УДК 517.9

**Г.Ц. ЧИКРІЙ**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com.*

**А.О. ЧИКРІЙ**
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *g.chikrii@gmail.com.*

# ПРИНЦИП РОЗТЯГУВАННЯ ЧАСУ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ[1]

**Анотація**. Запропоновано метод розв'язання ігрової задачі зближення траєкторії квазілінійної нестаціонарної системи з циліндричною термінальною множиною, що змінюється з часом. Розглянуто ситуацію, коли умова Понтрягіна (умова переваги першого гравця) не виконується. Уведено функцію розтягування часу, яка відтерміновує час закінчення гри, і з її допомогою — модифіковану умову Понтрягіна, яка надає змогу здійснити вимірний вибір керування. Базовим є метод розв'язувальних функцій. З використанням техніки багатозначних відображень та їхніх селекторів побудовано стратегії, які гарантують розв'язання задачі. Процес зближення траєкторії з термінальною множиною складається з двох ділянок: активної та пасивної, де обирається керування першого гравця з використанням керування другого гравця з певним запізненням у часі, що залежить від функції розтягування часу. Описано схему методу та отримано достатні умови закінчення гри за скінченний час.

**Ключові слова:** конфліктно-керований процес, багатозначне відображення, модифікована умова Понтрягіна, функція розтягування часу, вимірний вибір.

## ВСТУП

Математична теорія конфліктно-керованих процесів (диференціальних ігор, динамічних ігор) має широкий спектр фундаментальних методів дослідження процесів різної природи, що функціонують в умовах конфлікту і невизначеності.

Спроби побудувати оптимальну поведінку протидіючих сторін в ігрових задачах динаміки пов'язані з ідеологією динамічного програмування і з рівнянням Гамільтона–Якобі–Беллмана–Айзекса — основного рівняння з теорії диференціальних ігор [1]. У дещо іншій множинній формі ці ідеї відображено в обернених процедурах Понтрягіна–Пшеничного [2, 3], наприклад метод альтернованого інтеграла і метод напівгрупових $T_\varepsilon$-операторів.

Згідно зі згаданою ідеологією в процесі конфліктного протистояння одна зі сторін максимізує, а інша мінімізує функціонал якості в кожний момент часу, отже, оптимізація конфліктно-керованого процесу зводиться до знаходження континуального мінімаксу або максиміну функціонала в залежності від поточної інформованості.

Пошук оптимальних стратегій протидійних сторін пов'язаний з великими труднощами математичного характеру. Тож для прийняття рішень в ігрових динамічних задачах запропоновано низку ефективних математичних методів, які забезпечують гарантований результат і дають достатні умови розв'язання задачі без урахування оптимальності, що для практичного застосування цілком виправдано. Такими методами є перший прямий метод Л.С. Понтрягіна [2], правило екстремального прицілювання М.М. Красовського [4, 5], метод програмних ітерацій [6], а також метод розв'язувальних функцій [7]. Близькими за тематикою є роботи [8, 9]. Різні застосування ігрових методів до розв'язання прикладних задач досліджено в [10, 11].

[1] Робота виконана за часткової підтримки Національного фонду України. Грант № 2020.02/0121.

Під час реалізації процесів керування зазвичай інформація щодо стану або вибору керування супротивником запізнюється і потрібен час для її опрацювання. Тож розроблено методи зведення ігрової задачі у випадку запізнення інформації до задачі з повною інформацією, але з дещо зміненою динамікою [12, 13] з подальшим застосуванням відомих методів.

З іншого боку, в процесі розв'язання таких важливих задач, як, наприклад, перехоплення цілей, що рухаються, для досягнення результату необхідна певна перевага сторони, що переслідує, за ресурсами керування і динамічними можливостями.

У загальних постановках ігрових задач цю перевагу формалізовано в класичній умові Понтрягіна [2]. Існують [7] різні форми цієї умови. Так, іноді в умові Понтрягіна враховують тілесну частину термінальної множини. Інший підхід пов'язаний з анексуванням ресурсу керування утікача за допомогою множення на деяку матричну функцію і з геометричним відніманням із термінальної множини використаного ресурсу. У цьому випадку умова Понтрягіна поділяється на дві умови. Така ситуація виникає, коли керовані об'єкти, що протидіють, мають різну інерційність. Однак для деяких задач, таких як «м'яка посадка» (збіг геометричних координат і швидкостей) ця умова не виконується. У [14, 15] було запропоновано ввести функцію розтягування часу і модифіковану умову Понтрягіна. Після чого цю методику було розвинуто для широкого кола ігрових задач з ілюстрацією на процесах, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [16, 17], зокрема, для задач про м'яку посадку [18].

