from the given interval. We describe a new method of solving such problem by goal seeking for the permutations that provide locally feasible solutions with minimal search.

Keywords: linear function, permutation, transposition, balance, position, operation.

Надійшла до редакції 23.07.2021