У запропонованій роботі для реалізації принципу розтягування часу і формалізації ігрових конструкцій використано метод розв'язувальних функцій [7, 19], пов'язаний з побудовою обернених функціоналів Мінковського спеціальних багатозначних відображень.

Перевагою методу розв'язувальних функцій є те, що він дає повне теоретичне обґрунтування класичного правила паралельного переслідування і зближення за променем [20], а також надає змогу ефективно використовувати сучасну техніку багатозначних відображень і їхніх селекторів в обґрунтуванні ігрових конструкцій і отримані на цій основі змістовних ігрових результатів.

Джерелом для появи згаданого методу була спеціальна мінімаксимінна функція [21] в теорії втечі від групи переслідувачів. Вона дала змогу формалізувати [22] ситуацію оточення. Після чого було розвинуто теорію групового переслідування [7, 23, 24]. Широкі можливості методу розв'язувальних функцій продемонстровано на задачах почергового переслідування, комівояжерного типу, з використанням кіл Аполлонія [25], а також на задачах з фазовими обмеженнями [7].

Накопичувальний принцип, закладений в методі, є природним, а його універсальність дає змогу в єдиній схемі охопити конфліктно-керовані процеси, що описуються функціонально-диференціальними рівняннями [26, 27], рівняннями в частинних похідних [28], з дробовими похідними [29], імпульсним впливом [30], а також нестаціонарні процеси [31, 32] і стохастичні системи [33].

За цих умов ігровий процес зближення реалізується у класі квазістратегій [4] і стробоскопічних стратегій [8] з використанням теорем вимірного вибору [34].

### ПОСТАНОВКА ІГРОВОЇ ЗАДАЧІ. УМОВА ПОНТРЯГІНА

Нехай рух конфліктно-керованого об'єкта в скінченновимірному Евклідовому просторі $R^n$ описується системою лінійних диференціальних рівнянь

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, u, v), \quad z(t_0) = z_0, \ t \geq t_0 \geq 0, \tag{1}$$

де $A(t)$ — матрична функція порядку $n$, елементи якої є вимірними за Лебегом функціями і сумованими на будь-якому скінченному інтервалі $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$.

Параметри керування гравців $u$ і $v$ вибирають із областей керування $U(t)$ і $V(t)$, причому $U(t) \in K(R^p)$, $V(t) \in K(R^q)$ і є вимірними компактнозначними відображеннями для $t \in [t_0, +\infty)$. Тут $K(R^p)$ — сукупність непорожніх компактів простору $R^p$. Вектор-функція $\varphi(t, u, v)$ (блок керування) визначена на множині $[t_0, +\infty) \times R^p \times R^q$ і задовольняє умови Каратеодорі: для всіх фіксованих пар $(u, v) \in R^p \times R^q$ вона вимірна по $t$, $t \in [t_0, +\infty)$, і для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, +\infty)$ неперервна за сукупністю $(u, v)$ на $R^p \times R^q$.

Будемо також вважати, що

$$\|\varphi(t, u, v)\| \le a(t) \qquad \forall u \in U(t), \qquad v \in V(t), \qquad t \in [t_0, +\infty), \tag{2}$$

де $a(t)$ — локально сумована функція.

Крім системи (1), задана термінальна множина $M^*(t)$, яка має циліндричний вигляд

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \qquad t \in [t_0, +\infty), \tag{3}$$

де $M_0$ — лінійний підпростір у $R^n$, а $M(t)$ — вимірне многозначне відображення, яке набуває значень із $K(L)$, $L$ — ортогональне доповнення до $M_0$ в $R^n$.

Мета першого гравця-переслідувача: за допомогою вибору параметра керування і за накладених обмежень вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (3) за найкоротший час.

Мета другого гравця-утікача: за допомогою параметра $v$ відхилити траєкторію процесу (1) від зустрічі з множиною $M^*(t)$ у скінченний момент часу, а якщо це неможливо, то максимально відтермінувати момент цієї зустрічі.

Для повного формулювання задачі про зближення необхідно визначити рівень інформованості обох гравців у процесі конфліктного протистояння. Станемо на бік першого гравця і з'ясуємо, який результат він може собі гарантувати.

Будемо вважати, що другий гравець як керування вибирає довільні вимірні функції зі значеннями з багатозначного відображення $V(t)$. Оскільки відображення $V(t)$ вимірне і замкнутозначне, згідно з теоремою про вимірний вибір [33] це можливо. Сукупність таких керувань (вимірних селекторів відображення $V(t)$) позначимо $\Omega_E$.

Якщо перший гравець у момент прийняття рішення $t, t \ge 0$, має інформацію щодо початкового стану процесу $(t_0, z_0)$ і попередньої історії керування утікача

$$v_t(\cdot) = \{v(s) : v(s) \in V(s), s \in [t_0, t]\},$$

тобто $u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то будемо говорити, що він використовує квазістратегію.

У випадку використання в момент $t$ інформації лише щодо початкового стану процесу (1) і миттєвого значення керування утікача $v(t)$, тобто $u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t))$, говорять про контркерування М.М. Красовського [4], яке визначається стробоскопічною стратегією О. Хаєка [8].

У запропонованій роботі розглянуто використання першим гравцем інформації з деяким запізненням для розв'язності вихідної задачі про зближення у випадку, коли перший гравець не має жорсткої переваги за ресурсами керування, тобто умова Понтрягіна не виконана [2, 9, 7].

У процесі розв’язання ігрових задач важливо вміти знаходити розв’язок системи рівнянь (1). Наведемо деякі відомі факти з цього приводу [34].

Фундаментальною системою розв’язків однорідної системи

$$\dot{z} = A(t)z$$

називається довільна сукупність $n$ розв’язків, які лінійно незалежні для будь-якого $t \geq t_0$. Квадратна матриця із цих розв’язків як стовпчиків є фундаментальною матрицею $Z(t)$ однорідного нестаціонарного рівняння.

Очевидно

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t), \quad t \geq t_0.$$

Перехідною матрицею однорідної нестаціонарної системи (матрицею Коші) називається матриця

$$\Phi(t, t_0) = Z(t)Z^{-1}(t_0), \quad t \geq t_0,$$

де $Z(t)$ — будь-яка фундаментальна матриця однорідної системи.

За допомогою методу варіації довільної постійної можна отримати розв’язок системи (1) — формулу Коші

$$Z(t) = \Phi(t, t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)\varphi(\tau, u(\tau), v(\tau))\, d\tau, \quad t \geq t_0, \tag{4}$$

де $u(\tau), v(\tau)$ — допустимі керування гравців.

Матриця $\Phi(t, t_0)$ не залежить від вибору фундаментальної матриці $Z(t)$, вона задовольняє матричне рівняння $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$, $\Phi(t_0, t_0) = E$ — одинична матриця, причому $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$, а $\Phi(t, t_1)\Phi(t_1, t_0) = \Phi(t, t_0)$.

У процесі розв’язання ігрових задач важливо вміти знаходити розв’язок (4), де ключовими є матричні функції $\Phi(t, \tau)$. Їхня побудова — складна задача. Однак існують класи нестаціонарних систем, для яких

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau\right\}, \; t \geq t_0.$$

Кажуть, що такі системи інтегровані в замкнутій формі. Зокрема, це системи комутативного класу (системи Лаппо–Данилевського), для яких виконана умова Лаппо–Данилевського [34]

$$A(t) \cdot \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau \cdot A(t), \quad t \geq t_0. \tag{5}$$

Для виконання умови комутативності (5) необхідно і достатньо, щоб матричну функцію $A(t)$ можна було представити у вигляді

$$A(t) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(t) A_k,$$

де $\alpha_k(t)$ — лінійно незалежні скалярні функції, а постійні матриці $A_k$ попарно комутативні

$$A_k A_j = A_j A_k, \quad k, j = 0, 1, \ldots, m.$$

Зауважимо, що якщо похідна $\dot{A}(t)$ існує, то умова (5) еквівалентна умові

$$A(t)\cdot \dot{A}(t) = \dot{A}(t)\cdot A(t), \quad t \ge t_0.$$

Існують й інші типи матричних функцій, для яких лінійні нестаціонарні системи інтегровані в замкнутій формі.

Це насамперед системи, які за допомогою спеціальної матриці і перетворення Ляпунова можуть бути зведені до лінійних систем з постійною матрицею. Тут ключовими є теореми Єругіна, Ляпунова, Флоке [34].

### СХЕМА МЕТОДУ

Розглянемо схему розв'язання задачі (1)–(3) з використанням методу розв'язувальних функцій [7, 19].

Позначимо $\pi$ ортопроєктор, який діє із $R^n$ в $L$. Розглянемо багатозначне відображення

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v) : u \in U(t)\}, \quad t \ge t_0, \quad v \in V(t).$$

Воно породжує відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi\,\Phi(t, \tau)\,\varphi(\tau, U(\tau), v), \qquad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V(\tau)} W(t, \tau, v), \; t \ge \tau \ge t_0.$$

**Умова 1 (умова Понтрягіна).** Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ є вимірним по $\tau$, замкнутозначним і має непорожні прямі образи для $t_0 \le \tau \le t < +\infty$.

За такого припущення схема методу розв'язувальних функцій дає змогу отримати в нестаціонарному випадку достатні умови розв'язності ігрової задачі зближення для різних класів стратегій [7].

Однак для багатьох задач згадана умова не має місця.

У запропонованій роботі описано процедуру, що надає змогу послабити умову Понтрягіна. Вона пов'язана з принципом розтягування часу [12, 13, 16–18] і дає можливість розширити клас конфліктно-керованих процесів, для яких задача про зближення за скінченний час може бути розв'язана з використанням методу розв'язувальних функцій.

Повернемося до задачі (1)–(3) і припустимо, що блок керування надає змогу розділяти параметри керування, тобто

$$\varphi(t, u, v) = f(t, u) + g(t, v),$$

що автоматично забезпечує виконання умови сідлової точки в «маленькій грі» [6].

**Умова 2 (модифікація умови Понтрягіна)**. Існує така диференційована монотонно зростаюча функція $I(t)$, $I(t) \ge t$, $t \ge t_0$, причому $I(t_0) = t_0$, що багатозначне відображення

$$W_I(t, \tau) = \pi\,\Phi(I(t), q(t, \tau)) f(q(t, \tau), U(q(t, \tau))) \underline{*}$$
$$\underline{*}\, \pi\,\Phi(I(t), \psi(t, \tau)) g(\psi(t, \tau), V(\psi(t, \tau)) \dot{I}(t - \tau + t_0) \ne \varnothing$$

для $t \ge \tau \ge t_0$, де $q(t, \tau) = I(t) - t + \tau$, $\psi(t, \tau) = I(t) - I(t - \tau + t_0) + t_0$, а відображення $U(q(t, \tau))$, $V(\psi(t, \tau))$ є компактнозначними і вимірними за $\tau$, $\underline{*}$ — геометрична різниця Мінковського.

Для кращого розуміння викладеного зазначимо зміст величин, що фігурують в умові 2. Час $t$ і функція розтягування часу $I(t)$ стосуються тривалості гри, $\tau$ —

поточний час. Функція $q(t,\tau)$ — момент вибору керування переслідувачем, при цьому він використовує керування утікача в момент $\psi(t,\tau)$. Неважко бачити, що $q(t,\tau)\ge\psi(t,\tau)$, $t\ge\tau\ge t_0$, унаслідок нерівності $I(t)\ge t\ge t_0$. Спостерігаємо деяке запізнення інформації щодо вибору керування супротивника [12, 13].

Оскільки за умови 2 відображення $W_I(t,\tau)$ є вимірним за $\tau$, $\tau\in[t_0,t]$, і замкнутозначним, то внаслідок теореми вимірного вибору [33] в ньому існує вимірний за $\tau$ селектор $\gamma_I(t,\tau)$, який зафіксуємо для подальшого.

Уведемо функцію

$$N(t,u_0(\cdot))=\pi\,\Phi(I(t),t_0)z_0+\int_{t_0}^{q(t,t_0)}\pi\,\Phi(I(t),\tau)f(\tau,u_0(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\gamma_I(t,\tau)d\tau,$$

яка пов'язує початкові дані, стартові керування $u_0(\tau), u_0(\tau)\in U(\tau)$, $\tau\in[t_0,q(t,t_0)]$, і селектор $\gamma_I(t,\tau)$.

Реалізовуючи ідеологію розв'язувальних функцій, розглядаємо відображення

$$\mathrm{A}_I(t,\tau,v,u_0(\cdot))=\{\alpha\ge0:[W_I(t,\tau,v)-\gamma_I(t,\tau)]\cap\alpha[M(I(t))-$$
$$-N(t,u_0(\cdot))]\ne\varnothing\},\tag{6}$$

де

$$W_I(t,\tau,v)=\pi\,\Phi(I(t),q(t,\tau))f(q(t,\tau),U(q(t,\tau)))-$$
$$-\pi\,\Phi(I(t),\psi(t,\tau))g(\psi(t,\tau),v)\dot I(t-\tau+t_0).$$

Його опорну функцію в напрямку +1 називають розв'язувальною [7, 19]:

$$\alpha_I(t,\tau,v,u_0(\cdot))=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathrm{A}_I(t,\tau,v,u_0(\cdot))\},\ v\in V(\psi(t,\tau)).$$

Із виразу (6) випливає, що якщо для деякого $u_0(\cdot)$ і $t$, $t>t_0$, $N(t,u_0(\cdot))\in\in M(I(t))$, то $\mathrm{A}_I(t,\tau,v,u_0(\cdot))=[0,+\infty)$, а $\alpha_I(t,\tau,v,u_0(\cdot))=+\infty$ для $v\in V(\psi(t,\tau))$, $t_0\le\tau\le t$.

Розглянемо множину

$$T_I(t_0,z_0,\gamma_I(\cdot,\cdot))=$$
$$=\left\{t\ge t_0:\ \sup_{u_0(\cdot)\in U_0^t}\ \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E^t}\int_{t_0}^{t}\alpha_I(t,\tau,v(\tau),u_0(\cdot))d\tau\ge1\right\},\tag{7}$$

де

$$U_0^t=\{u_0(\tau):u_0(\tau)\in U(\tau),\tau\in[t_0,q(t,t_0)\},$$

$$\Omega_E^t=\{v(\tau):v(\tau)\in V(\psi(t,\tau)),\ \tau\in[t_0,t]\}.$$

Якщо нерівність у фігурних дужках в (7) не виконується для всіх $t>t_0$, то покладемо $T_I(t_0,z_0,\gamma_I(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Будемо в подальшому припускати, не виділяючи в окрему умову, що точна верхня грань по $u_0(\cdot)$ в (7) досягається.

Перш ніж перейти до формулювання і доведення основного результату проведемо деякі перетворення над розв'язком системи (1) з урахуванням уже анонсованої інформованості щодо вибору керувань.

Для цього розглянемо формулу Коші, що є розв'язком системи (1) у проєкції на підпростір $L$,

$$\pi\,z(t)=\pi\,\Phi(t,t_0)z_0+\int_{t_0}^{t}\pi\Phi(t,\tau)f(\tau,u(\tau))d\tau+\int_{t_0}^{t}\pi\Phi(t,\tau)g(\tau,v(\tau))d\tau.$$

Представимо проєкцію $\pi z(I(t))$ у вигляді

$$\pi z(I(t)) = \pi\Phi(I(t), t_0) z_0 + \int\limits_{t_0}^{q(t,t_0)} \pi \Phi(I(t), \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{q(t,t_0)}^{I(t)} \pi\Phi(I(t), \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int\limits_{t_0}^{I(t)} \pi\Phi(I(t), \tau) g(\tau, v(\tau)) d\tau. \qquad (8)$$

Для вирівнювання меж інтегрування зробимо заміну змінних $\tau$ у третьому та четвертому членах формули (8) на $q(t,\tau)$ і $\psi(t,\tau)$ відповідно. Тоді отримаємо

$$\pi z(I(t)) = \pi\Phi(I(t), t_0) z_0 + \int\limits_{t_0}^{q(t,t_0)} \pi \Phi(I(t), \tau) f(\tau, u(\tau)) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \pi \Phi(I(t), q(t,\tau)) f(q(t,\tau), u(q(t,\tau))) d\tau + \qquad (9)$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \pi \Phi(I(t), \psi(t,\tau)) g(\psi(t,\tau), v(\psi(t,\tau))) \dot{I}(t - \tau + t_0) d\tau,$$

тому що для $q(t, t_0) \le \tau \le I(t)$ справедлива нерівність $t_0 \le q(t,\tau) \le t$, а для $t_0 \le \tau \le I(t)$ відповідно $t_0 \le \psi(t,\tau) \le t$.

Завдяки заміні змінних в останніх членах формули (8) межі інтегрування в (9) стали однаковими $[t_0, t]$ і вибір керування $u(\tau), \tau \in [q(t, t_0), I(t)]$ зведений до вибору керування $u(q(t, t_0)), \tau \in [t_0, t)$].

**Теорема 1.** Нехай для конфліктно-керованого процесу (1)–(3) керування розділені ($\varphi(t,u,v) = f(t,u) + g(t,v)$), виконана модифікована умова Понтрягіна з деякою функцією розтягування часу $I(t)$ і відображення $M(t), t \ge t_0$, є опуклозначним.

Тоді, якщо для заданого початкового стану $(t_0, z_0)$ існує такий вимірний селектор $\gamma_I(t,\tau)$, $t_0 \le \tau \le t < +\infty$, багатозначного відображення $W_I(t,\tau)$, що

$$T_I(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)) \ne \varnothing \text{ і } T_* \in T_I(t_0, z_0, \gamma_I(\cdot,\cdot)),$$

то траєкторія процесу (1) може бути приведена на термінальну множину (3) в момент $I(T_*)$ у класі квазістратегій.

**Доведення.** Будемо розглядати конфліктно-керований процес (1)–(3) на інтервалі $[t_0, I(T_*)]$. На початковому проміжку $[t_0, q(T_*, t_0)]$ виберемо і зафіксуємо стартове керування $u_0(\tau)$ з умови максимуму виразу

$$\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E^{T_*}} \int\limits_{t_0}^{T_*} \alpha_I(T_*, \tau, v(\tau), u_0(\cdot)) d\tau.$$

Розглянемо спочатку випадок $N(T_*, u_0(\cdot)) \,\overline{\in}\, M(I(T_*))$.

Уведемо контрольну функцію

$$h_I(t) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha_I(T_*, \tau, v(\tau), u_0(\cdot) d\tau, \quad v(\tau) \in V(\psi(t,\tau)).$$

Тоді з неперервності $h_I(t)$, визначення часу $T_*$ із теорем аналізу випливає, що існує такий момент часу $t_*$, що $h_I(t_*)=0$. Інтервал $[t_0, t_*]$ назвемо активним, а $(t_*, T_*]$ — пасивним. Їм відповідають інтервали $[q(T_*, t_0), q(T_*, t_*)]$, $(q(T_*, t_*), I(T_*)]$. Відповідні представлення розв'язку без виділення активної і пасивної ділянок задаються формулами (8), (9) для $t = T_*$.

Розглянемо многозначне відображення

$$U_I(\tau, v) = \{u \in U(q(T_*, \tau)) : \pi\Phi(I(T_*), q(T_*, \tau)) f(q(T_*, \tau), u) -$$
$$-\pi\Phi(I(T_*), \psi(T_*, \tau)) g(\psi(T_*, \tau), v) \dot{I}(T_* - \tau + t_0) - \gamma_I(T_*, \tau) \in$$
$$\in \overline{\alpha}_I(T_*, \tau, v, u_0(\cdot))[M(I(T_*)) - N(T_*, u_0(\cdot))]\},$$
$$\tau \in [t_0, T_*], \quad v \in V(\psi(T_*, \tau)),$$

де

$$\overline{\alpha}_I(T_*, \tau, v, u_0(\cdot)) = \begin{cases} \alpha_I(T_*, \tau, v, u_0(\cdot)), \ \tau \in [t_0, t_*], \\ 0, \ \tau \in (t_*, T_*]. \end{cases}$$

Відображення $U_I(\tau, v)$ є $L \times B$-вимірним унаслідок теореми про обернений образ [33] і замкнутозначним. Тож в ньому згідно з теоремою про вимірний вибір [33] існує $L \times B$-вимірний селектор

$$u_I(\tau, v) = u(q(T_*, \tau), v(\psi(T_*, \tau)), \ \tau \in [t_0, T_*]. \tag{10}$$

Такий самий висновок можна отримати з використанням теореми Філіпова–Кастена.

Керування (10) виберемо як керування переслідувача на активній і пасивній ділянках. Воно є суперпозиційно вимірною функцією, тобто $u(\tau) = u_I(\tau, v(\tau))$, $v(\tau) \in V(\psi(T_*, \tau))$, є вимірною функцією.

Якщо $N(T_*, u_0(\cdot)) \in M(I(T_*))$, то керування переслідувача виберемо за аналогічною схемою, але з нульовою розв'язувальною функцією. Зазвичай кажуть [7], що цей випадок відповідає першому прямому методу Понтрягіна [2, 9].

Поклавши $t = T_*$ і виділивши активну і пасивну ділянки, остаточно отримаємо представлення із формули (9)

$$\pi z(I(T_*)) = \pi\Phi(I(T_*), t_0) z_0 + \int_{t_0}^{q(T_*, t_0)} \pi\Phi(I(T_*), f(\tau, u_0(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^{T_*} \gamma_I(T_*, \tau) d\tau +$$
$$+\int_{t_0}^{t_*} \pi\Phi(I(T_*), q(T_*, \tau)) f(q(T_*, \tau), u(q(T_*, \tau))) d\tau +$$
$$+\int_{t_*}^{T_*} \pi\Phi(I(T_*), q(T_*, \tau)) f(q(T_*, \tau), u(q(T_*, \tau))) d\tau -$$
$$-\int_{t_0}^{T_*} \pi\Phi(I(T_*), \psi(T_*, \tau)) g(\psi(T_*, \tau), v(\psi(T_*, \tau))) \dot{I}(T_* - \tau + t_0) d\tau -$$
$$-\int_{t_0}^{T_*} \gamma_I(T_*, \tau) d\tau. \tag{11}$$

У випадку $N(T_*, u_0(\cdot)) \overline{\in} M(I(T_*))$, використовуючи закони вибору керування на активній і пасивній ділянках, отримуємо

$$\pi z(I(T_*)) \in N(T_*, u_0(\cdot)) +$$
$$+\int_{t_0}^{T_*} \overline{\alpha}_I(T_*, \tau, v(\tau), u_0(\cdot))[M(I(T_*) - N(T_*, u_0(\cdot))] d\tau =$$

$$= N(T_*, u_0(\cdot))\left[1 - \int_{t_0}^{T_*} \overline{\alpha}_I(T_*, \tau, v(\tau), u_0(\cdot))d\tau\right] +$$

$$+\int_{t_0}^{T_*} \overline{\alpha}_I(T_*, \tau, v(\tau), u_0(\cdot))M(I(T_*))d\tau = M(I(T_*)) .$$

Якщо $N(T_*, u_0(\cdot)) \in M(I(T_*))$, то внаслідок вибору керування за законом (10) з нульовою розв'язувальною функцією з (11) отримаємо включення $\pi z(I(T_*)) \in M(I(T_*))$.

**ВИСНОВКИ**

Отримані результати можуть бути поширені на різні ігрові задачі для послаблення умови Понтрягіна, в тому числі на узагальнені квазілінійні системи [19], на задачі з групами учасників. Так, у задачі групового зближення з $v$ переслідувачами будуть фігурувати $v$ систем типу (1), $v$ термінальних множин (3), а результат формулюватиметься за допомогою $v$ функцій розтягування часу $I_i(t), i = \overline{1, v}$, з використанням стандартної техніки групового переслідування [23, 7] та схеми, наведеної у цій роботі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. Isaacs R.F. Differential games. New York; London; Sydney: Wiley Interscience, 1965. 479 p.
2. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. Москва: Наука, 1988. 576 с.
3. Pschenitchnyi B.N. $\varepsilon$-strategies in differential games. In: Topics in differential games. NewYork; London; Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. P. 45–99.
4. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. Москва: Наука, 1970. 420 с.
5. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры. *Автоматика и телемеханика.* 1968. №1. С. 65–78.
6. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 286 с.
7. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
8. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. 266 p.
9. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
10. Siouris G. Missile guidance and control systems. New York: Springer-Verlag, 2004. 666 p.
11. Siouris G. Aerospace avionics systems: A modern synthesis. San Diego: Academic Press, 1993. 466 p.
12. Chikrii G.Ts. An approach to solution of linear differential games with variable information delay. *Journal of Automation and Information Sciences.* 1995. Vol. 27, N. 3, 4. P. 163–170.
13. Chikrii G.Ts. Using the effect of information delay in differential pursuit games. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 2. P. 233–245. https://doi.org/10.1007/s10559-007-0042-x.
14. Никольский М.С. Применение первого прямого метода в линейных дифференциальных играх. *Изв. Академии наук СССР.* 1972. Т. 10. С. 51–56
15. Зонневенд Д. Об одном методе преследования. *ДАН СССР.* 1972. Т. 204, № 6. С. 1296–1299.
16. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching in evolutionary games of approach. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2016. Vol. 48, N 5. P. 12–26. https://doi.org/10.1615/ /JAutomatInfScien.v48.i5.20.
17. Chikrii G.Ts. Principle of time stretching for motion control in condition of conflict advanced control systems: Theory and applications, River Publishers, Series in Automation, Control and Robotics, 2021. P 53–82.

18. Chikrii G.Ts. One approach to solution of complex game problems for some quasi-linear evolutionary systems. *International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra.* 2004. Vol. 14. P. 307–314.
19. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2010. Vol. 271. P. 69–85.
20. Locke S. Arthur. Guidance, Princeton: D.Van Nostrand Company, Inc., 1955. 776 p.
21. Chikrii A.A. Linear problem of avoiding several pursuers. *Engineering Cybernetics.* 1976. Vol. 14, N 4. P. 38–42.
22. Pschenitchnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika.* 1976. N 3. P. 145–146.
23. Pschenitchnyi B.N., Chikrii A.A., Rappoport J.S. Group pursuit in differential games. *Opt. Invest. Stat.,* Germany, 1982. P. 13–27.
24. Chikrii A.A. Differential games with many pursuers. *Mathematical Control Theory*, Warsaw: Banach Center Publ., PWN, 1985. Vol. 14. P. 81–107.
25. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics.* 1987. N 4. P 437–445.
26. Chikrii A.A., Rappoport J.S., Chikrii K.A. Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2007. Vol. 43, N 5. P. 719–730.
27. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multi-valued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
28. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Chikrii A.A. On a differential game in an abstract parabolic system. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 2016. Vol. 293, Iss. 1, Suppl. P. 254–269.
29. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Control game problems for quasilinear systems with Riemann–Liouville fractional derivatives. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 6. P. 836–864.
30. Nakonechnyi A.G., Kapustyan E.A., Chikrii A.A. Control of impulse system in conflict situation. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51, N 9. P. 54–63.
31. Baranovskaya L.V., Chikrii A.A., Chikrii Al.A. Inverse Minkowski functional in a non-stationary problem of a group pursuit. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 1997. Vol. 36, N 1. P. 101–106.
32. Baranovskaya L.V., Chikrii Al.A. Game problems for a class of hereditary systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1997. Vol. 29, N 2. P. 87–97.
33. Aubin J.-P., Frankowska H. Set–valued analysis, Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
34. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: Наука, 1988. 552 с.

**G.Ts. Chikrii, A.O. Chikrii**

**TIME DILATION PRINCIPLE IN DYNAMIC GAME PROBLEMS**

**Abstract.** A method for solving the game problem of the trajectory of a quasi-linear non-stationary system approaching a cylindrical terminal set that varies with time is proposed. A case is considered where the Pontryagin condition (the condition of the first player's advantage) is not satisfied. The time dilation function is introduced, which postpones the time of the game termination, and with its help a modified Pontryagin's condition, which allows making a measurable choice of control. The basic method is the method of resolving functions. Using the technique of set-valued mappings and their selectors, strategies are generated, which guarantee the problem solution. The process of the trajectory approaching the terminal set consists of two sections: active and passive, where the control of the first player is selected, using the control of the second player with a certain time delay, which depends on the function of time dilation. The scheme of the method is outlined and sufficient conditions for the game termination in a finite time are obtained.

**Keywords:** conflict-controlled process, set-valued mapping, modified Pontryagin's condition, function of time dilation, measurable choice.

*Надійшла до редакції 08.09.2021*